VETERVM GEOMETRIA PROMOTA IN SEPTEM DE CYCLOIDE LIBRIS,

Et in duabus adiectis Appendicibus.

Autore ANTONIO LALOVERA
Societatis IESV.





TOLOSÆ,
Apud ARNALDVM COLOMERIVM, Regis & Academiæ Tolosanæ Typographum.

M. DC. LX.
CVM PRIVILEGIO.

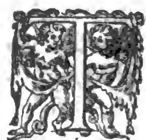


SERENISSIMO PRINCIPI

ARMANDO BORBONIO,

PRINCIPI DE CONTY,

PROREGI OCCITANIÆ, &c.



OT támque admiranda, quæ Antiquos latuerint, inueniuntur ab ætatis nostræ Geometris (SERENISSIME PRINCEPS) vt rectè nuper pronuntiatum à quodam fuerit, nunc tandem in Geometricis superatum fœliciter esse Bonæ Spei promontorium; vnde ad incognitas olim, præcipuè Tetragonismorum & Perimetrorum Regiones expedita pateat via. In hac ego longinquâ peregrinatione cùm plures annos consumpserim, iamque postremùm redux noui aliquid inde asportasse mihi videar, eiusmodi inuenti primum & generalem conspectum deberi Tibi, qui pro Rege in istis oris summâ totius Prouinciæ fœlicitate imperas, statim

*

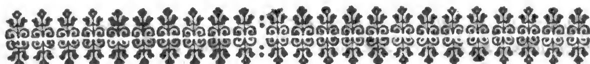
intellexi. Tua verò, quam à ſtirpe Borboniâ hæreditario iure trahis, Comitas; & quam Indole, ſtudiiſque Regio ſanguine digniſſimis mirificè auges; compulit me, vt moras, quas tenuitatis meæ mihi conſcius nectebam, abrumperem; Tibíque me cum diuturnæ nauigationis fructu qualicunque, meo certè & nouo ſiſterem. Fiduciam accedendi auxit, quod cùm ſeptem iſtorum librorum primum, aliquod noſtræ aduectionis periculum facturus, emiſiſſem, & nominatim ad Virum direxiſſem in dignoſcendis & æſtimandis iis, quæ in hoc genere ex Orbe diſſito conuehuntur, experientiſſimum, non ſit contemptui habitus, redieritque prælo iterum paratus, & fratribus (vt equidem ſpero) non inauſpicatò adiungendus. Nauium nomen quibus iſtud, quicquid eſt Geometriæ, inueximus, *Libra* eſt, abſolutiſſimum Iuſtitiæ Tuæ ſymbolum; neque verò nomen nudum eſt, ſed & res ipſa ab Archimede olim fabricata, à nobis reſtaurata, & ad tutam per ſumma & auia marium velificationem, vindicata Geometris. Quod autem duas eius nominis adhibuimus; vnam quam *Grammicam* diximus; alteram, *planam*; minimè pertimeſcimus illud Sapientis; *abominatio eſt apud Dominum pondus, & pondus:* quamuis enim diuerſæ exiſtant, ambæ tamen ſunt æquiſſimæ, mirabiléque ad Veritatem longè in re-

rum abditis inquirendam, atque inde in oculos hominum asportandam adiumentum. Sed cur istud ego fusiùs commemoro: cùm tua illa in omni Disciplinarum genere eruditio, hominum opinione longè maior, id per se vel primo obtutu æstimare facilè possit; & cùm mihi satis superque sit hac ad Te admissum fuisse occasione, vt quam Tolosates, Occitaniæque Tuæ Populi omnes cohibere non possunt lætitiam, postquam Tuo gubernari iam cœperunt Imperio, illam ego Tibi tester, quam cœpi vel ob id maiorem, quòd eius Societatis sim, cui iucundissimum semper fuit Tuis parére nutibus. Vno & eodem tempore Tua Occitania immortale beneficium à Rege Optimo sibi duplex conferri sensit; primum fuit commune reliquis non Prouinciis solùm, sed etiam, quâ latè patet Europa, Regnis, Pax diu expetita, & tot bellis victoriisque parta; alterum, Te qui expeditionibus Italicâ & Ruscinonensi plurimùm ad tantum illud munus contuleras, habere Rectorem, eiusdemque Regium ac Perpetuum vindicem. Vix Te primus rumor Proregem in Prouinciam istam detulerat, cum auita Religio & Iustitia sese altiùs extulerunt, Fautoris & Defensoris Potentissimi audito nomine: Tolosæ verò, quæ vt caput Prouinciæ loqui solet, vna fuit, estque etiam nunc constans vox è Panegyrico illo, hoc est, ex

Adulationis ſede ad Veritatis ſolum traducta, *Vita Principis cenſura eſt, eáque perpetua; ad hanc dirigimur, ad hanc conuertimur, nec tam imperio nobis opus eſt, quàm exemplo.* Illo vt diutiſſimè præluceas Prouinciæ Tuæ, Regno, & Orbi, opto, ſummiſque à Deo votis poſtulo, in Collegio Toloſano 8. Maij 1660.

Deuotus Seren. Tuæ Celſit.

Antonivs Lalovera,
Societatis IESV.



Ad Lectorem Geometram.

NIHIL dubito, LECTOR GEOMETRA, quin octo problematum totâ Europâ peruulgatorum calculus, quem ineunte anno superiore 1659. edidi, aliquam in te concitarit expectationem demonstrationum quas tunc pollicitus sum: sed moram sex mensium ex eo interiecto-rum ante primam Typographi operam ab anno ferme iam cœptam purgabit ecce duplicatus librorum numerus. Cùm enim vniuersa illorum problematum demonstratio libris comprehensa quatuor tunc penes nos extaret, prodeunt nunc omnino septem, cum Appendicibus duabus, quæ pro libro integro vt computentur, facilè (nisi fallor) a te obtinebunt: adeo nouam & arduam materiam tractant. Noua siquidem in Geometricis quærenda mihi semper propterea duxi, quòd cùm ab alÿs iam inuenta illustrentur sua satis demonstratione; hoc vnum Geometræ Scriptori restare videtur, vt ad irreperta porrò pergat; alioquin aliena in hoc genere scriptionis ingerere, hominis est (vt cum Tullio in pari ferme causâ loquar) intemperanter abutentis otio, & literis. Primum tamen huius Operis librum licet antea à nobis editum, hîc secundò damus, quòd initium sit solutionis quæsitæ, & quòd in antecessum emissus tunc fuerit, quasi alÿs prælusurus; præsertim si Viri doctissimi, ad quem illum tunc destinauimus, examine & indicio non improbatus rediret. Quòd autem post acceptam Dettonuillæi Epistolam illam qua peritissimos Europæ Geometras ad inquisitionem solutionis prouocabat, statim intra decem dies primum illum libellum ediderimus; & quod post tres menses totam solutionem mente complexi fuerimus, eámque è schedulis in mundum relatam initio mensis Nouembris habuerimus, non est quod quisquam id imputet promptiori cuidam ingenÿ nostri solertiæ; etenim eam in nobis nullam esse agnoscimus, & profitemur: sed causa huius vnica est, quòd generalem methodum ad solutionem eiusmodi problematum iam ab anno 1651. edideramus in Tetragonismicorum Elementorum libris, vt in sexto huius Operis libro ostendemus; illius verò methodi fundamento ita praiacto superstruenda tantùm nobis ea fuerunt, quæ erant huius materiæ propria: quanquam & horum quoque magnam partem iam cognitam habebamus ex iisdem illis Elementis, nempe quæ ad quadratrices circuli attinent. Dici enim vix potest quanto in

Geometricis sublimioribus adiumento sint istæ quadratrices, quarum generalem, natiuam & minimè fucatam genesim cùm hausissemus ex generatione quadratricis, quam tantùm pro triangulo rectilineo Archimedes olim tradiderat, vnde & Parabolæ quadraturam elicuerat; inuenimus tanto pòst tempore quadratrices circuli & hyperbolæ, eásque innumeras, vt in secundâ Appendice explicamus. Ex illis verò semel habitis assequuti nullo negotio sumus quatuor præsertim, quæ præ nouitate admirationem aliquam habuerunt; primò ex dato segmentorum centro grauitatis, quadraturam ipsorum eruimus segmentorum non in circulo vel ellipsi solùm, sed in qualibet etiam hyperbola; secundò ex datâ quadraturâ segmentorum, inuenimus grauitatis centrum ipsorum segmentorum, & etiam semisegmentorum; tertiò inde quoque obtinuimus cubaturam portionis cylindri, aut cylindracei, cuius basis sit segmentum, vel semisegmentum non circuli tantùm, sed hyperbolæ quoque cuiuscunque, præcisam plano per centrum vtcunque ducto; quartò denique eiusmodi portionum (eas vngulas *vocauit Gregorius à S. Vincentio; nos* cuneos*) reperimus centra grauitatis, datâ circuli & hyperbolæ quadraturâ; quæ quatuor anterioribus Geometris incognita fuere, quantum ex ipsorum monumentis constat. In illis ipsis Elementis statuimus principia, vnde infertur tetragonismus figuræ, quæ ad positionem rectæ datæ inclinata sit super datâ qualibet curuâ, & generetur ex figurâ aliâ insistente super illâ eadem curuâ, vt rem exponimus in secundæ Appendicis huius operis parte 2. num. 8. Cuius quidem inuentionis nostræ meminimus nunc, vt innuamus, ex ea nos elicere quadraturam* Hyperboloïdis, *eodem pacto genitæ, quo* Cycloides *primaria: Cycloidis enim generatio offert modum similes lineas procreandi in aliis quibuslibet curuis, hoc modo.*

In Figura LIII. designata notis Romanis in tabula quarta, esto quælibet curua b i, per quam intelligatur æquabiliter moueri punctum b, ita vt æqualibus temporibus æquales portiones itineris curui percurrat; esto recta c r ad quam ex b demissa sit perpendicularis b c; intelligatur æquabili latione ferri recta c b secum connexam curuam i b deferens; ita autem trahatur ad partes r super recta r c, vt paribus temporibus pares portiones eiusdem c r decurrantur ab ipsa b c constituente semper angulum rectum cum eadem c r; illæ autem portiones lineæ rectæ r c sint æquales portionibus curuæ b i decursis eodem tempore. Via quam describit motu suo punctum b habet generationem similem viæ Cycloidicæ: ac proinde si figura b t f g ad positionem rectæ r c æquet differentiam figuræ b i g, & figuræ illius inde ita genitæ, habet hanc proprietatem vt f g parallela rectæ c r

occurrens

occurrens rectæ b c in g, & arcui b i in t, sit perpetua lege æqualis arcui b i, vt in secunda propositione primi ostendemus pro Cycloide, pro aliis verò non est multò difficilius probatu. Cæterùm semita ista puncti b in motu rotæ & similium spectata, in memoriam mihi reuocare solet viam aquilæ in cœlo, in qua percipienda Sapientissimus Salomon se plurimum laborare profitetur: sicuti enim aquila lineam sui volatûs (vt Ambrosii verba, quæ Geometram sapiunt, vsurpem) figit in liquido, ita rotæ currentis punctum lineam sui quasi volatûs notat in aëre, sed obscuris admodum vestigiis, & quæ negotium Geometræ haud exiguum facessunt.

Esto iam d b i hyperbola primaria (ita voco eam cuius axes sunt inter se æquales) comprehensa asymptotis c a, a n angulum rectum c a n constituentibus, vt ex Elementis conicis constat; eius semiaxis transuersus sit b a; intelligatur curua f t b h ita genita ex hyperbolica i b d, vt quacunque i g vel h e ad rectam r c parallela ducatur, occurrens hyperbolæ perimetro in i vel d; recta f g, vel e h sit æqualis arcui i b, vel b d: compleatur parallelogrammum a c b n, quod ex iisdem Elementis ostenditur esse quadratum; ex a b secetur a q æqualis lateri a c, & per q agatur q z perpendicularis ad q a; per n agatur n z parallela rectæ q a, & compleatur parallelogrammum z q a m. Descripta sit z o hyperbola primaria semiaxe transuerso z m, centro m; intelligatur alia hyperbola primaria u a l cuius centrum q, semiaxis transuersus q a: ducta sit qualibet r i parallela asymptoto a n, occurrens alteri asymptoto in r; hyperbolæ b in i: per i ductæ sint i u, i o parallelæ ad rectas b a, a m, occurrentes hyperbolis l a u, n o in u, o; rectis q z, m z in s, x; ducta quoque sit per i recta f i g parallela rectæ c r, occurrens curuæ b t f in f; compleatur parallelogrammum g f y c. Aio quoties inter puncta r, a iacet punctum c, figuram hyperbolicam s u a q (eam appello externè cauam) imminutam hyperbolica altera internè caua z o x esse æqualem figuræ y f t b c comprehensæ sub curua f b, & sub rectis f y, y c, c b. Quod si puncta y, f iacuerint ad rectæ c b partes oppositas, aio vtrumque simul segmentum fore æquale figuræ y f t b c. Hinc infero cuneatam vel vngularem superficiem definitam in decima sexta quinti libri sequentis, insistentem super curua i b, & abscissam plano per c a rectam ducto, inclinatóque ad planum r c b gradibus 45. esse notam, data quadratura hyperbolæ, vt pote æqualem figuræ y f t b c. Vnde præterea elicio si recta i o ponatur occurrere curuæ b d in d, superficiem vngularem insistentem super curua i b d esse æqualem duplo hyperbolicæ figuræ s q a u comprehensæ sub rectis a q, q s, s u, & sub arcu hyperbolico u a. Ex ista autem vngulari superficie præfacile est dar

superficiem periphericam quam linea hyperbolica d b i describit dum circa rectam b c manentem rotatur; methodus enim illius traditur in quinquagesima secunda quinti libri, ex demonstratis in corollario secundo decimæ nonæ. Superficiem autem similem pro superficie parabolæ rotatæ circa axem vel basim inuenit Clariss. Fermatius, eiusque nos methodum exhibemus in parte prima Appendicis secundæ: vt iam non solùm cognita sit superficies plana æqualis sphæricæ genitæ ex rotatione circuli, quæ ab Archimede primùm fuit demonstrata; & superficies conoides respondens rotationi parabolæ, quam debemus V. C. Fermatio: sed superficies etiam illa, quæ hyperbolæ, modo iam præscripto rotatæ competit, estque inuentionis nostræ. Quòd si eadem hyperbola primaria intelligatur duci circa axem transuersum a b, vel rectum a m, huic quoque conoidicæ superficiei æqualem figuram planam exhibet methodus nostra; per illam enim vngularis superficies primaria (sic appello eam quæ abscinditur plano super basi inclinato gradibus 45.) resecta plano per axem transuersum ducto est æqualis planæ figuræ quæ super eodem transuerso insistit, & cuius dimetientes ad positionem recti semiaxis sunt æquales semidiametris eductis à puncto hyperbolæ in quo figuræ ita insistentis dimetientes illæ (sic vocare soleo parallelas rectas vni certæ datæ, vt in isto casu parallelas alteri axi) secant ipsam hyperbolam. Ita quoque vngularis superficies primaria resecta plano per axem rectum ducto est æqualis planæ figuræ, quæ super eodem axe recto insistit, & cuius dimetientes ad positionem axis transuersi sunt æquales semidiametris pari pacto eductis ex puncto hyperbolæ. Hoc idem theorema habet locum in vngulari superficie (primariam semper intelligimus, nisi aliud innuamus) ad circulum attinente; ideóque cùm semidiametri omnes sint inter se æquales, eiusmodi plana figura est parallelogrammum rectangulum altitudinis æquantis semidiametrum circuli. Cæterùm istæ planæ figuræ insistentes tam super axe transuerso quàm super recto hyperbolæ primariæ, ad figuras a q s u, z o x supra descriptas pro gyratione hyperbolæ primariæ i b d circa rectam c b, se habent vt diameter quadrati ad latus eiusdem: dimetientes enim figuratum a q s u, z o x, parallelæ axibus b a, a m, repræsentant rectas quæ ad figurarum ita insistentium dimetientes, hoc est ad semidiametros hyperbolæ d b i, se habent vt latus quadrati ad diametrum eiusdem. Nec mihi tam abstrusum fuit inuenire illas figuras esse hyperbolicas, quàm esse æquales vngulari superficiei; sunt enim duo ista, valde diuersa: vnde licet methodus inueniendi has figuras esset vitiosa, prius tamen theorema adhuc staret. Gregorius à S. Vincentio in prop. 230. de Hyperb. inuenit quidem figuram

*ex semidiametris hyperbolæ compactam illam quæ insistit super axe recto; non video tamen vbi repererit eam quæ insistit super transuerso. Porro inuentionem nostram non effugit vngularis superficies, quæ spectat ad quamlibet ellipsim & hyperbolam secundariam, cuius videlicet axes non sunt inter se æquales, per quemcunque axium agatur planum resecans illam superficiem: eiusmodi enim plana figura insistens super axe illo, habet dimetientes quæ vt quadratum axis, per quem non ducitur planum illud resecans, est ad quadratum alterius axis, ita se habeant ad rectam puncto tactûs perpendiculariter erectam super tangente, & interceptam inter tactum atque illum axem per quem non agitur planum resecans. Illæ verò figuræ planæ insistentes super axe per quem agitur planum inueniuntur atque demonstrantur nostra methodo: & quidem quando planum resecans agitur per axem maiorem ellipseos, figura est portio semiellipseos concentricæ, cuius semiaxes noti sunt: quando verò agitur per minorem est portio externè caua semihyperbolæ, cuius semiaxes noti sunt. Quod si planum illud, quod resecans non semel hîc appellauimus, agatur, per axem hyperbolæ secundariæ rectum, figura erit hyperbolica internè caua; si per axem transuersum, externè caua, eiusque vterque axis fiet notus. Atque vt rem in vno ellipseos casu tradam: si datæ ellipseos axis maior fuerit duplus minoris, & planum resecans agatur per maiorem, figura plana insistens erit semiellipsis concentrica, cuius semiaxis vnus est idem cum semiaxe minore datæ ellipseos, & ad alterum semiaxem concentricæ coniugatum est potestate vt 3. ad 16. nisi calculus me decipit: si autem planum resecans ducatur per datæ eiusdem ellipseos axem minorem, figura plana insistens erit semihyperbola externè caua concentrica ellipsi datæ; habens tranversum semiaxem eundem cum semiaxe maiore ellipseos datæ, iste verò semiaxis erit ad semiaxem eiusdem concentricæ rectum potestate vt 15. ad 1. saluâ semper logistices correctione. Hoc ipsum in hyperbolæ secundariæ vno certo casu definire supersedeo; cùm is qui methodum calculi pro ellipsi iam scriptam perceperit, & demonstrarit, non possit dubitare quin extendatur ad hyperbolam. Habes igitur hîc (*Lector*) occasione sumptà ex illo Theoremate* de figura inclinata super curua, *planam figuram æqualam superficiei vngulari pro sectionibus omnibus conicis, ac proinde & inde obtines æqualem superficiei sphæroidi ex ellipsi; & conoidi ex qualibet alia sectione conica genitæ. In libri quinti præfatione scripsi incognitam mihi esse figuram rectilineam quæ in ellipsi sit præscripto illo modo æqualis superficiei vngulari, sicuti cognita est æqualis vngulari superficiei in circulo; quod ipsum etiam nunc profiteor; id tamen*

nihil obstat quo minus data circuli & hyperbolæ quadratura, rectilineum illi æquale demonstremus; vt & cuneos solidos siue vngulas, & earum etiam superficies in omni sectione conica notas faciat nostra Geometria, & ita in ipso Operis vestibulo prouecta vltra veterum terminos appareat. Nullum autem ex Recentiorum Geometrarum libris adhuc legi, qui doceat inuentionem superficierum sphæroideon pro ellipsibus, & conoideon pro hyperbolis tam primaria quàm secundaria. Notandum verò est superficies istas planas ita respondere superficiebus vngularibus curuis, vt sint illis æquales συνόλως καὶ μερικῶς, integrè & particulatim, *quem modum æqualitatis explico in quarta propositione sexti libri, vbi figuram istam planam & curuam voco* coniugatas.

Porrò quid in singulis libris potissimum scripserimus, propositiones vltimæ singulorum librorum docent; secundi tamen argumentum in sola eius fronte extat: quòd verò Cyclocylindricam ibi tractatam Autor Recreationum Mathematicarum, *esse ellipsim asserit, omnino fallitur. Veterum more in illis demonstrata de linearum curuarum quadratricibus; de grauium descendentium acceleratione; de curuæ cuiuslibet æqualitate cum recta; de locis asymptoticis, eorumque grauitatis centro; de proprietatibus libræ curuæ; de Cyclocylindricis figuris; de spectantibus ad solutionem problematum illorum toti Europæ propositorum, & alia eiusmodi, quæ tibi in isto opere nostro occurrent, Lector Beneuole, si hallucinationis vitio caruerint, fortasse vitabimus Horatianum illud quod cum istos commentarios de Cycloide vel de* Rotatricula *(ita enim illam à* Rota, *vocant Scriptores Gallici) scriberemus, nobis ipsi vitandum proponebamus,*

Amphora cœpit
Institui: currente *Rota* cur vrceus exit?

Quoniam vero Geometras omnes esse curiosos scio; curiositatisque morbum hunc esse, vt fame suos stimulet acuta, vnde fiat vt res vorentur integræ, nec satis aptè præparentur menti alendæ: hoc vnum à te flagito, Lector, vt famem istam compescas, & nolis esse (quod de se Tullius alicubi fatetur) ὀξύπεινος *in curiositate: Geometrica enim huius generis, vt prosint, incidi, & mentis stomacho apparari debent; ita enim meliùs & vtiliùs concoquentur. Quod autem in Appendice secunda, & in ista quoque iam Præfatione aliquot inuenta propono, eorum demonstratione suppressa, id more Veterum ausim facere, non quo vllum cogere ad assensum velim, sed vt res non vulgares, aliјs quibus libuerit & vacauerit, mihique etiam ipsi aliàs fortasse examinandas hìc consignem. Conon ille, quem Archimedes*

eximiè laudat in Præfatione ad libros Spiralium, cùm multa à se inuenta summis tunc Geometris sine demonstratione proposuisset, quædam in ijs complexus est, quæ falsa erant, vt narrat ipse Archimedes, nec propterea quicquam de tanti viri existimatione detrahit, cùm reliqua raræ admodum inuestigationis essent, & ante illud inaccessa tempus. Dum autem propositiones illas affirmo esse non vulgares, nolim negare quin vulgares effici queant; sicuti & Antiquorum inuenta iamdiu vulgaria esse cœperunt; ipsæque aues & plantæ quæ non raræ solùm, sed necdum visæ fuerant, postquam ex detectis nuper vltimi Orbis regionibus ad nos delatæ semel fuerunt, ita communes nunc euaserunt, vt in auiarijs & hortis passim visantur. Te etiam, perhumane Lector, non ita morosum esse vnquam autumem, vt de libro aliquo inuentis Geometriæ nouis referto actum esse pronunties, si vnum quid vel leue in eo non rectè se habere deprehensum fuerit. Ego de libro non secus ac de segete existimare solitus semper fui: illa siquidem apud me seges nullius est pretij, vbi

Infœlix lolium, & steriles dominantur auenæ:

Ea verò mihi non desinit esse summi pretij, quæ latissimo flauescit in campo, quamuis non euidens lolij culmus vnus aut alter in densa illius & diuite sylua delitescere compertus fuerit. Licet Cononis propositiones illæ non omnes veræ fuerint; quia tamen maximam partem veræ, sublimes, & inexpectatæ fuerunt; ἐπὶ τὸ πλεῖον προάγαγε γεωμετρίαν, longè promouit Geometriam *Archimede ipso teste: cuius verba referre libuit, vt* promouendæ Geometriæ *studium esse perantiquum ostendamus; sæpiusque accidere quod idem testatur, vt problemata quæ initio credebantur intractabilia, lapsu temporis mansuefieri posse comprobentur.*

Miraberis fortasse (Lector) cur in ista præfatione nihil dum dixerim de iis quæ attinent ad Historiam problematum de Cycloide per totam Europam à D. Dettonvillæo sparsorum: causa huius silentii est, quod ea suis locis narrentur, meliusque ibi ex subiecta materia percipiantur. Vide sis libri primi propositionem 19. *libri secundi prop.* 10. *libri tertii prop.* 25. *libri quarti prop.* 36. *libri quinti prop.* 23. *libri sexti decimam septimam, & alias isti anteriores, præsertim duodecimam. Quid verò de quadraturæ circuli inuentione mihi ipse vindicem inspice, si lubet, in pag.* 127. 235. 241. 404. *Quantum autem calculo meo tribuam explico in pag.* 83. 125. 133. 180. 234.

ADDENDA.

AD pag. 46. *sub finem libri secundi.* Quamuis ea quæ ad paginam 258. mox addituri sumus, euincant Dettonuillæum hallucinatum in vno esse super quo fundat demonstrationem dimensionis curuarum Cycloïdicarum tam productarum quàm contractarum; istud tamen quod hîc ex illo retulimus verissimum est, neC nititur illo.

Ad pag. 142. *ante propos.* 3. Si analogia illa admittatur habere locum in isto casu, hinc liquet confirmari vnum, quod in aliis plurimis experti sumus, solutionem nempe problematis alicuius vnâ viâ haud quaquam esse aliquando difficilem; aliâ verò esse plurimùm: nam nostra hæc solutio facilis statim apparet; at verò Roberuallio licet Doctissimo, mirum quantum difficilis visa aliàs fuit, vt narrat ipse Dettonuillæus in eadem Epistola ad D. de Sluze. Quod autem hoc loco fatemur laborare nos in inuenienda differentia inter D.D. Pascalium & Dettonuillæum, eundem in nobis hærere scrupulum leges pag. 169.

Ad pag. 151. *sub finem Corollarij* 2. In ista Dettonuillæi demonstratione desiderauit aliquid Nobilissimus Geometra, & quidem meritò; id verò primus, quem sciam, suppleuit noster M. P. E. A. S. Sed totus calamo adscribatur iste lapsus; sicuti & illa dictorum non cohærentia quæ à nobis adnotatur pag. 227. Coroll. 3. quis enim calamo diutius properante, nunquam dormitet?

Ad pag. 235. *ante propos.* 12. R. P. Mersennus iam ab anno 1644. præfat. in Synopsim fecit Lectori spem editionis plurimorum Magni cuiusdam Geometræ inuentorum, *quibus*, inquit, *fortè breui quadratura circuli & hyperbolæ accedet.* Quis istud iactantiæ vlli vertat, quod Mersenno Magnus ille de se moderatis dixerit verbis? Aut quis inde, si quis fortè alius eam nunc promeret, laudem inuenti propositi idcirco minuendam censeret, quod insignis ille Geometra ante annos sexdecim innuisset à se repertam illam quadraturam?

Ad pag. 258. *ante Coroll.* 1 Iure optimo expectatur alia Dettonuillæi demonstratio, nam ea quam dat, peruersa ratiocinatione statuit vnum veluti basim totius demonstrationis, quod falsum esse iam iam monstrabitur: illud verò est (Fig. LII. tab. 4.) subtensam b e esse ad arcum e o, vt est recta h m ad m g: constructio autem iubet e d f semicirculum centro g descriptum, esse genitorem magnæ Semicycloideos c e a f cuiuscunque speciei, eiusque basim a f ad peripheriam f d c semicirculi esse vt est data recta h g ad radium g f, ita vt puncta h, f, g sint in eadem rectâ: ponit præterea basi f a æquidistare rectam m b; sumptum esse quodcunque punctum e in arcu cycloidico b c; iunctas esse rectas g m, b e, m h; arcum e o esse arcui d m similem, æqualem & similiter positum. Ego verò contendo subtensam b e non esse necessariò ad arcum e o, vt est recta h m ad m g. Esto g f ad g h potestate vt vnitas ad binarium, & arcus d m, m f sint æquales, singulique quadrans peripheriæ c d m f. In hoc casu ex Euclideis Elementis patet rectam m h tangere circulum in m; rectas m g, m h esse æquales; & si h m producatur ad l, angulum l m o esse semirectum. Igitur si per o agatur o n tangens circulum e o in o, angulus n o b erit semirectus, vt pote æqualis angulo l m o; & si ex b in rectam n o demittatur perpendicularis b i, angulus i o b erit æqualis angulo m g h, & triangulum b o i simile triangulo h g m: ergo vt h m latus ad m g, ita b i latus ad i o, & vt h g latus ad g m, ita b o latus ad i o: sed vt h g latus ad g m, ita ex Dettonuillæo & ex rei veritate, est recta b o ad arcum e o; ergo vt b o recta ad i o rectam, ita est eadem b o ad arcum e o: ergo arcus e o est æqualis rectæ i o. Rursus quoniam ex Dettonuillæo vt h m recta ad radium m g, ita subtensa b e ad arcum e o, & ita quoque monstrauimus esse rectam b i ad i o vel ad e o ipsi (vt iam ostendimus) æqualem; rectæ b i, b e habentes eandem rationem ad æquales i o, e o erunt inter se æquales; ergo cùm b i, b e sint æquales, peripheria circuli centro b descripti interuallo rectæ b i transibit per e, quod est absurdum. Nam cùm angulus b i o sit ex constructione rectus, recta i o tanget circulum centri b,: sed

Adulationis ſede ad Veritatis ſolum traducta, *Vita Principis cenſura eſt, eáque perpetua; ad hanc dirigimur, ad hanc conuertimur, nec tam imperio nobis opus eſt, quàm exemplo.* Illo vt diutiſſimè præluceas Prouinciæ Tuæ, Regno, & Orbi, opto, ſummiſque à Deo votis poſtulo, in Collegio Toloſano 8. Maij 1660.

Deuotus Seren. Tuæ Celſit.

ANTONIVS LALOVERA,
Societatis IESV.

Ad Lectorem Geometram.

NIHIL dubito, LECTOR GEOMETRA, *quin octo problematum totâ Europâ peruulgatorum calculus, quem ineunte anno superiore* 1659. *edidi, aliquam in te concitarit expectationem demonstrationum quas tunc pollicitus sum: sed moram sex mensium ex eo interiectorum ante primam Typographi operam ab anno ferme iam cœptam purgabit ecce duplicatus librorum numerus. Cùm enim vniuersa illorum problematum demonstratio libris comprehensa quatuor tunc penes nos extaret, prodeunt nunc omnino septem, cum Appendicibus duabus, quæ pro libro integro vt computentur, facilè (nisi fallor) a te obtinebunt: adeo nouam & arduam materiam tractant. Noua siquidem in Geometricis quærenda mihi semper propterea duxi, quòd cùm ab alÿs iam inuenta illustrentur sua satis demonstratione; hoc vnum Geometræ Scriptori restare videtur, vt ad irreperta porrò pergat; alioquin aliena in hoc genere scriptionis ingerere, hominis est (vt cum Tullio in pari ferme causâ loquar)* intemperanter abutentis otio, & literis. *Primum tamen huius Operis librum licet antea à nobis editum, hîc secundò damus, quòd initium sit solutionis quæsitæ, & quòd in antecessum emissus tunc fuerit, quasi alÿs prælusurus; præsertim si Viri doctissimi, ad quem illum tunc destinauimus, examine & iudicio non improbatus rediret. Quòd autem post acceptam Dettonuillæi Epistolam illam quæ peritissimos Europæ Geometras ad inquisitionem solutionis prouocabat, statim intra decem dies primum illum libellum ediderimus; & quod post tres menses totam solutionem mente complexi fuerimus, eámque è schedulis in mundum relatam initio mensis Nouembris habuerimus, non est quod quisquam id imputet promptiori cuidam ingenÿ nostri solertiæ; etenim eam in nobis nullam esse agnoscimus, & profitemur: sed causa huius vnica est, quòd generalem methodum ad solutionem eiusmodi problematum iam ab anno* 1651. *edideramus in Tetragonismicorum Elementorum libris, vt in sexto huius Operis libro ostendemus; illius verò methodi fundamento ita praiacto superstruenda tantùm nobis ea fuerunt, quæ erant huius materiæ propria: quanquam & horum quoque magnam partem iam cognitam habebamus ex iisdem illis Elementis, nempe quæ ad* quadratrices *circuli attinent. Dici enim vix potest quanto in*

Geometricis sublimioribus adiumento sint istæ quadratrices, quarum generalem, natiuam & minimè fucatam genesim cùm hausissemus ex generatione quadratricis, quam tantùm pro triangulo rectilineo Archimedes olim tradiderat, vnde & Parabolæ quadraturam elicuerat; inuenimus tanto pòst tempore quadratrices circuli & hyperbolæ, eásque innumeras, vt in secundâ Appendice explicamus. Ex illis verò semel habitis assequuti nullo negotio sumus quatuor præsertim, quæ præ nouitate admirationem aliquam habuerunt; primò ex dato segmentorum centro grauitatis, quadraturam ipsorum eruimus segmentorum non in circulo vel ellipsi solùm, sed in qualibet etiam hyperbola; secundò ex datâ quadraturâ segmentorum, inuenimus grauitatis centrum ipsorum segmentorum, & etiam semisegmentorum; tertiò inde quoque obtinuimus cubaturam portionis cylindri, aut cylindracei, cuius basis sit segmentum, vel semisegmentum non circuli tantùm, sed hyperbolæ quoque cuiuscunque, præcisam plano per centrum vtcunque ducto; quartò denique eiusmodi portionum (eas vngulas *vocauit Gregorius à S. Vincentio; nos* cuneos) *reperimus centra grauitatis, datâ circuli & hyperbolæ quadraturâ; quæ quatuor anterioribus Geometris incognita fuere, quantum ex ipsorum monumentis constat. In illis ipsis Elementis statuimus principia, vnde infertur tetragonismus figuræ, quæ ad positionem rectæ datæ inclinata sit super datâ qualibet curuâ, & generetur ex figurâ aliâ insistente super illâ eadem curuâ, vt rem exponimus in secundæ Appendicis huius operis parte 2. num.* 8. *Cuius quidem inuentionis nostræ meminimus nunc, vt innuamus, ex ea nos elicere quadraturam* Hyperboloidis, *eodem pacto genitæ, quo* Cycloides *primaria: Cycloidis enim generatio offert modum similes lineas procreandi in alijs quibuslibet curuis, hoc modo.*

In Figura LIII. designata notis Romanis in tabula quarta, esto qualibet curua b i, per quam intelligatur æquabiliter moueri punctum b, ita vt æqualibus temporibus æquales portiones itineris curui percurrat; esto recta c r ad quam ex b demissa sit perpendicularis b c; intelligatur æquabili latione ferri recta c b secum connexam curuam i b deferens; ita autem trahatur ad partes r super recta r c, vt paribus temporibus pares portiones eiusdem c r decurrantur ab ipsa b c constituente semper angulum rectum cum eadem c r; illæ autem portiones lineæ rectæ r c sint æquales portionibus curuæ b i decursis eodem tempore. Via quam describit motu suo punctum b habet generationem similem viæ Cycloidicæ: ac proinde si figura b t f g ad positionem rectæ r c æquet differentiam figuræ b i g, & figuræ illius inde ita genitæ, habet hanc proprietatem vt f g parallela recta c r

occurrens

occurrens rectæ b c in g, & arcui b i in t, sit perpetua lege æqualis arcui b i, vt in secunda propositione primi ostendemus pro Cycloide, pro aliis verò non est multò difficilius probatu. Cæterùm semita ista puncti b in motu rotæ & similium spectata, in memoriam mihi reuocare solet viam aquilæ in cœlo, *in qua percipienda Sapientissimus Salomon se plurimum laborare profitetur: sicuti enim aquila* lineam sui volatûs *(vt Ambrosij verba, quæ Geometram sapiunt, vsurpem)* figit in liquido, *ita rota currentis punctum lineam sui quasi volatûs notat in aëre, sed obscuris admodum vestigiis, & quæ negotium Geometræ haud exiguum facessunt.*

Esto iam d b i hyperbola primaria (ita voco eam cuius axes sunt inter se æquales) comprehensa asymptotis c a, a n angulum rectum c a n constituentibus, vt ex Elementis conicis constat; eius semiaxis transuersus sit b a; intelligatur curua f t b h ita genita ex hyperbolica i b d, vt quæcunque i g vel h e ad rectam r c parallela ducatur, occurrens hyperbolæ perimetro in i vel d; recta f g, vel e h sit æqualis arcui i b, vel b d: compleatur parallelogrammum a c b n, quod ex iisdem Elementis ostenditur esse quadratum; ex a b secetur a q æqualis lateri a c, & per q agatur q z perpendicularis ad q a; per n agatur n z parallela rectæ q a, & compleatur parallelogrammum z q a m. Descripta sit z o hyperbola primaria semiaxe transuerso z m, centro m; intelligatur alia hyperbola primaria u a l cuius centrum q, semiaxis transuersus q a: ducta sit qualibet r i parallela asymptoto a n, occurrens alteri asymptoto in r; hyperbolæ b in i: per i ductæ sint i u, i o parallelæ ad rectas b a, a m, occurrentes hyperbolis l a u, n o in u, o; rectis q z, m z in s, x; ducta quoque sit per i recta f i g parallela rectæ c r, occurrens curuæ b t f in f; compleatur parallelogrammum g f y c. Aio quoties inter puncta r, a iacet punctum c, figuram hyperbolicam s u a q (eam appello externè cauam*) imminutam hyperbolica altera* internè caua *z o x esse æqualem figuræ y f t b c comprehensæ sub curua f b, & sub rectis f y, y c, c b. Quod si puncta y, f iacuerint ad rectæ c b partes oppositas, aio vtrumque simul segmentum fore æquale figuræ y f t b c. Hinc infero cuneatam vel vngularem superficiem definitam in decima sexta quinti libri sequentis, insistentem super curua i b, & abscissam plano per c a rectam ducto, inclinatóque ad planum r c b gradibus 45. esse notam, data quadratura hyperbolæ, vt pote æqualem figuræ y f t b c. Vnde præterea elicio si recta i o ponatur occurrere curuæ b d in d, superficiem vngularem insistentem super curua i b d esse æqualem duplo hyperbolicæ figuræ f q a u comprehensæ sub rectis a q, q s, s u, & sub arcu hyperbolico u a. Ex ista autem vngulari superficie præfacile est dar*

superficiem periphericam quam linea hyperbolica d b i describit dum circa rectam b c manentem rotatur; methodus enim illius traditur in quinquagesima secunda quinti libri, ex demonstratis in corollario secundo decimæ nonæ. Superficiem autem similem pro superficie parabolæ rotatæ circa axem vel basim inuenit Clariss. Fermatius, eiusque nos methodum exhibemus in parte prima Appendicis secundæ: vt iam non solùm cognita sit superficies plana æqualis sphæricæ genitæ ex rotatione circuli, quæ ab Archimede primùm fuit demonstrata; & superficies conoides respondens rotationi parabolæ, quam debemus V. C. Fermatio: sed superficies etiam illa, quæ hyperbolæ, modo iam præscripto rotatæ competit, estque inuentionis nostræ. Quòd si eadem hyperbola primaria intelligatur duci circa axem transuersum a b, vel rectum a m, huic quoque conoidicæ superficiei æqualem figuram planam exhibet methodus nostra; per illam enim vngularis superficies primaria (sic appello eam quæ abscinditur plano super basi inclinato gradibus 45.) resecta plano per axem transuersum ducto est æqualis planæ figuræ quæ super eodem transuerso insistit, & cuius dimetientes ad positionem recti semiaxis sunt æquales semidiametris eductis à puncto hyperbolæ in quo figuræ ita insistentis dimetientes illæ (sic vocare soleo parallelas rectas vni certæ datæ, vt in isto casu parallelas alteri axi) secant ipsam hyperbolam. Ita quoque vngularis superficies primaria resecta plano per axem rectum ducto est æqualis planæ figuræ, quæ super eodem axe recto insistit, & cuius dimetientes ad positionem axis transuersi sunt æquales semidiametris pari pacto eductis ex puncto hyperbolæ. Hoc idem theorema habet locum in vngulari superficie (primariam semper intelligimus, nisi aliud innuamus) ad circulum attinente; ideóque cùm semidiametri omnes sint inter se æquales, eiusmodi plana figura est parallelogrammum rectangulum altitudinis æquantis semidiametrum circuli. Cæterùm istæ planæ figuræ insistentes tam super axe transuerso quàm super recto hyperbolæ primariæ, ad figuras a q s u, z o x supra descriptas pro gyratione hyperbolæ primariæ i b d circa rectam c b, se habent vt diameter quadrati ad latus eiusdem: dimetientes enim figuratum a q s u, z o x, parallelæ axibus b a, a m, repræsentant rectas quæ ad figurarum ita insistentium dimetientes, hoc est ad semidiametros hyperbolæ d b i, se habent vt latus quadrati ad diametrum eiusdem. Nec mihi tam abstrusum fuit inuenire illas figuras esse hyperbolicas, quàm esse æquales vngulari superficiei; sunt enim duo ista, valde diuersa: vnde licet methodus inueniendi has figuras esset vitiosa, prius tamen theorema adhuc staret. Gregorius à S. Vincentio in prop. 230. de Hyperb. inuenit quidem figuram

*ex semidiametris hyperbolæ compactam illam quæ insistit super axe recto; non video tamen vbi repererit eam quæ insistit super transuerso. Porro inuentionem nostram non effugit vngularis superficies, quæ spectat ad quamlibet ellipsim & hyperbolam secundariam, cuius videlicet axes non sunt inter se æquales, per quemcunque axium agatur planum resecans illam superficiem: eiusmodi enim plana figura insistens super axe illo, habet dimetientes quæ vt quadratum axis, per quem non ducitur planum illud resecans, est ad quadratum alterius axis, ita se habeant ad rectam puncto tactûs perpendiculariter erectam super tangente, & interceptam inter tactum atque illum axem per quem non agitur planum resecans. Illæ verò figuræ planæ insistentes super axe per quem agitur planum inueniuntur atque demonstrantur nostra methodo: & quidem quando planum resecans agitur per axem maiorem ellipseos, figura est portio semiellipseos concentricæ, cuius semiaxes noti sunt: quando verò agitur per minorem est portio externè caua semihyperbolæ, cuius semiaxes noti sunt. Quod si planum illud, quod resecans non semel hîc appellauimus, agatur, per axem hyperbolæ secundariæ rectum, figura erit hyperbolica internè caua; si per axem transuersum, externè caua, eiusque vterque axis fiet notus. Atque vt rem in uno ellipseos casu tradam: si datæ ellipseos axis maior fuerit duplus minoris, & planum resecans agatur per maiorem, figura plana insistens erit semiellipsis concentrica, cuius semiaxis vnus est idem cum semiaxe minore datæ ellipseos, & ad alterum semiaxem concentricæ coniugatum est potestate vt 3. ad 16. nisi calculus me decipit: si autem planum resecans ducatur per datæ eiusdem ellipseos axem minorem, figura plana insistens erit semihyperbola externè caua concentrica ellipsi datæ; habens tranversum semiaxem eundem cum semiaxe maiore ellipseos datæ, iste verò semiaxis erit ad semiaxem eiusdem concentricæ rectum potestate vt 15. ad 1. saluâ semper logistices correctione. Hoc ipsum in hyperbolæ secundariæ vno certo casu definire supersedeo; cùm is qui methodum calculi pro ellipsi iam scriptam perceperit, & demonstrarit, non possit dubitare quin extendatur ad hyperbolam. Habes igitur hîc (*Lector*) occasione sumptà ex illo Theoremate* de figura inclinata super curua, *planam figuram æqualam superficiei vngulari pro sectionibus omnibus conicis, ac proinde & inde obtines æqualem superficiei sphæroidi ex ellipsi; & conoidi ex qualibet alia sectione conica genitæ. In libri quinti præfatione scripsi incognitam mihi esse figuram rectilineam quæ in ellipsi sit præscripto illo modo æqualis superficiei vngulari, sicuti cognita est æqualis vngulari superficiei in circulo; quod ipsum etiam nunc profiteor; id tamen*

nihil obſtat quo minus data circuli & hyperbolæ quadratura, rectilineum illi æquale demonſtremus; vt & cuneos ſolidos ſiue vngulas, & earum etiam ſuperficies in omni ſectione conica notas faciat noſtra Geometria, & ita in ipſo Operis veſtibulo prouecta vltra veterum terminos appareat. Nullum autem ex Recentiorum Geometrarum libris adhuc legi, qui doceat inuentionem ſuperficierum ſphæroïdeon pro ellipſibus, & conoideon pro hyperbolis tam primaria quàm ſecundaria. Notandum verò eſt ſuperficies iſtas planas ita reſpondere ſuperficiebus vngularibus curuis, vt ſint illis æquales συνόλως καὶ μερικῶς, integrè & particulatim, *quem modum æqualitatis explico in quarta propoſitione ſexti libri, vbi figuram iſtam planam & curuam voco* coniugatas.

Porrò quid in ſingulis libris potiſsimum ſcripſerimus, propoſitiones vltimæ ſingulorum librorum docent; ſecundi tamen argumentum in ſola eius fronte extat: quòd verò Cyclocylindricam ibi tractatam Autor Recreationum Mathematicarum, *eſſe ellipſim aſſerit, omnino fallitur. Veterum more in illis demonſtrata de linearum curuarum quadratricibus; de grauium deſcendentium acceleratione; de curuæ cuiuſlibet æqualitate cum recta; de locis aſymptoticis, eorumque grauitatis centro; de proprietatibus libræ curuæ; de Cyclocylindricis figuris; de ſpectantibus ad ſolutionem problematum illorum toti Europæ propoſitorum, & alia eiuſmodi, quæ tibi in iſto opere noſtro occurrent, Lector Beneuole, ſi hallucinationis vitio caruerint, fortaſſe vitabimus Horatianum illud quod cum iſtos commentarios de Cycloide vel de* Rotatricula *(ita enim illam à* Rota, *vocant Scriptores Gallici) ſcriberemus, nobis ipſi vitandum proponebamus,*

Amphora cœpit
Inſtitui: currente *Rota* cur vrceus exit?

Quoniam vero Geometras omnes eſſe curioſos ſcio; curioſitatiſque morbum hunc eſſe, vt fame ſuos ſtimulet acuta, vnde fiat vt res vorentur integræ, nec ſatis aptè præparentur menti alendæ: hoc vnum à te flagito, Lector, vt famem iſtam compeſcas, & nolis eſſe (quod de ſe Tullius alicubi fatetur) ὀξύπεινος *in curioſitate: Geometrica enim huius generis, vt proſint, incidi, & mentis ſtomacho apparari debent; ita enim meliùs & vtiliùs concoquentur. Quod autem in Appendice ſecunda, & in iſta quoque iam Præfatione aliquot inuenta propono, eorum demonſtratione ſuppreſſa, id more Veterum auſim facere, non quo vllum cogere ad aſſenſum velim, ſed vt res non vulgares, aliјs quibus libuerit & vacauerit, mihique etiam ipſi aliàs fortaſſe examinandas hic conſignem. Conon ille, quem Archimedes*

eximiè laudat in Præfatione ad libros Spiralium, cùm multa à se inuenta summis tunc Geometris sine demonstratione proposuisset, quædam in ijs complexus est, quæ falsa erant, vt narrat ipse Archimedes, nec propterea quicquam de tanti viri existimatione detrahit, cùm reliqua rara admodum inuestigationis essent, & ante illud inaccessa tempus. Dum autem propositiones illas affirmo esse non vulgares, nolim negare quin vulgares effici queant; sicuti & Antiquorum inuenta iamdiu vulgaria esse cœperunt; ipsæque aues & plantæ quæ non raræ solùm, sed necdum visæ fuerant, postquam ex detectis nuper vltimi Orbis regionibus ad nos delatæ semel fuerunt, ita communes nunc euaserunt, vt in auiarijs & hortis passim visantur. Te etiam, perhumane Lector, non ita morosum esse vnquam autumem, vt de libro aliquo inuentis Geometriæ nouis referto actum esse pronunties, si vnum quid vel leue in eo non rectè se habere deprehensum fuerit. Ego de libro non secus ac de segete existimare solitus semper fui: illa siquidem apud me seges nullius est pretij, vbi

Infœlix lolium, & steriles dominantur auenæ:

Ea verò mihi non desinit esse summi pretij, quæ latissimo flauescit in campo, quamuis non euidens lolij culmus vnus aut alter in densa illius & diuite sylua delitescere compertus fuerit. Licet Cononis propositiones illæ non omnes veræ fuerint; quia tamen maximam partem veræ, sublimes, & inexpectatæ fuerunt; ἐπὶ τὸ πλεῖον προάγαγε γεωμετρίαν, longè promouit Geometriam *Archimede ipso teste: cuius verba referre libuit, vt* promouendæ Geometriæ *studium esse perantiquam ostendamus; sæpiusque accidere quod idem testatur, vt problemata quæ initio credebantur intractabilia, lapsu temporis mansuefieri posse comprobentur.*

Miraberis fortasse (Lector) cur in ista præfatione nihil dum dixerim de iis quæ attinent ad Historiam problematum de Cycloide per totam Europam à D. Dettonvillæo sparsorum: causa huius silentii est, quod ea suis locis narrentur, meliusque ibi ex subiecta materia percipiantur. Vide sis libri primi propositionem 19. *libri secundi prop.* 10. *libri tertii prop.* 25. *libri quarti prop.* 36. *libri quinti prop.* 23. *libri sexti decimam septimam, & alias isti anteriores, præsertim duodecimam. Quid verò de quadratura circuli inuentione mihi ipse vindicem inspice, si lubet, in pag.* 127. 235. 241. 404. *Quantum autem calculo meo tribuam explico in pag.* 83. 125. 133. 180. 234.

ADDENDA.

AD pag. 46. *sub finem libri secundi*. Quamuis ea quæ ad paginam 258. mox addituri sumus, euincant Dettonuillæum hallucinatum in vno esse super quo fundat demonstrationem dimensionis curuarum Cycloïdicarum tam productarum quàm contractarum; istud tamen quod hic ex illo retulimus verissimum est, nec nititur illo.

Ad pag. 142. *ante propos.* 3. Si analogia illa admittatur habere locum in isto casu, hinc liquet confirmari vnum, quod in aliis plurimis experti sumus, solutionem nempe problematis alicuius vnâ viâ haud quaquam esse aliquando difficilem; aliâ verò esse plurimùm: nam nostra hæc solutio facilis statim apparet; at verò Roberuallio licet Doctissimo, mirum quantum difficilis visa aliàs fuit, vt narrat ipse Dettonuillæus in eadem Epistola ad D. de Sluze. Quod autem hoc loco fatemur laborare nos in inuenienda differentia inter D.D. Pascalium & Dettonuillæum, eundem in nobis hærere scrupulum leges pag. 169.

Ad pag. 151. *sub finem Corollarij* 2. In ista Dettonuillæi demonstratione desiderauit aliquid Nobilissimus Geometra, & quidem meritò; id verò primus, quem sciam, suppleuit noster M. P. E. A. S. Sed totus calamo adscribatur iste lapsus; sicuti & illa dictorum non cohærentia quæ à nobis adnotatur pag. 127. Coroll. 3. quis enim calamo diutius properante, nunquam dormitet?

Ad pag. 235. *ante propos.* 12. R. P. Mersennus iam ab anno 1644. præfat. in Synopsim fecit Lectori spem editionis plurimorum Magni cuiusdam Geometræ inuentorum, *quibus*, inquit, *fortè breui quadratura circuli & hyperbolæ accedet*. Quis istud iactantiæ vlli vertat, quod Mersenno Magnus ille de se moderatis dixerit verbis? Aut quis inde, si quis fortè alius eam nunc promeret, laudem inuenti propositi idcirco minuendam censeret, quod Insignis ille Geometra ante annos sexdecim innuisset à se repertam illam quadraturam?

Ad pag. 258. *ante Coroll.* 1 Iure optimo expectatur alia Dettonuillæi demonstratio, nam ea quam dat, peruersa ratiocinatione statuit vnum veluti basim totius demonstrationis, quod falsum esse iam iam monstrabitur: illud verò est (Fig. LII. tab. 4.) subtensam b e esse ad arcum e o, vt est recta h m ad m g: constructio autem iubet c d f semicirculum centro g descriptum, esse genitorem magnæ Semicycloideos c e a f cuiuscunque speciei, eiusque basim a f ad peripheriam f d c semicirculi esse vt est data recta h g ad radium g f, ita vt puncta h, f, g sint in eadem rectâ: ponit præterea basi f a æquidistare rectam m b; sumptum esse quodcunque punctum e in arcu cycloidico b e; iunctas esse rectas g m, b e, m h; arcum e o esse arcui d m similem, æqualem & similiter positum. Ego verò contendo subtensam b e non esse necessariò ad arcum e o, vt est recta h m ad m g. Esto g f ad g h potestate vt vnitas ad binarium, & arcus d m, m f sint æquales, singulique quadrans peripheriæ c d m f. In hoc casu ex Euclideis Elementis patet rectam m h tangere circulum in m; rectas m g, m h esse æquales; & si h m producatur ad l, angulum l m o esse semirectum. Igitur si per o agatur o n tangens circulum e o in o, angulus n o b erit semirectus, vt pote æqualis angulo l m o; & si ex b in rectam n o demittatur perpendicularis b i, angulus i o b erit æqualis angulo m g h, & triangulum b o i simile triangulo h g m: ergo vt h m latus ad m g, ita b i latus ad i o, & vt h g latus ad g m, ita b o latus ad i o: sed vt h g latus ad g m, ita ex Dettonuillæo & ex rei veritate, est recta b o ad arcum e o; ergo vt b o recta ad i o rectam, ita est eadem b o ad arcum e o: ergo arcus e o est æqualis rectæ i o. Rursus quoniam ex Dettonuillæo vt h m recta ad radium m g, ita subtensa b e ad arcum e o, & ita quoque monstrauimus esse rectam b i ad i o vel ad e o ipsi (vt iam ostendimus) æqualem; rectæ b i, b e habentes eandem rationem ad æquales i o, e o erunt inter se æquales; ergo cùm b i, b e sint æquales, peripheria circuli centro b descripti interuallo rectæ b i transibit per e, quod est absurdum. Nam cùm angulus b i o sit ex constructione rectus, recta i o tanget circulum centri b,: sed


BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE


BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE


ROMA

tangit etiam circulum e o; ergo cùm isti circuli sint ad partes oppositas eiusdem tangentis o n, non sibi occurrent, ergo punctum e non est in peripheria circuli centro b descripti, ac proinde rectæ b i, b e non sunt æquales. Non igitur b e est ad arcum e o, vt recta h m, ad m g, quod erat demonstrandum. Innumeri sunt alij casus in quibus demonstrari pariter possit lemmatis illius falsitas.

Cæterùm quod idem Autor ait angulum mixtilineum b o e comprehensum sub recta b o & sub curua o e esse æqualem angulo rectilineo h g m, id propterea, vt puto, affirmat, quia dempto angulo contactus i o e, residuus b o i est æqualis angulo h g m: angulus autem contactus neque auget propriè, neque minuit angulum rectilineum, qui rectilineus est. At duorum istorum triangulorum h m g, b e o omnia latera esse proportionalia, inde inferre non licet, vt monstratum geometricè iam est. Moneo iterum à me non aliud affirmari quàm demonstrationem Dettonuillæi niti lemmate falso, ipsum verò theorema quod probandum suscepit, esse verissimum quando puncta h & f sunt vnum & idem, aliunde scio: at quando sunt diuersa, id perinde compertum non habeo: falsum profectò est, si ad hoc vt falsum non sit, lemma eiusmodi oporteat esse verum.

Ad pag. 403. ante numerum XI. Ἀδυναμίαν commutandi lineam curuam in rectam ipsi æqualem inter Recentiores asseruisse mihi primus videtur magni nominis Geometra Franciscus Vieta *Varior. de reb. geometr. resp. lib. 8. c. 1.* hoc disticho.

Qui verò exercet numeros, malè collocat horas,
Si rectum curuo conciliare studet.

Sed horas non malè collocauit subtilissimus Vvren, cum cycloidicam curuam ostendit esse quadruplam axis. Alter mihi esse videtur Cartesius primariæ notæ Geometra, pag. 340. geometriæ gallicè editæ Lugduni Batauorum an. 1637. cuius hæc sunt verba lib. 2. *proportio quæ est inter rectas & curuas lineas cognita non est, sed neque, vt equidem reor, cognosci humano ingenio potest.* Postremus tandem Leodiensis Geometra insignis, vbi vidit cycloidicæ lineæ proportionem cum recta repertam esse, restrinxit assertionem ad genus ὀρθώσεως difficillimum, affirmando id quod Dettonuillæus approbat, & quod M.P.E.A.S. Geometricè refellit: ex qua methodo difficile non erit inuenire curuam quæ ad axem suum se habeat etiam vt numerus ad numerum: nam in fig 4. *Dissertationis illius*, si vt est cubus applicatæ m n ad cubum applicatæ cuiuslibet f i, ita sit quadratum axis a n ad quadratum portionis a f; & longitudo a n ponatur 27. n m 54. curua m i a inuenietur 61.

De cætero memineris, Lector, quorum nudam absque demonstratione propositionem damus, eorum nihil à nobis pro indubitatè vero tradi; sed singula maturiùs examinanda relinqui.

Errata sic corrige.

P*ag. 165. sub finem corollarij tertij, dele illa verba*, occurrens limbo o d y in puncto d &c. *pag.* 185. *lin.* 4 erit æquale. *pag.* 218. *lin.* 8. anno 1647. *pag.* 219. *lin.* 8. *ante finem* collocari debeat. *pag.* 240. *lin. penult.* eximiam. *pag* 341. *lin.* 13. Mathematicas disciplinas. *pag.* 293. *lin.* 10. in decima sexta. *pag.* 392. *lin.* 16. figura 108. omnes. *ibidem lin.* 18. figura 109. omnes. *pag.* 393. *lin.* 3. parabolicæ a c. *ibidem lin* 9. methodum figuræ 07. generatis. *ibidem lin.* 15. axi a b. *ibidem lin.* 16. latus r u. *pag.* 394. *lin.* 22. denominator. *pag.* 399. *lin. antepenult.* asymptotus sit c p perpendicularis ad diametrum b d, & ex puncto. *Nonnulla alia corrigenda scripsimus in extrema pagina* 404. *In figura* 40 *litera m est bis sculpta; quod monemus vt lector hac cautione errorem vitet; nam adiuncta facilè indicabunt vtra illarum appelletur.*

FACVLTAS R. P. PROVINCIALIS Societatis IESV.

EGo FRANCISCVS TARBE Prouincialis Prouinciæ Tolosanæ Societatis IESV, iuxta priuilegium eidem Societati à Christianissimis Regibus Henrico III. 10. Maij 1583. Henrico IV. 20. Decemb. 1606. Ludouico XIII. 14. Feb. 1611. & Ludouico XIV. nunc regnante 23. Decemb. 1650. quo Bibliopolis omnibus vetitum est ne Libros à Societatis nostræ hominibus compositos, absque Superiorum eius permissu imprimant, Permitto ARNALDO COLOMERIO Bibliopolæ, vt ad decem proximè annos Librum qui inscribitur *Veterum Geometria promota in septem de Cycloide Libris, & in duabus adiunctis Appendicibus, Autore P. ANTONIO LALOVERA Societatis IESV*, recuisum probatúmque, imprimere ac diuendere possit. Datum Tolosæ 25. Decembris 1659.

FRANCISCVS TARBE.

DE

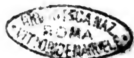


DE CYCLOIDE
LIBER PRIMVS.

In quo, positâ quadraturâ circuli, inuenitur quadratura *cuiuslibet portionis in cycloide designata,* & cubatura *solidi circa quamlibet basi parallelam geniti.*

Amplissimo Domino De FERMAT, in Suprema Curia Tolosana Senatori integerrimo.

D*ECEM nunc dies sunt* (SENATOR INTEGERRIME) *cum primùm legi à Te mihi oblatam nobilissimi & doctissimi Anonymi typis editam Epistolam, qua à* præstantissimis toto Orbe Geometris postulat solutionem quarundam propositionum circa cycloidem eiusque centra grauitatis. *Ego licet, meæ tenuitatis mihi probè conscius, norim quàm longo post magnos illos viros interuallo in Geometrarum qualiumcumque numero locum teneam; quia tamen quid de quæsitis illis in mentem mihi veniret promere à Te tunc iussus sum, malui temeritatis quàm obsequij Tibi non promptè præstiti nomine accusari. En igitur quas circa problemata eiusmodi meditatus sum viginti omnino propositiones. Tu quem omnes Europæ Mathematici meritò suspiciunt, si quid perperam scriptum sit, aut si quid scriptis desit,*



emenda vel ſupple, modo tamen iudiciorum publicorum occupationes quibus longè vtilius diſtineris, id patiantur. Hac emendatione vel etiam ſupplemento fidens noſter hic libellus prodibit in vulgus intrepidè; quapropter Te huius ſpei plenus adit, ab eo nempe miſſus qui plurimis nominibus tamdiu Tibi eſt.

Toloſano in Collegio xii. Kal. Aug. 1658.

Addictus ex animo ſeruus ANTONIVS LALOVERA Societatis IESV.

PROPOSITIO PRIMA.

SIt c e f o (*Fig.* 1.) circulus centro g deſcriptus, quem in f tangat recta f a, æqualis dimidio totius peripheriæ c e f o; per f ducta ſit diameter f c, completoque parallelogrammo a f c x intelligatur circulus ita moueri in plano a f c x, vt puncta c, f peripheriæ circularis ſemper iaceant in rectis c x, f a, rectáque c f æquidiſtet lateri a x, motus verò ſit æqualis vniúſque ſemper velocitatis. Intelligatur in puncto c aliud punctum A quod per arcum c e f moueatur pari & æquè veloci motu, ita vt cùm ſimul incipiant ſimulque deſinant vterque motus punctorum c & A, iiſdem temporis interualis pares decurrant portiones linearum c x, c e f. Linea quam punctum A deſcripſerit ſit c z b a, cui alia ex aduerſo c q d reſpondeat pari methodo genita. Tota figura a b c q d vocatur *Cyclois* Torricellio; mihi appellabitur Cycloides ſicuti à Sphæra, & Cono Sphæroides, & Conoides dicuntur.

Oſtendendum eſt parallelam tangenti a f, interceptam inter arcus a z c, f e c eſſe aqualem peripheriæ c e f interceptæ inter ipſam parallelam & tangentem c x.

Sumpta ſit z p quæcunque parallela tangenti a f occurrens arcubus c z a, c e f in punctis z, p; dico rectam z p eſſe æqualem arcui p c. Recta z p producta occurrat diametro c f in y; ex z y rectâ abſcindatur z i æqualis rectæ p y, & per i ducatur recta h l complens parallelogrammum h l a x; per g ducatur g b parallela tangenti f a, occurrens rectæ h l in m, arcui c z a in b; iungantur rectæ z m, p g quando punctũ z non congruit puncto b. Quoniã triangula g y p, m i z habent latera g y, y p, m i, i z æqualia ſingula ſingulis, erunt quoque latera g p, m z æqualia, & anguli p g y, z m i æquales; ergo ſi centro m per h & l deſcribatur ſemicirculus, punctum z iacebit in eius peripheria, & arcus c p, h z erunt æquales:

ergo quando punctum A congruet puncto z, centrum circuli moti congruet centro m. Quoniam verò puncta A, c ponuntur æquali tempore percurrere lineas æquales, arcus h z vel c p erit æquals rectæ c h vel i y. Cùm igitur z i, p y ponantur æquales, additâ communi i p, erunt z p, i y æquales; sed i y est æqualis arcui c p; ergo z p est æqualis eidem arcui c p. Quòd si punctum z congruat puncto b, punctumque y centro g, tunc punctum p, congruet puncto e, eritque y p semidiameter, quare i z erit æqualis semidiametro, & cùm g, y sint idem punctum, nullum erit triangulum g i p, perinde tamen verum erit rectam p z esse in illo casu æqualem rectæ i y, hoc est arcui p c: ergo &c. quod erat ostendendum.

DEFINITIONES.

Rectam c f voco *axem* figuræ Cycloidis a c d; rectam a d *basim*; punctum c *verticem*; z y parallelam basi, *ordinatim applicatam ad axem*; z p ordinatim applicatarum z y, p y *differentiam applicatam ordinatim*. Figuram a z c p e f voco *ex differentiis genitam*; eiusque partem b z c e *superiorem*, a b e f *inferiorem*; sicut etiam rectam z p *differentiam superiorem*, r s *inferiorem*, b e *mediam*. c z a f voco *semicycloidem*; c z y eius *segmentum*, & a f eius *basim*; circulus c e f o vocetur *genitor*.

SCHOLIVM.

Cycloidis generationem eandem re ipsa tradidimus quam Torricellius, quamuis discrepare in aliquo videatur; maluimus enim per duorum lationem quam per vnius tantùm, huius genesim figuræ explicare, non solùm quia ita res planius procedere nobis visa est; sed quia etiam Archimedes spiralis lineæ generationem per motum rectæ & per puncti in illa recta lationem tradidit. Secluso itaque motu definiri potest Cycloides figura cuius omnes differentiæ ordinatim applicatæ æquales sunt arcubus interceptis inter ipsas & tangentem *c x*, singulæ singulis.

PROPOSITIO II.

Maneat (*Fig.* 2.) vt in superiore circulus c e f o genitor, & semicycloides c b a f cuius vertex c, axis c f, basis a f; intelligatur alia subcontraria semicycloides f q n c cuius vertex f, axis idem c f, basis c n: ducta sit quæcunque ordinatim applicata z y, quæ producta occurrat arcui f q n in r, & circuli peripheriæ in punctis p, s.

Ostendendum est duas simul differentias z p, s r esse æquales rectæ f a, vel c n, vel peripheriæ c p f.

Quoniam ex superiore differentia z p æqualis est arcui c p, & differentia s r arcui s f, vel p f, duæ simul differentiæ z p, s r erunt æquales toti peripheriæ c p f, cui æqualis ponitur ex constructione tota f a vel c n; ergo duæ z p, s r sunt simul æquales toti a f vel c n, vel toti curuæ c p f, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Et demonstratis apertè liquet duas simul figuras genitas ex differentiis z p, s r subcontrariarum semicycloideon esse ad positionem rectæ a f æquales condicta ratione parallelogrammo c f d n. Porrò figuras condicta ratione æquales ad positionem alicuius rectæ si planæ sint, vel alicuius plani si solidæ sint, eas appello quarum singulæ sectiones parallelæ illi ad cuius positionem diriguntur, sunt inter se æquales.

PROPOSITIO III.

Iisdem manentibus ostendendum est cycloidem esse triplam circuli genitoris.

Intelligantur ex punctis c, f excitari perpendiculares c t, f u, ad planum c f d, singulæ æquales semidiametro g f circuli genitoris, & compleatur parallelogrammum t c f u: intelligatur præterea ad positionem plani t c n generari solidum ex plano t c f u, & ex duabus figuris a b c e f, n q f o c genitis ex differentiis applicatis; hoc est vt alij loquuntur ex ductu parallelogrammi t c f u, in figuras duas a b c e f, n q f o c. Ex vndecima quarti libri nostri Tetragonismicorum elementorum constat ad positionem plani t c n æqualia condicta ratione esse duo simul solida basium z p, s r, solido baseos c n d f genito ex ductu eiusdem plani t c f u, & parallelogrammi c f d n, cùm sectionum altitudo sit eadem nempe y B vel c t, bases verò z p, s r sint simul æquales basi y A vel c n.

Præterea quoniam recta y B vel c t ponitur æqualis semidiametro c g genitoris circuli, & y A vel c n eius semiperipheriæ, ex prima Archimedis de circuli dimensione liquet rectangulum B y A esse æquale toti circulo c e f o genitori, hoc est bis semicirculo c e f, igitur solidum genitum ex parallelogrammo t c f u & ex duabus simul figuris differentiarum ordinatim applicatarum est condicta ratione æquale ad positionem plani u f d, cylindro cuius axis sit c f, bases autem sint circuli C t D, E u F centris c, f descripti, interuallo semidiametrorum c t, f u, vel eadem ratione condicta æquale est duplo semicylindri cuius bases sint semicirculi C t D c, E u F f.

Quoniam igitur figura c n r q o est æqualis figuræ e b a f H, solidum genitum ex ductu parallelogrammi t c f u & figuræ e b a f H erit æquale solido genito ex eodem parallelogrammo & ex figurâ c n r q o ad positionem plani u f d: ergo solidum genitum ex tota figura c b a f e & ex parallelogrammo t c f u est æquale duplo semicylindri altitudinis c g, baseos C t D c. Quoniam verò solidum genitum ex parallelogrammo t c f u & ex figura a b c e f habet eandem altitudinem c t, quam habet bis semicylindrus altitudinis c g, baseos C t D c; patet eorum vt pote æqualium bases esse æquales; ergo figura a z c e f est æqualis duplo baseos C t D c, hoc est duplo baseos c e f g; ergo additâ basi c e f g, tota a z c f est tripla semicirculi c e f: ergo cùm a z c f sit semicycloides, tota cycloides erit tripla circuli genitoris c e f o, quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Hæc est demonstratio quam sub finem secundæ appendicis adiecta ad quintum Tetragonismicorum nostrorum librum indicauimus; ex eius verò methodo demonstratur quoque sequens.

PROPOSITIO IV.

Iisdem manentibus ex c f abscissa sit f M æqualis rectæ c y, & per M ducta sit M G ordinatim applicata occurrens peripheriæ c e f in H. Ostendendum est duplum duarum simul figurarum c z p, H G a f esse ad duplum circuli genitoris c e f o vt est recta c y ad c g semidiametrum eiusdem circuli.

In præsenti propositione demonstratur vt in superiore solidum altitudinis y B vel c g, baseos c z p & simul c s r n vel f H G a esse æquale duplo semicylindri baseos C t D c vel c e f, altitudinis c y. Hoc autem posito quod superest facilè monstratur; nam bases æqualium cylindraceorum (ita voco solida quorum bases oppositæ sunt parallelæ quæ modo parallelepipeda, modo cylindri, modo innominata hactenus, qua de re egimus in vndecima quarti libri Tetragonismicorum elementorum) sunt inter se reciprocè vt altitudines; ergo vt altitudo c y ad c g, ita vicissim est basis composita ex z p c, G H f a ad bis semicirculum C t D c vel c e f duplum duarum figurarum c z p, H G a f; hoc est, quatuor totius cycloidis a z c L d portiones c z p, c L s, f H G a, f P N d sunt simul ad quatuor semicirculos c e f, vel ad duos circulos c e f o vt est recta c y ad semidiametrum c g, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Si recta c y foret maior rectâ c g demonstratio (vt patet) perinde cogeret, quamuis in schemate apposito non exprimatur iste casus. Patet etiam demonstrationem simili pacto procedere de duabus partibus z p c b, G H c b simul sumptis, hoc est de tota z p H G, si loco rectæ c y sumatur g y.

COROLLARIVM II.

Si duplici figuræ genitæ ex differentiis z c p, r s c n addatur segmentum circulare p c s componetur tota figura z c n r contenta sub rectis c n, z r & sub arcubus z c, r n. Vnde præterea liquet quoties segmenti p c s proportio ad circulum c f ignoratur, toties ignorari proportionem figuræ z c n r ad eundem circulum.

PROPOSITIO V.

Iisdem manentibus & iunctâ rectâ p g, ostendendum est differentiam z p ad differentiam s r se habere, vt se habet sector p g c ad sectorem p g f, & rectangulum sub rectâ y B vel c g & sub z p contentum esse æquale duplo sectoris p g c, itemque rectangulum eiusdem altitudinis y B, baseos s r esse æquale duplo sectoris p g f.

Quoniam enim rectæ z p, s r sunt per primam æquales arcubus c p, p f vel f s; arcus autem c p, p f sunt vt sectores c p g, p g f per 33. sexti Euclidis; ergo rectæ z p, s r sunt vt sectores p g c, p g f. Præterea quoniam vt in decursu tertiæ ostendimus rectangulum altitudinis y B, baseos compositæ ex rectis z p, s r est æquale duplo semicirculi c e f, erit vt patet æquale duplo sectoris p g c & duplo sectoris p g f; duplum autem illud erit ad duplum istud vt recta z p ad s r: ergo rectangulum altitudinis y B vel g c, baseos z p est æquale duplo sectoris p g c; rectangulúmque eiusdem altitudinis, baseos s r duplo sectoris p g f; ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

Sit (*Fig. 3.*) quadrati s r t a diameter r a bifariam in g secta, ipsumque diuisum sit in quatuor quadrata per rectas c f, h b parallelas lateribus r s, s a. Per h, b ductæ sint q c, f e æquidistantes diametro r a, & complentes parallelogramma c a r q, e f r a, c q f e. Recta r a sit axis cylindri scaleni, cuius basis sit circulus centro a, semidiametro c a descriptus in plano d a c recto ad planum c g b, sitque d a perpendicularis ad rectam c e; in plano r a d æquidistet recta g u rectæ d a, & superficiei cylindri occurrat in u: plani f g u sectio cum superficie cylindri sit c o u f: ex centro g per c, f in plano c a b descriptus sit semicirculus c b f.

Ostendendum est c u f sectionem cylindri cum plano f g u congruere peripheriæ circuli f b c, si planum f b c intelligatur circumuolui circa axem f c quousque congruat plano f g u & stet rectum ad planum c g h.

Quoniam cylindrus semibaseos c d e secatur plano c q f e per axem r a ducto quod est ad rectos angulos basi c d e, secatur autem & altero plano f g u recto ad parallelogrammum c q f e per axem, cuius plani sectio c f continet cum f e latere parallelogrammi per axem, angulum c f e æqualem angulo c e f; angulum autem f c q cum altero latere c q facit æqualem angulo f q c, ex sexta libri primi apud Serenum constat sectionem f u c esse semicirculum; ergo semidiametri f g, g u sunt æquales; igitur si planum f g c circumuoluatur circa axem f c manentem donec rectum sit ad planum c g b, semidiameter b g congruet semidiametro g u, totusque semicirculus f b c toti semicirculo f u c, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

Iisdem manentibus in recta g a inter g & a sumatur quoduis punctum m, & per illud ducta sit recta i n parallela lateri q f parallelogrammi q c e f per axem, occurrens lateribus q c, f e in i, n; periphe-

riæ c b f in p; rectæ c f in l: per l ducatur l o ordinatim applicata ad f c diametrum semicirculi f u c; superficiei cylindri planique i l o communis sectio sit i o n; iungantur rectæ m o, g p.

Ostendendum est i o n esse peripheriam semicirculi centro m descripti, & sectores i m o, o m n esse æquales sectoribus c g p, p g f singulos singulis.

Quoniam planum n m o est parallelum basi c d e cylindri, eius sectio i o n cum semicylindro erit semicirculus per quintam primi libri Sereni: ergo semidiameter m o est æqualis semidiametro m n vel g b vel g p. Quoniam igitur trianguli g l m latera g l, l m sunt inter se æqualia, sicuti trianguli g c a latera g c, c a ponuntur æqualia, triangulum rectangulum g l p erit æquilaterum & æquiangulum triangulo rectangulo m l o, cùm habeant latus circa angulum rectum æquale, & rectas quæ angulum rectum subtendunt æquales: ergo angulus o m l est æqualis angulo p g l: ergo cùm semicirculi sint æquales, sector o m i est æqualis sectori c g p, & sector o m n sectori p g f, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Iisdem manentibus portio semicylindri intercepta inter plana h g u, c d a cuius sectio basi c d e parallela est sector minor o m i, est condicta ratione ad positionem eandem æqualis dimidio cunei primi intercepti ad partes lateris q c inter cylindri basim semicircularem h u b & planum transuersum f g u occurrens lateri q c in c; insuper verò dimidio solidi geniti ad positionem plani h g u ex quadrante circulari g u o c, & ex triangulo g c a ad positionem plani u h g.

Quoniam per semibaseos h u b semidiametrum g u coniugatam semidiametro h g ducitur planum c g u transuersum occurrens lateri h c parallelogrammi h c e b per axem g a, portio cylindri intra angulum h g c comprehensa, erit cuneus ille notus cuius definitionem & quadraturam tradimus in vigesima sexta quarti elementorum nostrorum, & quem primum appellauimus in vndecimâ quinti. Præterea quoniam solidi geniti ad positionem plani u h g ex triangulo c g a, & ex quadrante circulari g u o c, sectio parallela plano h g u est ex vigesimâ primâ quarti libri elementorum Tetragonismicorum rectangulum comprehensum sub lateribus o l, l m, triangulum verò o l m est dimidium eiusmodi rectanguli; ergo cùm ita se habeat res in omnibus aliis sectionibus, patet ex vndecimâ quarti Tetragonismicorum solidum cuius sectio est triangulum m l o esse condicta ratione dimidium solidi cuneati geniti ad positionem plani h g u ex triangulo g c a & ex quadrante circulari g u o c. Cùm igitur sector o m i constet duabus partibus o l i, o l m, & illa sit sectio dimidij cunei primi iam descripti, ista sit semisectio solidi cuneati pariter descripti, patet quod erat demonstrandum.

DEFINITIONES.

Solidum cuius ſectio, o l i, vocetur *genitum ex prima parte ſectoris*; ſolidum verò cuius ſectio eſt triangulum o l m *dicatur genitum ex ſecunda parte ſectoris*.

PROPOSITIO IX.

SIt (*Fig.* 4.) u x diameter circuli centro g deſcripti in plano u g h; ad diametrum u x perpendiculariter cadat diameter h y, vt h u y ſit ſemicirculus ſectus in duos quadrantes per ſemidiametrum g u; intelligatur planum h g c, ſecans ſemicylindrum baſeos h u y, vt portio ſemicylindri intercepta planis u g h, c g h ſit cuneus notus definitus in vigeſima ſexta quarti Tetragoniſmicorum.

Oſtendendum eſt totum cuneum u g c, eſſe æqualem parallelepipedo altitudinis g a, vel u c, baſeos æquantis duos trientes quadrati g u. Item ſi ſecetur plano quouis f n i, ad planum h g a parallelo, ſecari in duas portiones quibus parallelepipeda eiuſdem altitudinis u c æqualia habent baſim noto rectilineo æqualem. Denique ſi ſecentur quouis ad baſim u h g parallelo plano l i p diuidi in duas partes quarum quæ inter plana l i p, u h g iacet, eſt æqualis cylindraceo altitudinis u c, baſeos compoſitæ ex rectilineo noto & ex curuilinea figura quæ vt eſt recta l u ad u c ita ſit ad ſegmentum o u f ſubtenſum ordinatim applicata f o ductâ per n in quod incidit recta i n parallela rectæ u c.

Cuneum totum u c g (ita illum deſigno breuitatis causâ vt in Scholio quintæ quinti libri monui) eſſe æqualem parallelepipedo altitudinis u c, baſeos æquantis beſſem quadrati u g patet ex Corollario vigeſimæ ſextæ quarti Tetragoniſmicorum: portionem verò n i g, eſſe æqualem parallelepipedo altitudinis u c, baſeos æquantis rectilineum notum, conſtat ex eadem vigeſima ſexta. Denique quoniam planum l i p æquidiſtat baſi h u y, portio u l i g cunei conſtabit cylindro u l i n, & parte i n g cuneatâ quam modò quadrauimus: atqui ſi cylindrus altitudinis u l baſeos u f n o, conuertatur in cylindrum æqualem altitudinis u c, baſis iſtius eſt reciprocè ad baſim illius vt eſt recta l u ad u c: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Duplex appoſuimus ſchema, in primo axis eſt perpendicularis ad planum baſeos u b h y, in altero cadit obliquè, conſtituitque cylindrum ſcalenum; ſed modo baſes h u y ſint vtrobique eædem, & eadem ſit diſtantia baſium oppoſitarum in recto & ſcaleno, eſt quoque æqualitas eadem partium, vt in ſcholio vndecimæ quinti Tetragoniſmicorum annotatum extat.

COROLLA-

COROLLARIVM II.

Ex præsenti & ex definitionibus superioris liquet cùm solidum genitum ex prima parte sectoris sit vel semicuneus totus altitudinis u c g, vel eius portio abscissa ad positionem baseos u b h g; eiusmodi solidum esse æquale in primo casu parallelepipedo altitudinis c u, baseos æquantis trientem quadrati g u. In secundo verò casu esse æquale cuneo u c i n per præsentem propositionem noto, sed dempto cylindro altitudinis l u baseos u f n, vel altitudinis u c, baseos quæ sit ad u f n sicut est recta u l ad u c.

PROPOSITIO X.

SIt (*Fig.* 5.) x u diameter circuli, cui incidat ad rectos angulos semidiameter g h, ita vt h f u g sit quadrans circularis: super plano h u g insistat perpendicularis g a, æqualis semidiametro u g, & ex centro g interuallo g u descriptus sit in plano u g a quadrans circularis u s a g; librâ u x suspensâ ex g perpendiculo g a, brachio g x intelligatur generari quadratix g r u, respondens quadranti u s a g, ita vt sicut g x brachium ad quamcunque longitudinem g n, ita n s ordinatim applicata sit ad n r interceptam rectâ g u, & quadratrice g r u; ducatur recta g c, & ad positionem plani h g a intelligatur ex triangulo u g c & ex quadrante u f h g generari cuneatum solidum cuius dimidium in definitionibus octauæ diximus esse solidum genitum ex secunda parte sectoris.

Ostendendum est ad positionem plani h g a cylindraceum altitudinis g a, baseos u r g n esse condicta ratione æquale cuneato illi, & quando totum sumitur, basim g r u n esse trientem quadrati g u, quando autem pars quælibet u r n vel n r g designatur, eam esse æqualem rectilineo noto.

Quadratricem quidem g r u esse trientem quadrati g u liquet ex decima octaua tertij tetragonismicorum; portionem verò eius quamlibet u r n, esse æqualem rectilineo noto patet ex decima septima eiusdem libri, vel ex secunda quinti. Quoniam verò vt x g recta ad n g vel ad n i ipsi æqualem, ita ex generatione quadratricis est n s ordinatim applicata vel n f ad n r, rectangulum p n r sub extremis g x vel p n & sub n r erit æquale rectangulo sub mediis n i, n f: ergo cylindraceum baseos g r u altitudinis h g ita se habet ad cuneatum baseos u f h g, altitudinis u g c, vt sectiones parallelas plano h g a habeant æquales; ergo per vndecimam quarti cuneatum & cylindraceum sunt æqualia ratione iam dictâ; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Cùm solidum genitum ex secunda parte sectoris sit dimidium cuneati

iam expositi vel totius vel ex parte sumpti ad positionem plani h g a, eiusmodi solidum quando totum sumitur patet esse æquale sextanti quadrati g u; quando autem pars tantùm sumitur, esse æquale rectilineo noto. Porrò illud cuneatum solidum est, vt patet, cuneus primus abscissus ex cylindro baseos u f h g, habens axem g a, estque longè diuersus à cylindro in quo est cuneus constituens solidum ex prima parte genitum, quod notari oportet ne fatigetur mens frustra quærens in vno eodemque cylindro vtrumque cuneum.

PROPOSITIO XI.

PORtio (*Fig.* 3.) integra semicylindri intercepta inter plana h g u, c d a, quæ pro sectione basi parallelá habet sectorem minorem o m i, est æqualis parallelepipedo altitudinis g b vel g c, baseos æquantis dimidium quadrati g c; quando verò sumitur eius pars ad positionem baseos c d a, est æqualis cylindraceo altitudinis g c, baseos mixtæ ex spatiis inuentis in nonâ & decimâ propositionibus.

Istud liquet ex demonstratis in nona & decima, ibi enim ostendimus primam solidi propositi partem integrè sumptam esse æqualem parallelepipedo altitudinis g c, baseos æquantis trientem vel duos sextantes quadrati g c; ostensum quoque est parti secundæ æquale esse parallelepipedum altitudinis eiusdem, baseos æquantis sextantem eiusdem quadrati: ergo istud solidum cuius sectio est minor sector, æquale est in primo casu parallelepipedo altitudinis g c, baseos æquantis dimidium quadrati g c.

Quando verò non sumitur tota portio, cùm partes eius demonstratæ sint æquales, prima quidem cylindraceo altitudinis g c, & baseos mitæ ex rectilineo noto, atque ex certa quadrantis circularis g u o c parte: secunda verò parallelepipedo eiusdem altitudinis & baseos notæ, patet quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

FIgura (*Fig.* 2.) b z c p e ex differentiis genita est æqualis quadrato rectæ g c: figura autem z c y, quoties punctum y sumitur inter c & f, & non congruit centro g, est mixta ex rectilineo noto & ex parte in circulo c f legitimè designatâ.

Quoniam ex quinta rectangulum sub recta y B & sub z p est æquale duplo sectoris p g c, cylindraceum altitudinis y B vel g c, baseos a b c e f erit condicta ratione ad positionem plani ç c n æquale duplo solidi cuius sectio sit sector p g c, vt ex vndecima quarti tetragonismicorum patet: sed in portione b z c e istud solidum per superiorem est parallelepipedum altitudinis g c, baseos æquantis dimidium quadrati g c; ergo duplum illius solidi est parallelepipedum altitudinis g c, baseos æquantis quadratum g c.

In aliis verò casibus punctum y cadat primò inter puncta c, g; ergo ex

ſuperiore liquet adhibitâ methodo primi casûs nunc tractati, figuram z c y eſſe mixtam ratione præſcriptâ. Secundò ſumpta ſit portio G b c M maior portione b c g, ac proinde cadat M inter f & g; ex g c abſcindatur g y æqualis rectæ g M, & ducatur ordinatim applicata z y: diuiſa igitur eſt portio G b c M in duas z c y, & z y M G, quarum illa habetur ex caſu modo expoſito, iſta verò ex quartâ propoſitione; ergo &c.

COROLLARIVM.

Ex vndecima quarti tetragoniſmicorum liquet cùm duo iſta ſolida ſint condicta ratione æqualia ad poſitionem plani t c n, ſpatia quæ ad poſitionem eandem æquiponderant vni, æquiponderare quoque alteri. Cùm autem cylindraceum altitudinis y B & cylindraceum altitudinis eiuſdem y B illi æquiponderans hoc habeant ex vigeſima quinta quarti tetragoniſmicorum, vt iiſdem poſitis baſes eorum ſibi mutuò æquiponderent, patet figuræ b z c p e ad poſitionem rectæ b g, æquiponderare baſim illius cylindracei æquiponderantis ad eandem poſitionem ſumptam.

SCHOLIVM.

Mirabile iſtud theorema quo figura b z c p e oſtenditur æqualis quadrato rectæ g c, debeo potiſſimum quadraturæ cunei illius quæ ante noſtra tempora ex quo puluis geometricus teritur, à nemine quem ſciam inuenta fuerat. Cùm elementa tetragoniſmica typis mandaremus, venit in manus noſtras eius inuentio tradita à nobiliſſimo geometra P. Gregorio à S. Vincentio, vt in voluminis noſtri præfatione admoneo; tam diuerſa tamen eſt methodus eam demonſtrandi vt æquus lector facilè inde intelligat in eandem veritatem caſu prorſus admirando duos eiuſdem Societatis Scriptores conueniſſe; ego enim per libræ principia iſtud demonſtro, ille ex librâ nihil adhibet; mea methodus cuneum cuius baſis eſt hyperbola perinde quadrat, ille ſuam cunei, vel vt ipſe loquitur vngulæ inueſtigationem vltra circuli & parabolæ fines non porrigit. Quid verò nos iuuerit inueniſſe ſpatia cuneo iſti æquiponderantia conſtabit ex ſequentibus.

PROPOSITIO XIII.

SIt (*Fig. 6.*) a d c e circulus diametro a c deſcriptus in plano a b d; diametri a c, d e, ſecent ſe ad angulos rectos, vt ſemicirculum d c e recta b c ſecet in duobus quadrantes circulares: in planum d c e cadat perpendiculari g b quæ ponatur axis ſemicylindri baſium d c e, o h p; compleatur b g h c parallelogrammum per axem; eius diameter ſit g c, & diametri q h, o p ſecent ſe ad normam. Ergo cuneus c g h interceptus plano tranſuerſo c g p, & plano baſeos o h p erit cuneus primus ex vigeſima ſexta quarti. Intelligatur baſis o p h parallela horizonti ſuſtinere cuneum c g h, libra verò q g h ſuſtinens illum cuneum ſuſpendi ex centro g perpendiculo g b.

Oſtendendum eſt ſi g q ponatur brachium libræ ita ſuſpenſæ, cuneo g c h vt iacet manenti, & integrè ſumpto, æquiponderare quadrantem cylindri altitudinis b g baſeos o h p: ſi autem cuneus g c h

fecetur plano ad planum d b g parallelo, æquiponderans esse cylindraceum altitudinis g b, baseos certa quadam ratione mixtæ ex rectilineo noto, & ex quadrante condicto partis baseos o h p, cui insistit portio cunei primi designata.

Ex q g abscindatur m g quadrans totius q g, & compleatur parallelogrammum b g m i; ex g q abscindatur m r æqualis rectæ g q, & compleatur parallelogrammum g r n b. Cuneum g c b qui basi d c e insistit, patet ex vndecima quinti tetragonismicorum esse illum quem ibi *secundum* nominauimus, *primi* nomen reseruantes cuneo c g h. Igitur ex eadem propositione cuneo secundo, vel toti g c b, vel parti A f c abscissæ per planum z f t parallelum plano d b g, librâ n c suspensâ ex i perpendiculo i m, brachio i n, æquiponderat parallelepipedum altitudinis b g, baseos æquantis rectilineum notum; istud verò rectilineum vt ex corollario primo eiusdem vndecimæ patet, quando totus cuneus secundus sumitur, est quadrans duplex quadrati b c; in illo enim corollario, ideo ponitur vnus tantùm quadrans quia altitudo parallelepipedi est dupla altitudinis b g.

Præterea, per vigesimam quintam quarti tetragonismicorum, si libra a c suspendatur ex b perpendiculo b g, brachio b a, æquiponderans cylindro b h, vel eius parti f h est parallelepipedum altitudinis b g, baseos æquantis rectilineum notum, & duos trientes quadrati b c, quando cylindrus b h sumitur integer. Nomine autem cylindri intelligo quamuis eius portionem abscissam ad positionem plani d b g. Igitur si cylindri suspensio quæ fit ex b fieri ponatur ex i perpendiculo i m, brachio i n, æquiponderans prioris suspensionis augebitur per decimam secundi tetragonismicorum, quadrante suspensi, cùm b i mensura recessûs ponatur quadrans brachij: æquiponderans igitur cylindro suspenso est cylindraceum altitudinis b g baseos mixtæ ex rectilineo noto & ex quadrante baseos cylindri suspensi, in primo autem casu istud rectilineum est duo trientes vel octo vnciæ quadrati b c. Quoniam verò æquiponderans cylindro componitur ex spatio æquiponderante duobus simul cuneis; æquiponderans autem cuneo secundo habet altitudinem m i & basim æquantem rectilineum notum; ergo per subductionem huius baseos à basi alterius æquiponderantis restat basis cylindracei æquiponderantis cuneo primo mixta ex quadrante suspensi & ex rectilineo noto; in primo verò casu patet istud rectilineum esse duas vncias quadrati b c; nam si ex octo vnciis demas senas siue duos quadrantes, relinquuntur duæ vnciæ quadrati g h quæ vna cum quadrante semicirculi o h p conflant basim illius æquiponderantis altitudine m i præditi.

Quoniam verò cuneus primus g c h vel integer vel quæuis eius portio abscissa ad positionem plani d b g est æqualis parallelepipedo noto per vigesimam sextam quarti, & in primo casu est æqualis parallelepipedo altitudinis g b vel m i, baseos æquantis duos trientes vel octo vncias qua-

drati g h; si libra r h suspensa ex m perpendiculo m i, brachio r m ponatur mutare suspensionem, & pendêre per accessum ex g perpendiculo g b, brachio g q, primæ suspensionis æquiponderans minuetur quadrante suspensi noti: ergo æquiponderans istud cuneo primo erit æquale cylindraceo altitudinis g b, baseos mixtæ ex quadrante basis cunei designati, & ex rectilineo noto. Quia verò in primo casu cylindraceum æquale suspenso habet pro basi octo vncias quadrati g h earum quadrans erit duæ vnciæ; ergo demi debent ex basi prioris æquiponderantis duæ vnicę quadrati g h; ergo cùm basis prioris non haberet nisi duas supra quadrantem basis cunei, patet in isto primo casu relinqui quadrantem basis o h p integræ purum: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam pars secunda solidi cuius sectio est sector minor definita sub finem octauæ propositionis, est ad positionem plani d b g condictâ ratione æqualis dimidio cunei primi cuius basis sit quadrans circularis d b c integer vel ex parte sumptus, patet quadrantem æquiponderantis inuenti in præsente propositione illi competere.

PROPOSITIO XIV.

MAneat (*Fig.* 7.) cuneus primus g c h insistens basi o h p, planumque per axem sit b g o rectum ad basim o h p, cuius diametrum o p ad normam secet diameter r h. Latus c h bifariam secetur in n & iungatur recta g n.

Ostendendum est cunei c g h vel totius, vel portionis ad positionem plani b g o designatæ centrum grauitatis esse in rectâ g n.

Plano b g o ducatur quoduis parallelum i t x secans triangulum c g h secundum rectam i t parallelam rectæ b g, & basim o h p secundũ rectam x u parallelam rectæ o p; eius verò cum cuneo sectio sit f e u x; est ergo per quarti Tetragonismicorum vigesimam primam f e u x parallelogramma figura, cuius latera f x, e u æquidistant rectæ c h, & latus x u bifariam secatur in t; cùm autem recta t i æquidistet eidem c h, æquidistabit quoque lateribus f x, e u; ergo cùm t i bifariam secetur, in r occursu rectæ g n (sicuti ei parallela c h ponitur bifariam secari in n) centrum grauitatis parallelogrammi f x u e erit punctum r in linea g n constitutum. Cùm igitur cunei c g h omnes sectiones parallelæ plano b g o habeant centrum grauitatis in recta g n, patet ex vndecima quarti Tetragonismicorum centrum grauitatis vel totius cunei, vel cuiusuis eius portionis ad positionem plani b g o designatæ iacêre in recta g n, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XV.

IIsdem manentibus cuneus c g h, vel quælibet eius portio ad positionem plani b g o sumpta intelligatur vt iacet sustineri rectâ g

n; cùm enim recta g n transeat per eius centrum grauitatis, manebit vt iacet. Ex b g latere parallelogammi b g h c abſcindatur g l ipſi b g æqualis, compleatúrque parallelogrammum g h n m.

Oſtendendum eſt libra grammica b l ſuſpenſa ex g perpendiculo g h, brachio g l, æquiponderans cuneo c g h vel eius parti iam dictæ, cuius centrum grauitatis eſt in trianguli g m n latere g n, eſſe æquale cylindraceo altitudinis c h, vel b g, baſeos quæ æquet ſemiquadrantem figuræ o h p, quando totus cuneus ſuſpenditur; quando verò non ſuſpenditur totus, baſeos mixtæ ex rectilineo noto certa lege addendo vel demendo, & ex ſemiquadrante addititio figuræ cui inſiſtit pars cunei ſuſpenſa.

Quoniam enim libra r h ſuppenſâ ex g perpendiculo g b, brachio r g æquiponderans cuneo toti eſt cylindraceum altitudinis b g, baſeos æquantis quadrantem figuræ o h p; æquiponderans autem portioni cunei iam dictæ eſt cylindraceum eiuſdem altitudinis, baſeos mixtæ ex rectilineo noto certa lege addendo vel demendo & ex quadrante figuræ cui illa portio cunei inſiſtit, vt in decimâ tertia oſtendimus; ſi recta g a fiat æqualis rectæ g m, libra a m ſuſpenſa ex g perpendiculio g h, brachio g a æquiponderans eidem ſuſpenſo erit ipſum prioris ſuſpenſionis, vt in Corollario primæ quinti tetragoniſmicorum oſtendimus, cùm ſuſpenſi cunei centrum grauitatis ſit in g n diametro parallelogrammi g h n m. Cùm igitur per octauam ſecundi tetragoniſmicorum ſi brachium g a mutetur in g l duplo maius, æquiponderans brachij g l ſit dimidium æquiponderantis brachij g a, patet cuneo vt iacet manenti libra l b ſuſpenſa ex g perpendiculo g h, brachio g l æquiponderare cylindraceum propoſitum.

COROLLARIVM.

Quoniam pars prima ſolidi cuius ſectio eſt ſector minor definita ſub finem octauæ propoſitionis eſt ad poſitionem plani o g h condicta ratione æqualis cuneo primo cuius baſis ſit o x h g quadrans circularis integer vel ex parte ſumptus, patet dimidium æquiponderantis inuenti in præſenti propoſitione competere illi.

PROPOSITIO XVI.

Libra (*Fig.* 2.) grammica f c ſuſpendatur ex g perpendiculo b g brachio g f.

Oſtendendum eſt figuræ b z c p e æquiponderare ſpatium æquale dimidio quadrantis cicularis c p e g.

Patet propoſitio ex Corollario duodecimæ, nam ex illo iſtud æquiponderans eſt baſis cylindracei altitudinis g c, quod duplo ſolidi cuius ſector eſt p g c æquiponderet libra f c ſuſpenſa ex g, plano Q g b recto ad planum c e f gerente vicem perpendiculi; atqui iſta baſis ratione dupli

primæ partis eſt per Corollarium ſuperioris quadrans figuræ c p e g, ratione verò dupli ſecundæ per Corollarium decimæ tertiæ eſt quadrans eiuſdem figuræ: ergo iſta baſis eſt dimidium figuræ c p e g, quæ eſt quadrans circuli c e f o, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Ex ijſdem decima tertia & decima quinta poterit aſſignari æquiponderans portioni z c y quando y cadit inter c & g, hoc enim patet ex methodo ipſa.

COROLLARIVM II.

Hinc patet licet habeatur æquiponderans figuræ b z c p e videlicet ſpatium æquale octauæ parti circuli c e f o, & licet notum ſit rectilineum æquale eidem figuræ, nempe quadratum rectæ c g, centrum tamen grauitatis non poſſe aſſignari, quia ad hoc præſtandum inſuper neceſſaria eſt proportio quam habet figura b z c p e hoc eſt quadratum c g ad octauam partem circuli c e f o. Simili de cauſa cùm in libris tetragoniſmicis inuenerimus rectilineum notum æquiponderans cuilibet ſegmento circuli & etiam ipſius hyperbolæ (quod poſtremum quis ante nos fecerit penitus ignoro) libra ex centro ipſarum ſectionum ſuſpenſâ, centrum tamen grauitatis non potuimus, in illo volumine exhibere; ideoque in fronte libri promiſimus quadraturam ſegmentorum circuli & hyperbolæ non quidem abſolutè, ſed ex dato centro grauitatis eorum, idque præſtitimus in libri tertij propoſitione vltima.

PROPOSITIO XVII.

Iſdem manentibus ex f c abſcindatur c V æqualis rectæ c g.

Oſtendendum eſt libra V g ſuſpenſâ ex c perpendiculo c n, brachio c V, æquiponderans figuræ b z c p e ex differentiis genitæ eſſe æquale quadrato g c imminuto octaua parte circuli genitoris c e f o; æquiponderans autem figuræ c ſ o q r n ex differentiis maioribus genitæ eſſe æquale quinque octauis circuli genitoris, imminutis quadrato c g.

Quoniam enim tres rectæ f g, g c, c V ponuntur æquales, patet ex nona ſecundi tetragoniſmicorum æquiponderans libra ſuſpenſa ex c eſſe ipſum ſuſpenſum imminutum æquiponderante ſuſpenſionis ex g: ergo æquiponderans figuræ b z c p e libra ex c ſuſpenſa eſt æquale quadrato g c imminuto octaua parte circuli genitoris.

Quoniam verò ex methodo Corollarij duodecimæ duabus ſimul b z c p e, c s o q r n æquiponderat idem quod bis ſemicylindro baſeos C t D altitudinis c g, iſtud æquiponderans erit dimidium ſuſpenſi, cùm centrum grauitatis cylindri ſit in medio axis, erit ergo cylindrus altitudinis c g, baſeos C t D æquantis dimidium circuli genitoris, ſi ergo ex dimidio circuli genitoris auferatur æquiponderans parti b z c p e, relinquetur æ-

quiponderans parti alteri c ſ o q r n, videlicet quinque octantes circuli genitoris detracto quadrato g c; ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Hic locum, vt patet, habet corollarium ſimile primo ſuperioris propoſitionis.

PROPOSITIO XVIII.

Iiſdem manentibus cycloidis integræ a b c R d axis c f, ita diuiditur à centro grauitatis vt pars ſuperior ad verticem c ſit ad inferiorem ſicut ſeptenarius ad quinarium. Si verò ex cycloide integra circulus genitor auferatur, reſidui quod ex differentiis conſtat axis c f ita ſecatur à centro grauitatis, vt ſuperior eius portio ſit ad inferiorem ſicut quinarius ad ternarium.

Ex recta g f abſcindatur f T æqualis ipſi g f; quoniam ſuſpenſione ex g facta figuræ b z c p e æquiponderat per decimam ſextam propoſitionem octaua pars circuli genitoris quæ eſt dimidium quadrantis c p e g; ſi ſuſpenſio per receſſum fiat ex f, perpendiculo f a, brachio f T æquiponderans augebitur ipſo ſuſpenſo per decimam ſecundi tetragoniſmicorum: ergo portioni b z c p e æquiponderat octaua pars circuli genitoris aucta quadrato g c, libra T g ex f ſuſpenſa brachio T f, ſed parti b e H f a æquiponderant per ſuperiorem iiſdem manentibus quinque octauæ partes eiuſdem circuli imminutæ quadrato g c (in ſuperiore enim id oſtendimus de parte c s o R n, brachio c V, quæ eſt eadem cum parte b e H f a) ergo toti figuræ c b a f e æquiponderant libra ex f ſuſpenſa, brachio f T, ſex octauæ partes circuli genitoris: ergo duabus ſimul c b a f e, c R d f o æquiponderant ſex quadrantes vel tres ſemiſſes circuli genitoris. Cùm igitur duæ illæ figuræ ſint ſimul æquales duobus circulis genitoribus vt ex tertia propoſitione patet, æquiponderans ad duas illas erit vt ternarius ad quaternarium; ergo centrum grauitatis duarum illarum ſimul ita diuidit rectam f c, vt portio quæ eſt ab ipſo centro ad baſim contineat tres quadrantes bracij T f vel f g; ergo reliqua continet quinas eiuſdem modi partes, quod erat vnum ex demonſtrandis.

Quoniam verò genitoris circuli centrum grauitatis eſt g, duo ſemiſſes ipſius illi æquiponderabunt librâ T g ſuſpenſâ ex f perpendiculo f a, brachio T f; ergo toti figuræ cycloidi a b c R d æquiponderant quinque ſemiſſes genitoris circuli; ſed ipſa cycloides eſt per tertiam ſex eiuſmodi ſemiſſes; ergo cycloides ad ſuum æquiponderans eſt vt ſenarius ad quinarium; portio igitur quæ adiacet baſi a d eſt quinque ſextantes rectæ f g vel brachij T f: ergo reliqua ad verticem eſt ſeptem eiuſmodi ſextantes, quod reſtabat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Ad demonſtrationis effectum patet non eſſe neceſſariam quadraturam figuræ b z c p e, eo quod in æquiponderante partis b z c g includatur additia,

dititia, & in æquiponderante residuæ partis sit ablatiua, vnde fit vt per additionem æquiponderantium elidatur. Methodus verò inueniendi ęquiponderans cuicunque portioni z c y si sit minor quam b c g suprà est tradita, quòd si detur maior c b G M inuenitur æquiponderans parti z c y, & deinde alteri parti z y M G, vt in pari casu duodecimæ annotatum fuit.

COROLLARIVM II.

Ex præsenti & decima quarta quarti tetragonismicorum patet axem f c figuræ compositæ ex differentiis secari eadem proportione in qua semiaxis hemisphærij secatur per centrum grauitatis, & in qua basis prismatoidis explicati in illa eadem decima quarta, & in corollario quarto primæ propositionis eiusdem quarti libri.

PROPOSITIO XIX.

Iisdem manentibus (*Fig.* 8.) circa axem a d manentem circumuoluatur cycloides a b c R d & describat conoides quod appello *primum*. Prætereà circa axem b R manentem circumuoluatur portio b z c R & describat conoides quod voco *secundum*; ad planum a f c excitetur perpendicularis f u, sitque recta f u ad f T, vel ad f g, vel ad f x, vt est circulus ad quadratum diametri circumscriptum.

Ostendendum est Conoides primum esse æquale cylindraceo altitudinis f u baseos æquantis vicenos circulos genitores diametro c f descriptos. Conoides verò secundum esse æquale cylindraceo eiusdem altitudinis, baseos æquantis octo besses quadrati c g, vel T f, & simul duplum circuli genitoris.

Istud conoides primum secetur quolibet plano n h z parallelo ad planum u f c, eiusdem cum quadrante conoidis sectio intercepta inter plana u f a, g f a sit quadrans circularis n m z h quem in punctis n, z tangant rectę n l, z l complentes quadratum z h n l, cuius diameter sit h l. Si intelligatur solidum (vocetur homœoconoides) cuius sectiones in singulis quadrantibus interceptis inter plana a h z, a h n sint quadrata h n l z; ex vigesimæ tertiæ quarti tetragonismicorum corollario secundo habemus octupulum æquiponderantis cycloidi a b c R d librâ T c suspensâ ex f perpendiculo f a, brachio T f esse æquale homœoconoidi illi cuius sectiones sunt quadrata parallela plano u f c. Cùm igitur octuplum huius æquiponderantis per superiorem sit æquale viginti circulis diametri f c, patet homœoconoides istud esse æquale cylindraceo altitudinis f x ęquantis rectam f T, baseos continentis vicenos illos circulos. Prætereà quoniam homœoconoidis & conoidis ad positionem plani u f c sectiones sunt vt quadratum & circulus inscriptus, hoc est vt altitudo f x ad altitudinem f u; per vndecimam quarti erit iuxta eandem positionem homœoconoides ad conoides, vt altitudo f x ad f u; sed ita etiam sunt cylindra-

dracea istarum altitudinem f x, f u quorum id quod habet altitudinem f x æquat homœoconoides solidum, ergo cylindraceum altitudinis f u æquat conoides propositum, quod erat vnum ex demonstrandis.

Alterum verò eodem modo ostenditur, superfluumque planè sit id enucleatiù stradere: ergo.&c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Hæc methodus perinde rem propositam demonstrat quæcunque alia ad basim a d parallela sumatur circa quam circumuoluatur figura a c d, dummodo per decimæ secundi tetragonismicorum methodum æquiponderans illi inueniatur. Eadem quoque methodus non exigit vt tota figura a z c R d sumatur, sed potest sumi quælibet eius portio h z c f ad positionem rectæ f c; & completo parallelogrammo h z y f inueniri seorsum æquiponderans figuræ z c y quod addatur æquiponderanti parallelogrammi h z y f. Ex quibus patet non sine aliqua causa scriptum à nobis esse in illo corollario secundo vigesimæ tertiæ Theorema illius propositionis nostræ planam viam facere ad plurima problemata abstrusa pariter & vtilia.

COROLLARIVM II.

Rectam f u esse octauam partem totius peripheriæ c e f o, hoc est baseos a d, patet inde quod rectangulum sub recta g f & sub a f æquante dimidium peripheriæ totius sit æquale circulo c e f o; ergo rectangulum altitudinis c f baseos æquantis dimidium rectæ f a vel quadrantem peripheriæ totius est æquale circulo c e f o: igitur quadratum c f est ad circulum, vel ad rectangulum altitudinis eiusdem c f, baseos æquantis quadrantem peripheriæ circularis, vt basis c f ad quadrantem eiusdem peripheriæ, vel ad dimidium rectæ a f: ergo cùm f x vel g f sit ad f u, sicut c f dupla rectæ g f est ad quadrantem peripheriæ, erit f u octaua pars rectæ d a æquantis peripheriam c e f o.

PROPOSITIO XX.

EX demonstratis hactenus & iis quæ propositæ quæstionis Autor anonymus de suo spondet, Quadraturam Circuli eruere.

Quod in præsenti propositione nunc intendimus, mouit nos potissimùm ad istam nostram lucubrationem euulgandam. Sæpe enim accidit vt duorum circa idem Autorum inuenta in vnum collata præstent id ad quod singula satis non sint. Nos itaque ea inuenimus circa quæstionem propositam, quibus si accedant quæ doctissimus ille Scriptor promittit se non denegaturum posteris, si quæsita sua nullus soluerit, contendo absolui inde posse quadraturam circuli.

Manente enim schemate propositionis superioris, cùm Nobilissimus ille anonymus promittat figuræ b c R centrum grauitatis; sit illud i; ergo vt f g semidiameter circuli genitoris ad g i longitudinem notam, ita est figura b z c L R ad quartum spatium, quod notetur elemento H, Igi-

tur b z c L R figura continet ex duodecima propositione bis quadratum g c, & semel genitorem semicirculum e c o: spatium verò quod ei æquiponderat librâ f c suspensâ ex g brachio g f, perpendiculo g e, continet ratione semicirculi genitoris duos trientes quadrati g c per decimam octauam tertij libri tetragonismicorum; ratione verò figurarum b z c e, R L c o dimidium semicirculi genitoris e c o per decimam sextam huius libri. Igitur rectilineum inclusum in figura b z c L R suspensâ ad rectilineum inclusum in æquiponderante H est vt ternarius ad vnitatem, portio autem semicirculi contenta in suspenso b z c L R ad portionem inclusam in æquiponderante H est vt binarius ad vnitatem: rectilineum igitur suspensi ad rectilineum P æquiponderantis non est vt curuilineum eiusdem suspensi ad curuilineum Q eiusdem æquiponderantis.

Vt f g ad g i ita fiat rectilineum æquiponderantis H ad spatium p, & ita etiam fiat curuilineum æquiponderantis H ad spatium q: ergo cùm eadem sit ratio rectilinei figuræ b z c L R ad rectilineum p, & curuilinei figuræ b z c L R ad curuilineum q; oportet necessariò vt spatij p ad q non sit eadem ratio quæ spatij P ad Q; si enim esset eadem ratio, cùm aliunde sint duo simul p q æqualia duobus simul P Q, essent singula singulis æqualia, ac proinde rectilineum suspensi ad P rectilineum æquiponderantis esset vt curuilineum suspensi ad curuilineum Q æquiponderantis, contra quam suprà ostenderimus. Cùm igitur rectilineum p notum vnà cum curuilineo q noto sint simul æqualia rectilineo P & curuilineo Q simul sumptis, & non singula singulis, differentia rectilineorum p P nota, erit æqualis differentiæ curuilineorum notæ q Q, quod satis est ad quadraturam circuli, vt patet: ergo &c. quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Habes hic, Lector, viginti illas propositiones iterum cusas quas anno superiore decimo Kalendas Augusti in lucem emisi. Nescio quis postea sub initium Octobris visus est inuidere mihi qualemcunque huius inuenti laudem, dum in historiâ Cycloideos Gallico idiomate compositâ scripsit hæc meo nomine edi non oportuisse nulla mentione factâ eius à quo illa accepissem. Vanissimum istud commentum risu exceperunt hic Tolosates, plurimique viri graues alibi; ne tamen silentium mihi confessioni criminis verti ab vllo posset, sub finem sex propositionum de acceleratione grauiũ nuper à me vulgatarum respondi in hæc verba ad lectore: Autor historię Cycloideos initio Octob. editæ ausus est calumniosè scribere nos furtum fecisse problematum eorum quæ de eadem Cycloide ad Clarissimum Senatorem D. de Fermat XII. Kal. Augusti miseramus. Nihil certè posthac edetur quod non possit suis vindicare amicis pari prorsus iure. At videramus manuscriptas ea de re demonstrationes huc Parisiis transmissas. Ad quem quæso? non certè ad D. de Fermat, neque ad nos, neque verò ad vllum qui eas nobis legendas dederit. Videram equidem in Torricellij libris iamdiu editis demonstrationem qua probat Cycloidem integram esse triplam circuli genitoris: sed hanc eius laudem iamdiu agnoueram in Elementorum meo-

rum libris. Vidi etiam, fateor vltro, eiusdem Torricellij manuscriptam demonstrationem centri grauitatis totius Cycloideos ab eodem D. de Fermat mihi communicatam triduo antequam meum illud Opusculum Parisios mitterem: hanc verò inuentionem vt illi nequaquam præripio, ita cætera ex omnium qui istam rem tentarunt iudicio longè difficiliora primus inuenisse mihi videor, quamdiu alios ante me inuentores penitus ignoro, tantum abest vt furti vllius mihi conscius sim. Illa verò (datâ semel circuli quadraturâ) sunt tria potissimum. I. Quadratura cuiuslibet portionis Cycloideos. II. Cubatura solidi geniti circumductu cuiuslibet portionis Cycloideos circa quamlibet rectam basi parallelam. III. Centrum grauitatis cuiuslibet segmenti Cycloideos subtensi rectâ ad basim parallelâ. Cæterùm expecto vt iste Autor mihi eadem arte deuntiet (id enim facile potest, si velit) à quonam Elementa Tetragonismica iam ante plures annos acceperim; à quo istas ipsas quas iam euulgo propositiones: à quo plura alia quæ prælo parata penes me habeo, in quibus sunt quatuor de cycloide libri cum plena solutione problematum omnium propositorum, quam viris summæ eruditionis & fidei legendam atque examinandam iam pridem dedi in primariis totius Galliæ vrbibus. Sed cùm chartæ istius angustiæ longiorem Apologiam non admittant, erit tempus quando ex literis D. de Pascal ad nos datis plura de Cyclocylindricâ, deque quadratura nostra solidi circa axem cycloideos paruæ pro omni casu geniti, tantopere ab ipso laudatâ, in defensionem nostram describere nobis per chartam ampliorem licebit. Vale Tolosæ VI. Eidus Decembr. 1658.

Cæterùm quod primus ea inuenisse mihi visus sum, quæ primùs darem in lucem, quandiu alios ante me inuentores penitus ignorarem, non reprehendet ille Autor, si attenderit ad ea quæ ipse pronuntiauit in continuatione suæ historiæ editâ Parisiis 12. *Decemb.* 1658. *Ibi enim vt infirmet illud* graues viros iamdiu legisse meos de Cycloide manuscriptos libros, & plenam problematum propositorum solutionem, *opponit* in istis geometricis causis solam editionem publicam facere fidem. *Igitur si primus ego illa problemata publicè emisi, negare non potest me primum illorum inuentorem esse, nisi adducat anteriorem illorum problematum alicuius alterius editionem. Huc spectat quod ibidem edicit*, in geometricis non præberi assensum nisi rebus euidenter probatis. *Quæ autem ad Cyclocylindricam attinent, vide ea in scholio decimæ propositionis libri proximè sequentis: quæ verò ad laudes à D. de Pascal attributas meis inuentis lege (si tantùm vacat) in scholio vltimæ propositionis libri tertij, vbi defensionis iusta necessitas repugnantem vicit illa referendi pudorem.*



DE CYCLOIDE LIBER SECVNDVS.

In quo ampliora nostra methodi fundamenta statuuntur, & Cyclocylindricarum figurarum quadratura *traditur.*

DEFINITIONES.



Yclocylindricam figuram primi nominis vocamus eam quæ intelligitur in superficie cylindri recti describi eo modo quo circulus in plano, nempe si pede circini extremo manente in dato superficiei cylindricæ puncto, ipse circinus circumducatur notans in superficie cylindricâ lineam donec ad idem punctum circuitu peracto redeat, quoties iste reditus fuerit possibilis. Circini autem crura si deducta fuerint interuallo diametri baseos cylindri, vocetur *cyclocylindrica primaria*, & antonomasticè cyclocylindrica; si alio quouis interuallo, dicatur *cyclocylindrica secundaria*; quòd si figatur extra illam superficiem, *nominis secundi* appellabitur, primaria quidem quoties semidiameter circuli, vel interuallum pedum extremorum circini erit æquale rectæ illi quæ à puncto in quo fixus hæret pes eiusdem circini per cylindri axem ducta terminatur in superficie cylindri, illa verò semidiameter & circulus ab ipsa descriptus est in plano basi cylindri parallelo; *secundaria* autem *secundi nominis* quando interuallum circini non terminabitur in superficie cylindri.

Nemini mirum videri debet quòd istam figuram appellem alterum circulum; fratres enim mihi videntur esse, cùm circini, cuius vnus pes fixus maneat, ductu generentur ambo, ille quidem in superficie planâ, iste in cylindricâ: vel seclusâ circuli cogitatione, cùm ambo sint communis sectio sphæræ & superficiei, ille quidem planæ, iste cylindricæ. Porrò in istis cylindricam superficiem intelligo illam quam definit Euclides initio vndecimi libri, cuius videlicet axis est rectus ad basim.

PROPOSITIO PRIMA.

EX centro a (*Fig. 9.*) descriptus sit circulus interuallo cuiuslibet rectæ a d, eiusque quadrans sit d a c, ac proinde d a, ac secent se ad normam; rectæ a d bisectio sit g, & ex centro g per a, d descriptus sit semicirculus a n d, in cuius peripheria sumptum sit quoduis punctum e & per illud ductæ e d, e a, quarum alterutra a e producta occurrat peripheriæ d b c in b; ducta sit b m perpendicularis ad a d.

Ostendendum est rectæ d e æqualem esse b m, & rectæ a e rectam a m; arcui verò d i e æqualem esse arcum d b, & arcui a n e arcum b c.

Quoniam enim angulus d a b constituitur ad centrum circuli maioris d b c, & ad peripheriam circuli minoris d n a; si per g ducatur ad d e perpendicularis g l occurrens peripheriæ in i, ac proinde bifariam secans in i arcum d i e, arcus d i erit similis arcui d b; sed arcus similes circulorum se habent vt semidiametri; ergo cùm semidiameter d a sit dupla semidiametri d g, peripheria d b erit dupla peripheriæ d i; sed peripheria d e est quoque dupla eiusdem d i; ergo arcus d b, d e sunt æquales.

Præterea quoniam triangula rectangula a e d, a m b habent angulum m a b communem, sunt æquiangula; sed habent bases a d, a b æquales; ergo latus a e est æquale lateri a m, & latus d e lateri m b, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hinc patet si peripheriæ a n d ponatur recta æqualis a h, ipsam a h esse quoque æqualem arcui c b d; & si in eadem recta a h sumatur a f æqualis arcui a n e, ipsam a f esse quoque æqualem arcui b c. Item si ex f excitetùr perpendicularis f o æqualis rectæ m b vel d e; & intelligatur figura ex differentiis genita respondens quadranti circulari c b d, cuius differentiæ ordinatim applicentur ad rectam c a, punctum o esse in limbo h o c eiusdem figuræ.

PROPOSITIO II.

SIt (*Fig.* 10.) a b z c f figura ex differentiis genita, ita vt ordinatim applicata z y æquet arcum p c: ducta sit quælibet z l secans arcum superiorem b c in z parallela axi, complens parallelogrammum h l f c, occurrens rectæ g b in i; completo parallelogrammo g c x b intelligatur descripta figura alia x r g b ex differentiis quoque genita sed subcontrariè, ita vt eius semiaxis sit x b, vertex x, ordinatim applicata b g: curua x r g occurrat rectæ l z in r.

Ostendendum est tres rectas h z, r i, z l esse proportionales.

Per z, r ducantur ordinatim applicatæ r s, z y occurrentes semicirculi genitoris peripheriæ c o f in t, p; per t ducatur t u complens paralle-

logrammum i r t u. Quoniam ex generatione figuræ a b c q d recta h c vel z y vel r s est æqualis arcui c p, completo parallelogrammo b g y m, & b g f e, rectam z vel e r erit æqualis residuo arcui p o; nam tota b g est ex generatione æqualis toti c t o. Rursus quoniam ex generatione figuræ x r g b arcui c p t æqualis est recta e r, eidem rectæ e r erunt æquales arcus c t, p o: ergo inter se sunt æquales iidem arcus c t, p o: ergo sublato vel addito communi p t, erunt c p, t o æquales arcus: ergo ordinatim applicata y p æquat ordinatim applicatam t u. Cùm igitur tres rectæ c y, y p, y f sint proportionales (nam ex p puncto peripheriæ demissa est p y perpendicularis ad diametrum c f) erunt tres rectæ c y, t u, y f proportionales: sed rectis c y, t u, y f æquales sunt h z, r i, z l: ergo tres rectæ h z, r i, z l sunt proportionales, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Curuæ x r g, c z b secent se in puncto λ, & per λ agatur $\tau\omega$ occurrens rectis b g, a f in φ, ω; patet rectam $\omega\varphi$ ad $\varphi\lambda$ esse potestate vt binarium ad vnitatem. Recta enim b g secatur bifariam in φ, ac proinde recta φ g æqualis est dimidio peripheriæ c p o, vel x $\theta\beta$, descripto ex centro b semicirculo x β n. Per λ acta sit $\lambda\theta$ parallela basi a f occurrens peripheriæ x β n in θ; per θ agatur $\delta\mu$ complens parallelogrammum rectangulum x n $\mu\delta$, occurrens rectæ b β in $\downarrow$. Quoniam x θ arcus est dimidium arcus x $\theta\beta$, patet tres rectas $\theta\delta$, $\theta\downarrow$, $\theta\mu$ esse propotionales, & rectam $\mu\downarrow$ ad $\downarrow\theta$, vel $\omega\varphi$ ad $\varphi\lambda$ esse potestate vt binarium ad vnitatem.

COROLLARIVM II.

Si figura g λ x producatur ad axis b x partes β, perinde ostendentur tres rectæ l z, z i, r i proportionales, quamuis punctum z sit in arcu b a, & punctum r in altero arcu peripheriæ g r x productæ.

PROPOSITIO III.

Iisdem manentibus, ostendendum est rectas r i, i z esse sinus complementorum, & quadrata ambarum esse simul æqualia quadrato c g.

In parte superiore b c g quoniam y g æquat sinum p B arcûs p t o, sequitur rectam z i æqualem rectæ y g esse sinum arcûs cui recta b i est æqualis: cùm enim recta i g æquet arcum c p, & tota g b totum arcum c p o, apertum est rectam i b æqualem esse arcui p t o, & ordinatim applicatas ad basim b g parallelas axi c f esse sinus arcuum quibus æquales sunt rectæ puncto b adiacentes. Cùm ergo posita sit subcontrariè altera ex differentiis figura x r g b, patet rectas r i, i z esse sinus complementorum, & quadrata ambarum esse simul æqualia quadrato c g, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

Iisdem manentibus, ostendendum est h z sinum versum arcûs cui recta h c æqualis est, esse æqualem sinui toti c g demptâ z i æquan-

te sinum complementi: rectam verò z l compositam ex eodem sinu z i & ex sinu toto i l vel g f esse æqualem sinui verso arcús cui rectai q est æqualis.

Quoniam sinus p B vel y g demptus de sinu toto c g relinquit sinum versum c y arcûs minoris c p; & idem sinus p B arcûs p o additus ad sinum totum f g componit y f sinum versum arcûs maioris p o f; patet h z sinum versum arcûs cui recta h c æqualis est esse æqualem sinui toti c g dempta z i æquante sinum complementi: rectam verò z l compositam ex eodem sinu z i & ex sinu toto i l vel g f esse æqualem sinui verso arcûs cui recta i q est æqualis, quod erat demonstrandum.

Hæ figuræ c z b g, x r q b vocentur *subcontrariæ*.

PROPOSITIO V.

Reuocato schemate propositionis primæ (*Fig. 9.*) ex a d abscissa sit a h æqualis curuæ d b c vel d e a, ponatúrque h o c a figura ex differentiis superior, cuius semibasis sit a h, axis a c, circulus genitor sit is qui ex centro a per c descriptus fuit. Ponatur prætereа h λ a f figura ex differentiis superior respondens circulo genitori, semidiametro g n descripto: per f quodlibet punctum rectæ a h ducta sit f o ordinatim applicata ad semibasim a h semicunei expansi h o c a: sit a e recta æqualis rectæ illi quæ in semicirculo a n d subtendit arcum æqualem rectæ a f.

Ostendendum est quadratum rectæ a d esse maius quadrato rectæ a e, excessúmque esse æqualem quadrato rectæ f o.

Ex tertia propositione patet rectam f o esse æqualem sinui arcûs d b; cui arcui recta h f est æqualis: sed per primæ corollarium recta f o est æqualis rectæ d e; ergo rectæ f o vel d e quadratum est æquale excessui quo quadratū a d superat quadratū rectæ a e, quæ subtendit arcum a n e, qui arcus ponitur æqualis rectæ a f: duo autem quadrata a e, e d æqualia esse simul quadrato a d patet ex elementis Euclidis: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

Iisdem manentibus figura G T a h subcontrariè ponatur figuræ h o c a.

Ostendendum est rectas f o, f T esse æquales duabus d e, a e singulas singulis.

Quoniam per corollarium primæ recta f o æqualis est rectæ d e, per superiorem autem excessus quadrati a d supra quadratum f o est quadratum rectæ a e; per propositionem verò tertiam idem excessus est æqualis quadrato ordinatim applicatæ f T ad basim a h figuræ G T a h subcon-

trariè

trariè positæ alteri h o c a : igitur duæ f o, f T sunt æquales duabus d e, a e singulæ singulis, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

Isdem positis, ostendendum est dicylindraceum ad positionem plani recti super plano d a c & incedentis per a c rectam, genitum ex subcontrariè positis h o c a, a T g h esse condictâ ratione æquale cylindraceo altitudinis æquantis rectam a d vel a c, baseos h λ a f.

Quoniam in semicirculo a e d vt a d recta ad d e, ita est a e recta ad e z, rectangulum sub extremis a d, z e, hoc est rectangulum sub v a, f λ erit æquale rectangulo d e a, vel T f o. Igitur dicylindraceum ad positionem plani recti super plano d a c, & incedentis per a c rectam, genitum ex subcontrariè positis h o c a, a T G h est condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis æquantis rectam a d vel a c, baseos h λ a f, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Isdem manentibus (*Fig.* 11.) ad planum c f d excitetur perpendicularis c h æqualis rectæ c f; in plano h c x intelligatur describi circulus diametro c h; iste verò circulus intelligatur esse basis cylindri cuius axis n o parallelus recta c f; planum per axem circuli & per rectam c f sit parallelogrammum c h m f: iste ergo cylindrus tangit planum a c d in recta c f; parallelogrammi h c g l latus g l occurrat axi n o in r; per r & c ducatur recta r c & intelligatur planum r c x secans cylindrum; vt portio cylindri intercepta ad partes rectæ c g inter planum transuersum r c x & semicirculum i g s quem tangit recta g q, sit cuneus primus definitus in vigesima sexta quarti tetragonismicorũ. Iungatur præterea recta r f & intelligatur planum transuersum r f a, vt portio cylindri intercepta planis l g b, m f a, insistensque basi i g s diuidatur in duos cuneos primum g r f, secundum r f o.

Ostendendum est si ad positionem plani l g b vel h c x intelligatur cylindrica superficies cunei primi c r g explicari hinc & inde, ita vt circulorum basi cylindri parallelorum arcus conuertantur in rectas ipsis æquales, & rectæ g b parallelas; superiorem partem b c q esse ipsam superficiem cunei primi ita explanatam: inferiorem verò partem b q d a esse pari ratione portionem cunei secundi r f o, vnà cum semicylindro baseos i g s altitudinis r o.

Istud sola mentis contemplatione melius intelligitur quàm verborum prolixitate; in quarta enim primi libri ostendimus rectangulum altitudinis c g baseos z y esse æquale duplo sectoris c g p, & sectorem c p g esse eundem cum sectore qui in plano z y B ibidem fuit designatus in cylindro

cuius sectio est semicirculus c e f si rectus ponatur ad planum a f c, ita vt recta e g sit perpendicularis ad planum a f c. Atqui sectori c p g inuenietur pari methodo æqualis sector circuli y B qui est sectio plani z y B & cylindri habentis axem n o, interceptus ad partes plani g c x inter plana r c x, r c g; ergo arcus periphericus cunei respondens plano z y B ad partes b est æqualis rectæ z y; igitur cùm idem ostendatur vbicunque iaceat z inter b est c; peripheria cylindrica cunei primi g r c extenditur ad positionem rectæ b q in figuram b c q, modo suprà præscripto.

Completo parallelogrammo f c x b t, quoniam recta g b æquat ex constructione peripheriam c e, & recta a f peripheriam c e f, patet rectam f t esse dimidium rectæ f a, ac proinde esse æqualem arcui f e vel quadranti peripheriæ circularis. Intelligatur figura f D u c subcontraria figuræ a z c f, vt in simili casu secundæ propositionis primi libri; ducatur quælibet basi a f parallela N D occurrens in N, D vtriusque limbo figuræ ex differentiis genitæ, axi c f in M; rectæ b t in V: erit igitur vt in pari casu secundæ illius tota N D æqualis toti a f; ergo completis parallelogrammis N M f G, M f a E, si ex æqualibus E M, N D auferatur communis recta N M, residuæ E N, M D erunt æquales: sed M D recta est ex superiore casu æqualis peripheriæ X (ita enim vocetur) cunei primi r g f interceptæ inter plana r f a, r f g ad partes plani g f a: ergo residua N M est æqualis reliquæ peripheriæ quæ vnà cum X æquat semicirculi peripheriam: ergo cùm M V æquet quadrantem eiusmodi peripheriæ circularis, recta autem E V æquet alterum quadrantem, & E N portionem cunei primi, recta N V æquabit portionem cunei secundi ad partes b positam: ergo tota linea N H continet rectam æqualem duplo rectæ M V, hoc est semiperipheriæ circuli, & insuper aliam æqualem duplo rectæ N V, hoc est circulari lineæ attinenti ad cuneum secundum. Figura igitur inferior a N b q H d ad positionem rectæ a f, methodo antè præscripta respondet superficiei cylindricæ attinenti ad cuneum secundum, & insuper superficiei semicylindricæ, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

In duodecima propositione primi libri ostendimus figuram superiorem b c q esse æqualem duplo quadrati c g; in præsenti verò, eiusmodi figuram esse superficiem cylindricam cunei primi expansam ad positionem plani h c x. Vnde nunc primùm colligimus nos tunc nihil cogitantes quadrasse superficiem illam sed expansam, quam antequam expandatur P. Gregorius à S. Vincentio appellat *cylindricam superficiem vngularem*, & subtilissimè quadrat libri noni propositione 45. & 54. assumpta in suæ huius quadraturæ fundamentum propositione vigesima libri quinti collectionum Mathematicarum Pappi. Colligimus præterea istas duas superficies expansam videlicet, & contractam in curuum, esse æquales: hoc enim ipsum quod nos de expansa, ille de contracta demonstrat, quod non sine admiratione examinatori cuilibet constabit. In hanc igitur figu-

ram possunt conferri ferme omnia quæ ille de sua illa superficie eruditè admodum demonstrat: sed aliena frustra exscribere non amo, licet admiranda iudicem.

Figuram istam in posterum vocabo vno ex istis nominibus, nempe *paruam cycloidem*, vt eam distinguam à maiore Torricellij, vel *cunei expansam superficiem cylindricam*, vel breuiùs *cunei expansam superficiem*, vel certè *cuneum expansum*; eius vero partes superiorem b c q & inferiorem b q d a distinguam sicut in præsenti.

COROLLARIVM II.

Quoniam ordinatim applicatæ M D, E N sunt æquales perpetua lege, patet lineam a N b esse cauam ad partes rectæ a E, & conuexam ad partes rectæ f M; ipsamque figuram P B N a esse subcontrariè positam figuræ b z c g & eandm cum ipsa.

SCHOLIVM.

Figuras expansam & contractam esse inter se æquales si quis generaliter & pro omni casu assumat, rem à Geometriæ certitudine alienissimam facit: speciosum quidem est illud postulatum sed planè dolosum; ideóque nos sæpe sæpius illo delusi æqualitatem inter expansam & contractam in præsenti casu intulimus ex demonstrationibus seorsum factis pro expansâ & contractâ. Sunto igitur longè diuersa duo ista, aliquam superficiem curuam expandi in rectam, & esse illi æqualem; nec istud ex illa generali methodo inferatur. Atque hanc cautionem intelligi volumus in corollario primo decimæ septimæ tertij libri, vbi coni superficiem expansam damus. Vtrum autem contracta sit expansæ æqualis, an inæqualis, nihil ibi consultò pronuntiamus: nouimus etenim plurimas cautiones esse adhibendas vt æqualitas legitimè inferatur, eæ verò quænam sint, non est huius loci dicere. Aduerto vnum in præsenti casu quod cùm probabili veritatis larua suppositum lateat plures decipere posset; superficiei istius contractæ & ante explanationem sumptæ illum limbum qui peripheriæ circulari opponitur esse ellipseos arcum; at verò in expansâ figurâ limbum a b c q d non rectè inferri æqualem illi arcui propterea quod is in ipsum a b c q d expandatur & explicetur. Si enim consecucio ista esset legitima, plura demonstrarentur quæ ad hunc vsque diem licet diu quæsita, attamen irreperta latent. Qui autem noua principia totos dies inquirunt, videant ne nitori veritatis Geometricæ quam nobis maiores nostri tradiderunt, incauti officiant: nihil enim faciliùs est quàm vt quod in aliquo casu tantummodo verum est, ad alios inani quadam veritatis specie traducatur; iuuátque meminisse Archimedem testari (vt §.5 prolegomenon nostrorum aduertimus) quosdam quadraturam circuli aggressos successu caruisse, quòd principia noua & minimè concedenda assumpsissent.

PROPOSITIO IX.

ASsumpto schemate propositionis primæ (*Fig.* 12.) ducta sit quæcunque z i parallela axi c f occurrens limbo expansæ cyclocylindricæ superioris in z; rectæ b g in i; per z ducta sit z y u pa-

rallela rectæ b g occurrẽs axi c f in y; peripherię semicirculi c o f in u.

Ostendendum est completo parallelogrammo g y u m, figuræ i z c g æquale esse rectangulum o g m.

Istud ostendi posset ex methodo duodecima primi libri, quia tamen methodus Gregorij à Sancto Vincentio est facilior eam vsurpamus hoc loco. In planum c g o ex puncto c excitetur perpendicularis c t æqualis rectæ c g, cuius dupla sit c x, & iungantur rectæ g t, g x. Si ergo circulus diametri c f ponatur basis cylindri, & is secetur plano x g b transuerso ostendit ille Autor libri noni propositione quadragesima septima superficiem cunei primi x g c respondentem arcui c u esse æqualem rectangulo contento sub circuli c o f r diametro o r & sub eius parte g m; cúmque in quinquagesima quarta eiusdem libri demonstret superficiem cunei primi x g c ad superficiem primi t g c esse vt rectam x c ad t c, hoc est vt diametrum r o ad semidiametrum g o, patet superficiem cylindricam cunei t g c respondentem arcui c u esse æqualem rectangulo o g m.

Quoniam verò arcus c u extenditur in rectam y z, & rectæ in superficie cylindricâ cunei t c g quæ sunt sectiones planorum parallelorum plano g c t sunt æquales ordinatim applicatis ad diametrum r o: m u vel i z erit ordinatim applicata ad basim b g figuræ cylindricæ expansæ. Igitur portio i z e c g est æqualis portioni cuneatæ superficiei cylindricæ insistenti super arcu c u: ergo figura i z e c g est æqualis rectangulo o g m, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Cùm tota portio b z c g sit per duodecimam primi libri ęqualis rectangulo o g o, & eius pars i z e c g rectangulo o g m, patet partem b z i esse æqualem rectangulo g o m.

COROLLARIVM II.

Quando arcus c u est bes peripheriæ c u o, hoc est, quando c u arcus est duplus alterius o u patet rectam g c bifariam secari in y, & rectam g o ad g m esse potestate vt quaternarium ad ternarium. Quod si arcus c u foret triens peripheriæ c u o patet rectangulum o g m fore æquale semiquadrato rectæ g c, & ipsam g c fore ad g y potestate vt quaternarium ad ternarium.

PROPOSITIO X.

Reuocato schemate propositionis primæ (*Fig. 9.*) intelligatur a n d circulus fieri basis cylindri cuius superficies describatur motu rectæ a s perpendicularis ad planum circuli a n d. Pede circini manente in puncto a intelligatur interuallo rectæ a d describi linea quam vocamus absolutè cyclocylindricam.

Ostendendum est spatium inclusum istâ cyclocylindricâ esse æquale spatio quod potest c u dupla rectæ a c.

Intelligatur basis cylindri esse circulus centro g per d & a descriptus, vt a h recta æquet peripheriam a n d:ordinatim autem applicatæ ad basim a h æquent rectas in cyclocylindricâ figurâ ante ipsius expansionem parallelas axi cylindri. Istius itaque figuræ ita expansæ semiaxis longior erit a h, breuior a c (ita enim vocentur) eius verò quadrans erit a h o c, In rectâ a h sumatur quoduis punctum f,& a f æqualis sit arcui a n e:ergo si c a ponatur axis semicunei primi expansi vel cycloideos paruæ respondentis quadranti circuli a d b c, a h æquabit peripheriam d b c ex primæ corollario, ac proinde a h erit basis illius semicunei expansi: igitur per quintam recta f o ordinatim applicata ad semibasim a h semicunei primi expansi a c o h potest spatium quo recta a d superat quadratum subtensæ a e: ergo f o est ordinatim applicata figuræ cyclocylindricæ expansæ. Nam ante expansionem si per e agatur e t parallela rectæ a s, quæ axi cylindri æquidistat, recta e t erit in superficie cylindrica, si autem a t recta ponatur æqualis interuallo circini siue rectæ a d, patet rectam e t secari à circino in puncto t ,ergo recta e t est ordinatim applicata,axi parallela, insistens super peripheria d n a; ergo t e recta & a e possunt duo quadrata æqualia quadrato a t vel a d; ergo cùm quadratum a e quadratúmque f o vel m b, vel d e æqualia simul sint eidem quadrato a d; erunt rectæ f o, e t æquales; ergo cùm arcui a n e æqualis sit recta a f, & ordinatim applicatæ e t, ordinatim applicata f o, semicuneus expansus primus h o c a erit quadrans cyclocylindricæ figuræ expansæ, earumque limbi h o c, h p c erunt vnus & idem.

Quoniam igitur ex duodecima primi libri tota figura h o c a æqualis est quadrato a c, & h o c a est, vt iam ostendimus, quadrans cyclocylindricæ figuræ, patet quadruplum quadrati a c, vel quadratum quod potest dupla rectæ a c esse æquale cyclocylindricæ integræ, quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

De hac figura quadrandâ vt cogitarem fecit Clarissimus D. de Fermat; postea enim quàm primum huius operis librum vulgaui, nescio qua se dante occasione significauit mihi inuenisse se solidi,motu cuiuslibet cyclocylindricæ primi nominis circa basim geniti proportionem cùm cylindro circa eandem basim genito motu rectanguli cuius vnum latus sit eadem basis, alterum æquet axem cyclocylindricæ. Vbi primùm solus fui, cæpi mecum cogitare quid istud rei foret, reperique tandem post aliquot dies non tantùm proportionem illam, quam mihi vir optimus non expresserat, sed etiam quadraturam cyclocylindricæ primariæ primi nominis. Hoc, cum iterum illum alloquerer, ipsi denuntiaui, deque meo inuento pro sua qua me licet immerentem complectitur beneuolentia, & pro studio illo quo artium omnium incrementa mirificè fouet, mihi amplè gratulatus est. Aliquot post diebus literis ad D. Carcaui datis inserui quantùm hac in re deberem integerrimo illi Senatori, quanti facerem subtilissimam quam mihi tunc communicarat demonstrationem circa proportionem cylindri & solidi. De me nihil scribere aliud tunc libuit nisi meâ quidem sententia facturum illum rem doctâ sæ-

culi curiositate dignam qui cyclocylindricas figuras (*nempe primi nominis, nam de aliis nondum quicquam cogitaram*) quadraret. *Quarta Septembris proximè lapsi die primas ad me dedit literas D. Pascal, vt me doceret quas ego edideram viginti propositiones de cycloide, non attigisse problematum ab Anonymo propositorum difficillima; & quæ ego ex illis soluissem si comparentur ad solidum circa axem cycloideos magnæ vel paruæ, esse vt elementa Euclidis collata cum Archimedeis operibus. Præterea tam longè adhuc distare inuentionem solidorum istorum circa axem genitorum ab inuentione centri grauitatis solidorũ propositâ, quàm procul remoti sunt eiusdem Euclidis libri ab inuentis Lucæ Valerij aut Archimedis. Vt autem intra inuentorum infimum gradum potentiùs me cohiberet, subiecit in infimo illo loco esse quadraturam cyclocylindricæ, quam ego tamen in literis ad D. Carcaui tantopere extollo, eamque iam repertam esse etiam à me ipso quamuis insciente; sed pace illius dixerim, fallitur; conscius enim mihi eram mei istius inuenti. Ostendit autem à me inuentam esse, quòd cycloideos paruæ quadraturam dederim in duodecima primi libri iam tunc editi; illa autem cyclocylindrica expansa, quando describitur interuallo diametri baseos cylindricæ, sit ipsa (quod demonstrare inquit paratus sum, si opus fuerit) cycloides parua. Ista syncerè narraui vt constet quid me doceri de cyclocylindrica figura curarit Anonymus: at certè nihil; expectabam tamen quadraturam cyclocylindricæ cuiuslibet, quam eruditâ ista ætate dignam existimabam tunc, & etiam nunc existimo. Quis tamen non putet mihi arcanum aliquid de cyclocylindrica figura, quod numquam in mentem meam venire potuisset, detectum tunc fuisse, si attendat ad illa verba Autoris historiæ Cycloideos editæ Gallicè 10 Octob. 1658.* Quo in negotio (*inquit ille Autor Anonymus*) rem Patri LALOVERÆ gratissimam facturum me credidi; quia suis in literis, quæ penes nos seruantur, scribit de quadratura huius figuræ, quam cyclocylindricam vocat, tanquam de re sibi maximè incognita, & quam imprimis optaret cognoscere. Dominus de Carcaui, cum non vacaret per se, per vnum ex amicis (*is est D. de Pascal*) illi explanauit ista omnia, & quidem valde amplis literis, quibus idem Pater respondit. *Diceres isto responso me agnouisse inscitiam meam, & gratias illi egisse me de doctrinâ summè reconditâ. Respondi, fateor, sed hoc ipsum quod hic inculco, me nihilò doctiorem circa cyclocylindricam ex illis literis euasisse, méque in illis desiderasse illam cyclocylindricæ quadraturam, quam tantorum Geometrarum nomine allecta spes mihi pollicebatur.*

PROPOSITIO XI.

Iisdem manentibus (*Fig. 13.*) in quadrante cyclocylindricæ figuræ h o c a ducta sit quælibet ordinatim applicata f o ad semiaxem longiorem a h, parallela axi a c breuiori.

Ostendendum est figuram alterutram a f o c, vel h f o esse æqualem rectilineo noto.

Istud patet ex nona; ibi enim ostendimus modum quadrandi istas portiones semicunei primi expansi; sed h o c a quadrans cyclocylindricæ

per demonstrata in superiore est primus semicuneus expansus; ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Iisdem manentibus circa axem longiorem circumuoluatur quadrans cyclocylindricæ h o c a & describatur conoides cyclocylindricum.

Ostendendum est conoides istud cyclocylindricum esse æquale cylindraceo baseos æquantis circulum descriptum diametro breuiore u c, altitudinis quæ ad semidiametrum huius circuli sit vt circulus ad quadratum suæ diametri.

Istud non aliter demonstratur quàm decima nona primi libri; nam ex decima sexta eiusdem libelli librâ u c suspensâ ex a perpendiculo a h, brachio a u æquiponderans quadranti cyclocylindricæ expanso h o c a integro pars est octaua circuli diametro u c descripti; ergo octuplum illius est circulus diametro u c descriptus, quod pro isto casu demonstrandum erat, vt cætera decimæ nonæ libri primi illi competerent; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam cyclocylindrica expansa componitur ex duplici parte superiore cycloideos paruæ, hæc & plura alia ampliùs constabunt ex proximè sequenti libro, vbi octo Anonymi problemata applicantur cycloidi paruæ, ac proinde etiam cyclocylindricæ expansæ. Paucula tamen adhuc quæ sequuntur addere lubet.

PROPOSITIO XIII.

Iisdem manentibus (*Fig.* 13.) rectæ a u, h a bifariam secentur in C, r, & compleantur parallelogramma h r q A, h a C A: centro r per q intelligatur descriptus circulus qui sit genitor partis superioris q t h r cycloideos paruæ, sitque etiam genitor partis superioris q i u C cycloideos paruæ: figuræ q t h r respondeat h x q A subcontrariè posita. In recta h r sumptum sit quoduis punctum f, & per id ducta f o ordinatim applicata ad basim h a occurrens curuis q t h, q x h & rectæ q A in punctis t, x, y.

Ostendendum est tres rectas a c vel a d, f o, f x esse proportionales.

Quoniam semicunei primi q x h A, h t q r sunt subcontrariè positi, & duæ rectæ h f, f r æquant peripheriæ circularis quadrantem d e n, repræsentantque arcus d e, e n qui sibi sunt ad quadrantem d e n mutuò complementa; ergo cùm per propositionem tertiam rectæ t f, x y repræsentent sinus arcuum d e, e n complentium simul quadrantem d e n, duo autem isti sinus possint simul quadratum g d vel q r, patet duo quadrata

f t, y x esse simul æqualia quadrato q r, & rectam y x repræsentare sinum complementi arcûs d e. Cùm igitur per propositionem quartam sinus versus arcûs d e sit sinus totus d g vel y f imminutus sinu x y complementi, patet rectam f x esse æqualem sinui verso d z. Tribus igitur rectis d z, d e, d a æquales sunt tres, f x, f o, a c vel d a: atqui ex corollario octauæ sexti Euclidis tres d z, d e, d a sunt proportionales; igitur tres f x, f o, a c vel d a sunt proportionales, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Quod si punctum e cadat inter n & a, tunc sinus versus componetur ex rectâ q r & ex rectâ f t, vt ex eadem quarta liquet. Vnde præterea constat duas simul figuras h x q r, r q i u a continentes sinus versos qui toti semicirculo d n a respondent, esse æquales parallelogrammo h A C a. Similis est ratio si sumantur duo simul arcus vtrinque æquales, & ad centrum g eodem respectu positi; ambo enim æquant parallelogrammum altitudinis q r, baseos æquantis eam rectæ a h portionem cui duo illi arcus sunt simul æquales.

COROLLARIVM II.

Quoniam tres figuræ quarum prima est parallelogrammum a c D h, secunda est quadrans h o c a cyclocylindricæ figuræ, tertia est h x q i u a cuius dimetientes æquant sinus versos iam dictos, habent dimetientes l f, f o, f x proportionales, apertum est ad positionem rectæ a c, cylindri, circumuolutione parallelogrammi a c D h circa rectam a h manentem geniti sectionem parallelam plano s a c, esse ad sectionem conoideos geniti circumuolutione figuræ h o c a circa eandem a h manentem, vt est figura plana parallelogramma a c D h ad *figuram sinuum versorum* h x q i u a: ita enim vocetur.

PROPOSITIO XIV.

Iisdem manentibus cylindrus supra descriptus respondens toti parallelogrammo a c D h est ad conoides genitum ex quadrante cyclocylindricæ respondens toti rectæ a h, vt binarius ad vnitatem. Quod si ad positionem plani s a c sumantur quæuis duæ portiones cylindri & conoideos inter eadem plana condicta & inæqualiter à puncto r remota interceptæ, conoideos portio ad portionem cylindri habebit porportionem certo quodam modo notam.

Quoniam enim parallelogamum a c D h, quadrans h o c a cyclocylindricæ figuræ, & figura constans finibus versis habent parallelas rectæ a c continuè proportonales, vt ex superiore liquet, dicylindraceum genitum ex quadrante h o c a in seipsum ducto ad positionem plani s a c, erit ad positionem plani s a c æquale cylindraceo altitudinis a c, cuius basis sit figura constans finibus versis, vt ex vndecima quarti tetragonismicorum liquet. Igitur cùm dicylindraceum genitum ex parallelogrammo a c D h in se ducto, & cylindraceum altitudinis a c, cuius basis sit figura h x q i u

a ex si-

a ex finibus versis constans habeant eandem altitudinem a c, erunt ad positionem rectæ a c vt bases; ergo dicylindraceum ex parallelogrammo a c D h in se ducto ad dicylindraceum ex quadrante h o c a in se ducto ad positionem plani s a c, est ad positionem rectæ a c condicta ratione vt parallelogrammum a c D h ad figuram h x q i u a ex finibus versis: ergo vt ex decima nona primi libri constat ita quoque est cylindrus ad conoides.

Igitur cùm ex corollario primo superioris, basis ex finibus versis respondens toti h D c a sit æqualis parallelogrammo A C a h. quod est dimidio parallelogrammi a c D h æquale, patet cylindrum genitum ex parallelogrammo a c D h integro ad conoides genitum ex quadrante cyclocylindricæ h o c a integro esse vt binarium ad vnitatem, quod erat vnum ex propositis. Simili verò ratione ostenditur si vltra punctum r sumantur vtrinque f r, r m æquales, portionem cylindri respondentem rectæ d m inter plana ad planum s a c parallela esse ad conoidis portionem inter eadem plana iacentem, vt est binarius ad vnitatem.

Quòd si vltra r ad partes h sumpta sit portio quæuis cylindri respondens rectæ r f, cùm sinus versi positi inter r & h sint æquales rectæ q r imminutæ dimetiente semicunei expansi h x q A, & quadratura figuræ h x q A obtineatur ex nona propositione, apertum est figuram h x q r ex finibus versis constantem vnà cum figura h x q A notà esse æqualem dimidio parallelogrammi altitudinis a c, baseos r h: ergo dicylindraceum genitum ex parallelogrammo p r f l in se ducto ad positionem plani s a c, ad portionem dicylindracei similiter geniti ex cyclocylindricæ quadrante h o c a in se ducto se habet vt parallelogrammum p r f l ad parallelogrammum y q r f imminutum figura q x y nota: sed ita etiam se habet portio cylindri ad portionem conoideos, vt ex supra monstratis liquet: igitur portio conoideos ad portionem cylindri est in isto casu vt parallelogrammum y q r f imminutum noto spatio ad parallelogrammum r p l f duplum ipsius y f r q. Hinc verò apertum est si ad partes a sumatur quæuis recta r m, vt est parallelogrammum q r a C altitudinis q r auctum portione semicunei primi q i u C expansi ad parallelogrammum F p r m altitudinis a c duplæ ipsius q r, baseos eiusdem r m, ita esse portionem conoideos cyclocylindrici ad portionem cylindri, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam tres rectæ x f, f o, f l sunt proportionales, & figura h x q r est parallelogrammum A q r h imminutum rectilineo noto æquante figuram A q x h, patet ex vigesima octaua quarti tetragonismicorum axe libræ planæ r h sustentaculo u G, quod latus est parallelogrammi h a u G, dimidium condicta ratione sumptum figuræ h x q r imminutæ figura nota A q x h aptatum sustentaculo iam dicto æquiponderare condicta ratione ad rectæ a c positionem, figuræ h o E r vt iacet manenti; reliquæ au-

tem figuræ E r a c æquiponderare dimidium parallelogrammi altitudinis q r aucti portione nota semicunei primi expansi q i u C.

SCHOLIVM.

Doctissimus D. de Fermat methodo subtilitatis prorsus mirabilis istam proportionem in quacunque primi nominis cyclocylindrica mihi demonstrauit; quam quidem methodum suis in operibus, quæ tota Europa enixè expetuntur, edet, vti spes est, Amicorum omnium precibus tandem victus.

PROPOSITIO XV.

IIsdem manentibus (*Fig.* 14.) compleatur quadratum d a u H & in e o ponatur H u axis parabolæ H m a cuius vertex H, ordinatim applicata u a: In circuli d e a diametro d a sumptum sit quoduis punctum z & per illud ducta e z ordinatim applicata occurrens rectæ u H in P, parabolæ in puncto m.

Ostendendum est recta n P m esse æqualem rectæ e t dimetienti cyclocylindricæ nondum expansæ: ac proinde cyclocylindricæ quadrantem nondum expansum esse parabolam H m a u translatam in peripheriam d e a, illique insistentem ad positionem rectæ a s.

Quoniam enim ordinatim applicata u a æqualis est axi H u, latus rectum parabolæ erit æquale rectæ H u vel d a; ergo rectangulum u H P est æquale quadrato P m: sed rectangulum a d z est æquale per corollarium octauæ sexti libri Euclidis quadrato rectæ d e vel e t: ergo cum rectangula a d z, u H P sint æqualia, erunt quoque P m, e t æquales: igitur cyclocylindricæ quadrans nondum expansus est parabola H m a u translata in peripheriam d e a ad positionem rectæ u a, illique insistens ad positionem rectæ s a, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hinc licet inferre cyclocylindricæ figuræ quadrantem h o c a nihil aliud esse quàm parabolam expansam, quæ ante quam expanderetur erat H m a u, & ad positionem rectæ a s super limbo semicirculi d e a insistebat. In hac verò extensione istud seruatur vt arcus d e a conuertatur in rectam sibi æqualem, & singulæ illius arcûs portiones extensæ in rectas æquales retineant illas ipsas ordinatim applicatas quæ ipsis competebant ante extensionem. Simili prorsus pacto expansus cuneus primus h q a est semicirculus d n a expansus ita vt curua a n d conuertatur in rectam a h sibi æqualem, & ordinatim applicata f λ ad a b basim expansi semicunei h λ q a sit æqualis ordinatim applicatæ z e ad diametrum d a semicirculi d n a, rectâ h f æquante arcum de. Itaque figura h q a est semicirculus d e a expansus quatenus curuatura d e a intelligitur in rectam a h expandi retentis ordinatim applicatis iisdem parallelis rectæ g n. Est autem cuneus primus expansus quatenus superficies cylindrica cunei primi noti insistens ad positionem rectæ a s super peripheria d n a intelligitur

expandi in rectas parallelas rectæ a h, quarum singulæ sunt æquales peripheriæ ad cuneum attinenti circulorum parallelorum basi cylindri. Denique si in plano f a g recto ad planum d a c, intelligatur triangulum rectangulum g a s; in semicylindro cuius basis d e a g, planum f g n auferet semicuneum primum interceptum planis n g a, f g n, f g a. Superficies autem cylindrica ipsius semicunei erit triangulum g a s ad positionem f a c translatum in curuam a n, & illi insistens ad positionem rectæ a s. Pari de causa superficies semicunei eadem est quadrans circularis insistens super semidiametro g n translatus in ipsam superficiem ad positionem plani f a g. Porrò dum triangulum vel aliud quid translatum dicimus, nolumus intelligi post translationem manêre æquale sibi ipsi ante translationem sumpto; id enim apertè falsum est: sed solùm quocunque plano ad planum f a c parallelo secetur triangulum f g a & cunei superficies illa, sectionem trianguli & superficiei esse inter se æquales. Quæ autem de cuneo primo scripsimus possunt, vt patet, proportione quadam applicari cuneo secundo, qu vt patet ex corollario secundo decimæ tertiæ & ex ipsa decima tertia expandetur in figuram sinuum versorum ibidem definitam & demonstratam.

PROPOSITIO XVI.

Reuocato (*Fig.* 15.) schemate decimæ tertiæ sit h o c a paruæ semicycloideos pars superior, genita quadrante circulari d b c a: sit h q i u a figura ex sinibus versis: sit d p c limbus parabolæ cuius axis a c, ordinatim applicata a d: ducta sit b m quælibet ordinatim applicata ad circuli semidiametrum c a occurrens limbo parabolico in p: per b ducta sit b o æquidistans rectæ a d, & occurens limbo h o c in o; per o acta sit o f parallela rectæ a c occurrens lineis h a, h q u in f, x.

Ostendendum est rectas m p, f x esse æquales, ac proinde quo pacto figura d b c a expanditur in figuram h o c a, eodem expandi figuram d p c in figuram ex sinibus versis h x q i u a.

Quoniam enim per tertiam tertij tetragonismicorum tres rectæ u a, m b, m p sunt proportionales; tres autem u a, f o, f x sunt proportionales per decimam tertiam, patet rectas f x, m p esse æquales; ac proine verum id esse quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Sicuti quadrans circularis d b c a expāditur in paruam semicycloidem superiorem h o c a, ita parabola d p c a in figuram ex sinibus versis u q h a: vnde fit vt sicuti tres a c, m b, m p ante expansionem sunt proportionales, ita post expansionem tres a c, f o, f x maneant proportionales; potest itaque figura u x h a appellari etiam parabola expansa, in sensu videlicet iam exposito.

PROPOSITIO XVII.

IIsdem manentibus compleatur quadratum c a d e, & ducatur eius diameter d c: completo parallelogrammo u a h l, intelligatur parua semicycloides superior a y l h subcontrariè respondens superiori semicycloidi h o c a. Recta f x occurrat limbo a y l in y, & rectæ u l in z.

Ostendendum est tres rectas u a vel z f, f y, z x esse proportionales, figurámque a y l h esse triangulum c d e expansum sicuti in superioris corolario ostendimus u i x h a esse parabolam d p c a expansam.

Recta o b producta occurrat rectæ a c in n, & rectam b rectis c d, c e in r & g. Igitur per secundam huius libri rectæ b n, f y sunt æquales: sed latera b n, g c parallelogrammi g b n c, sunt æqualia: igitur rectæ f y, g c sunt æquales: sed in triangulo c d e rectangulo cuius duo latera c e, d e sunt æqualia, applicata r g æqualis est lateri c g: ergo rectæ r g f y sunt æquales. Igitur a y l h est triangulum c d e expansum iuxta explicationem suprà traditam.

Rursus quoniam recta z f æquat rectam m g, & recta f x rectam m p per superiorem, residua z x æquabit reduam p g: tres igitur rectæ z f, f y, z x æquant tres rectas m g, g r, g p singulæ singulas: ergo cùm per duodecimam tertij tetragonismicorum tres rectæ m g, g r, g p sint proportionales, erunt quoque & tres z f, f y, z x. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Nouem, quæ sequuntur, propositiones adiecimus ineunte hoc mense Februario anni labentis 1659. Postea quàm quatuor hos de cycloide libros Regius Magistratus nostro rogatu censuit obsignandos, quod eiusdem autoritate & manu factum deinde est, vt certò omnibus constaret nos eo ipso tempore quo calculum sexdecim casuum edidimus, habuisse exaratos eos libros quorum in eo calculo mentionem facimus. Has porrò propositiones non putamus fore Lectori iniucundas, cùm cyclocylindrica tractatum mirificè amplificent.

PROPOSITIO XVIII.

PAarabolam f a g tangat (*Fig. 16.*) recta ad in a, eiusque axis sit a e: illius quemlibet arcum h n subtendat recta h n non parallela rectæ a d, quæ bifariam secta sit in i, & per i ducta sit i l parallela rectæ a e occurrens arcui h n in l: ex d e abscissa sit a s æqualis rectæ i l, & per s ductæ sint vtrinque ordinatim applicatæ f g, f f ad axem a e, per f, g, h, n ductæ sint f r, g m, h c, n d parallelæ axi a e & occurentes tangenti in r, m, c, d. Parabolæ f a g latus rectum a C respondeat axi a e.

Ostendendum est rectas r m, c d esse æquales, & si describantur semicirculi r B m, c t d ex centris a, x, sumptisque a y, x z æqualibus agantur y q, z p æquidistantes axi a e, & occurrentes in A, u, q, b, o, p lineis B m, a g, g s, t d, l o n, h i n, rectas q u, o p esse æquales: & tres rectas C a, A y, q u, vel C a, z b, o p esse proportionales.

Rectas f g, c d esse æquales patet ex methodo propositionis 267. & 266. Gregorij à S. Vincentio de Parabola. Præterea quoniam rectangulo C a s æquale est quadratum ordinatim applicatæ f g vel a m, vel a B, tres rectæ C a, a B, a s, vel tres C a, t x, i l erunt continuè proportionales: ergo per tertiam tertij tetragonismicorum tres rectæ C a, y A, q u, vel tres C a, z b, p o erunt proportionales: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Si recta a s non esset axis, sed quæuis alia diameter, r B m, c t d non forent semicirculi, sed semiellipses quarum semidiametri coniugatæ r a, a B, vel c x, x t forent inter se æquales: Cætera verò perinde demonstrarentur, vt patet. Cæterùm præsentem propositionem cùm haberemus in nostris manuscriptis nondum editis aliter demonstratam, & pendentem ex nonnullis aliis, libuit illam breuitatis studio monstrare adhibita methodo Gregorij à S. Vincentio.

PROPOSITIO XIX.

Intelligatur (*Fig.* 17.) semicirculus f e g diametro f g, centro s descriptus circa manentem f g volui & describere sphæricam superficiem, cuius centrum erit s, diameter f g. Ad diametrum f g semicirculi f e g excitetur perpendicularis s e ex centro s ad peripheriam educta, sitque e a dupla rectæ s e: ponatur f a g parabola cuius axis a s, basis f g. Ex rectâ f g vtrinque productâ in infinitum abscindatur quælibet recta d p, quæ vel tota sit interpuncta f, g vel saltem aliqua ipsius pars; & y eius bisectio non congruat puncto s. Per d, p ducantur d c, p b parallelæ axi s a occurrentes limbo parabolico in c, & b: iungatur recta c b occurrens rectæ f g in r: rectangulo contento sub rectis s e, d c fiat æquale rectangulum contentum sub rectis d r, r q: describatur parabola r t u cuius axis r d, latus rectum r q. Intelligatur cylindrus cuius basis sit circulus centro y, semidiametro y p vel y h descriptus, axis verò sit y x: parabola u t r d intelligatur circa axem manentem d r volui, quousque planum u d r stet rectum ad basim cylindri; ad positionem plani x y h intelligatur parabola u t r d, vel eius portio u t p d transferri in superficiem cylindricam iuxta methodum traditam in decima quinta propositione.

Ostendendum est parabolam ita translatam esse portionem superficiei cylindricæ inclusam hemisphærio quod supra basim cylindri abscindit circulus centri s semidiametri f e: ac proinde duplum illius parabolæ ita translatæ esse totam portionem superficiei: cylindricæ comprehensæ intra sphæram centro s, semidiametro f f descriptam.

Recta c d producta occurrat peripheriæ f e g in z: ergo per tertiam tertij tetragonismicorum erunt tres rectæ f e, z d, d c proportionales, & rectangulo e s, d c erit æquale quadratum ordinatim applicatæ d z ad f g diametrum semicirculi f z g generantis sphæricam superficiem; idemq; ostenditur in quacunque alia ordinatim applicata p n. Cùm ergo rectangulo contento sub rectis e s, d c æquale sit rectangulum d r q siue quadratum d u, erunt d u, d z æquales: simili prorsus pacto ostendentur p t, p n æquales. Igitur rectæ p t, d u non transferentur, sed manentes in plano u r d erecto ad basim cylindri occurrent in t & u superficiei cylindricæ & sphæricæ simul.

Rursus in recta d p sumatur quodcunque aliud punctum y, & per illud ducta sit y h ordinatim applicata ad d p diametrum circuli d h p, quæ occurrat peripheriæ f e g in m, rectæ c r in i, curuis u t r, f a g in o & l. Igitur per superiorem rectangulo contento sub rectis f e, i l æquale est quadratum y h: Præterea rectangulo contento sub rectis f e, y i æquale esse quadratum y o patet, quia quadratum d u ad quadratum y o est vt recta d r ad y r, cùm sint æqualia rectangulis d r q, y r q: sed rectangulum altitudinis e s baseos d c est est ad rectangulum eiusdem altitudinis, baseos y i vt recta d c ad y i, hoc est in triangulo c d r vt recta d r ad y r; ergo vt quadratum d u ad y o, ita est rectangulum altitudinis f e baseos d c, ad rectangulum eiusdem altitudinis, baseos y i: ergo cùm illud rectangulum sit æquale quadrato d u, rectangulum altitudinis f e, baseos y i erit æquale quadrato y o. Duo igitur quadrata y o, y h æquant duo rectangula altitudinis f e, basium i l, i y, vel æquant rectangulum altitudinis f e, baseos y l: sed rectangulo isti æquale est per tertiam tertij tetragonismicorum quadratum y m; ergo quadrato y m æqualia sunt duo simul quadrata y h, y o: ergo cùm manente c d r plano recto ad basim cylindri, rectæ o y, y h constituant angulum rectum, & perpendicularis o y transferatur ex puncto y in punctum h; circulus interuallo rectæ m y descriptus, motu semicirculi describentis peripheriam sphæricam, transibit per punctum o translatum: ac proinde punctum o translatum erit in peripheriâ cylindri & simul in peripheriâ sphæricâ, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Parabolam cuius vertex congruat termino diametri circularis, & quæ ex superioris methodo sit translata, quadrare & expandere.

Reuocetur ſchema decimæ quintæ, (*Fig.* 14.) & in eo datus ſit ſemicirculus d e a centro g, ſemidiametro g n vel g d deſcriptus, quem tangat recta d H ſiue ſit æqualis rectæ d a, ſiue inæqualis, & completo parallelogrammo H d a u intelligatur in eo parabola H m a cuius axis H u, ordinatim applicata u a. Ponatur curuæ a e d æqualis recta a h, & deſcribatur cuneus expanſus h o c a reſpondens quadranti circuli a d b c centro a deſcripti; ex a c auferatur a M æqualis rectæ a u & deſcribatur cuneus proportionalis expanſus cuius dimetiens f N ad f o ſit vt recta a M ad a c, vel vt recta H d ad d a. Dico figuram h N M a eſſe æqualem parabolæ tranſlatæ in peripheriam d e a, & eſſe ad quadratum a c vel a d, vt eſt recta d H ad d a. Quod ſi non ſumatur tota, ſed eius pars f N M a, aio illam eſſe ad partem f a c o vt eſt recta d H ad d a; partis verò f a c o quadratura abſoluta conſtat per nonam & vndecimam.

Si H d, d a ſint æquales, ex decima quinta propoſitione parabola tranſlata expanditur in figuram h o c a; ſi autem H d, d a ſint inæquales, patet figurarum h N M a, h o c a dimetientes parallelas rectæ a c eſſe inter ſe vt rectas H d, d a, vel vt rectas a M, a c: ac proinde ex ſexta primi tetragoniſmicorum figuram h N M a eſſe condicta ratione ad figuram h o c a, vt eſt recta a M ad a c.

Vt autem portionem f o i c a reſpondentem portioni parabolæ tranſlatæ in arcum a n e inueniamus, hac methodo vtemur. Completo ſemicirculo d b c x l, ex a c auferatur recta a r æqualis rectæ d e; per r agatur recta r x parallela rectæ a h occurrens peripheriæ l x c in x. & limbo h i c in o; per x agatur x p complens parallegrammum a r x p; compleatur quoque parallelogrammum a r o f. Ex methodo nonæ patet figuræ f o i c a æquale eſſe rectangulum l a p, ex prima verò eiuſque corollario liquet rectas f o, d e eſſe æquales, & arcui a n e rectam a f eſſe æqualem. Habemus igitur portionem parabolæ tranſlatæ inſiſtentem arcui a n e eſſe æqualem rectangulo l a p; portionem verò reliquam inſiſtentem arcui d e eſſe æqualem rectangulo a l p. Ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Quando recta g d bifariam ſecatur in z, cùm tres rectæ z d, d e, d a ſint proportionales, patet rectam d e vel a r eſſe æqualem rectæ d g, ac proinde eſſe dimidium rectæ a c vel a d. Ergo in iſto caſu recta a p ad a l eſt poteſtate vt ternarius ad quaternarium; portio verò parabolæ H m a u tranſlatæ in arcum d e, ſi H d, d a ſint æquales æquat rectangulum a l p; ſi verò ſint inæquales, ſe habet ad rectangulum a l p, vt recta H d ad d a. Atque ex calculo huius casûs manifeſta eſt methodus calculi reliquorum omnium.

PROPOSITIO XXI.

Sit (*Fig.* 18.) vt in decima nona f e g ſemicirculus cuius motu circa diametrum manentem f g generetur ſphærica ſuperficies

habens centrum s, diametrum f g, ac proinde circulum maiorem fe g qui diuidat sphæram in duo hemisphæria, superius ad partes puncti x quòd extat plano f e g, & inferius oppositum. In diametro f g sumatur recta g d minor rectâ g f, bifariámque secetur in y; centro y per d, g describatur circulus d h g i qui fiat basis cylindri cuius axis y x sit perpendicularis ad planum circuli (de isto enim cylindro loquimur quoties aliud non indicamus, vt monuimus intio præsentis libri.) Per d ducta sit d z ordinatim applicata ad f g diametrum semicirculi f e g.

Ostendendum est portionem superficiei cylindricæ inclusam superficie illa sphærica esse æqualem quadruplo rectanguli g d z.

Describatur vt in decima nona parabola g u d, & parabola f a p, cuius limbo recta z d occurrat in c: ergo vt ibi ostendimus d u ordinatim applicata parabolæ u p d transferendæ erit æqualis rectæ d z: igitur per superiorem parabola translata siue portio cylindricæ superficiei arcui d h g insistens & comprehensa hemisphærio superiore est ad quadratum d g sicut recta d g vel p d ad rectam d u vel d z: ergo æquat rectangulum g d z: ergo duæ portiones insistentes arcubus d h g, d i p æquant bis rectangulum g d z: ergo cùm totidem insistant iisdem arcubus ad partes hemisphærij inferioris: quater rectangulum p d z erit æquale superficiei cylindricæ inclusæ superficie sphæricâ, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Ex superioris demonstratione nota fit quadratura cuiuslibet portionis ex ista superficie cylindrica intra sphæram contentâ abscissæ per planum h y x, vel per aliud quodcunque illi parallelum. Porrò ex definitionibus initio libri præsentis præfixis patet istam portionem cylindricam sphærâ conclusam, quando punctum y congruit puncto s, esse cyclocylindricam primariam; quando autem non congruit, cyclocylindricam secundi nominis. Vnde insuper liquet præsentem propositionem esse longè ampliorem decimâ, ibi enim quadratura solius cyclocylindricæ primariæ tradita est, hîc & illius primariæ primi nominis, & primariæ etiam secundi nominis, quoties recta g d minor est rectâ g f: nam si fuerit non minor, cylindrica superficies non secat sphæram. Pes porrò circini qui figitur intelligi debet collocatus in puncto s, vt describatur cyclocylindrica primaria primi & secundi nominis definita initio libri, & congruens portioni cylindricæ clausæ intra sphæram semidiametri s p. Ista autem quadratura ita amplè sumpta non dubito quin nouitate sua plurimos teneat suspensos, & quin comparantes quadraturam circuli vnà cum quadratura istius quasi-circuli dubitaturi primo aspectu sint vtra difficilior existat: vtraque enim figura est portio superficiei cujusdã intra sphæram inclusa; circulus quidem superficiei planæ, altera verò superficiei cylindricæ & minùs

minùs tractabilis. Cæterùm licet postquam res est monstrata, non videatur multò difficilior quadratura cyclocylindricæ primariæ secundi nominis, quàm primi; fuit tamen mihi longè abstrusior, quousque ad hanc methodum omnia oculis lustrando perductus fui. Neque vnquam mihi proposita ab vllo fuit alia cyclocylindrica præter eam qua pes circini collocatur in ipsa superficie cylindrica, non autem extra illam, vt fit in cyclocylindricis secundi nominis.

PROPOSITIO XXII.

IIsdem manentibus cylindrus genitus circumductu rectanguli cuius latus circumactum æquet rectam f e, est ad solidum genitum ex cyclocylindricæ, de qua superior propositio agit, circumuolutione circa basim suam, vt est recta f e ad dimidium rectæ d c.

Ista propositio demonstratur eadem prorsus methodo, qua vsi sumus in demonstranda decima quarta superiore. Quando enim punctum d puncto s congruit, & recta d c congruit rectæ f a, fit casus illius decimæ quartæ; ac proinde cylindrus est duplus solidi, quia parallelogrammum quo circumacto gignitur cylindrus est duplum spatij æquantis figuram sinuum versorum, in quam expanditur triangulum c g d, vt in corollario decimæ quintæ monuimus. Atque in aliis casibus pro figura ex sinibus versis vsurpatur alia illi proportionalis cuius dimetientes quæ ad rectam f a parallelæ sint, se habent ad dimetientes figuræ sinuum versorum, sicut se habet recta c d ad d g, vel sicut quadratum d z ad d g. Ergo (sicuti in vigesimæ propositionis pari causa ostendimus) proportionalis ista figura ad figuram ex sinibus versis constantem se habet ad positionem rectæ a s, vt recta c d ad d g: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Si non sumatur totus cylindrus sed pars eius cum parte solidi intra easdem ad rectam f a parallelas positi, eorum proportio inuenietur adhibita methodo corollarij illius decimæ quartæ. Quando autem totus sumitur, si d g fit quadrans rectæ g f, cylindrus ad solidum est vt octonarius ad ternarium: si verò d g sit dodrans eiusdem g f, cylindrus ad solidum est vt octonarius ad ternarium, & ita de aliis. Hinc verò patet propositionem istam patêre latiùs decimâ quartâ.

PROPOSITIO XXIII.

IN quibuscunque (*Fig.* 19.) cyclocylindricis secundariis tam primi quam secundi nominis inuenire proportionem cylindri & solidi de quibus agitur in pari causâ superioris propositionis pro cyclocylindricis primariis vtriusque nominis.

Maneat vt in decima nona f e g semicirculus genitor sphęrę circa axem f g, & parabola f c g, cuius axis f a æquet rectam f s, vel f e: d p sit diameter circuli d h p, qui fiat basis cylindri, cuius axis y x perpendicula-

ris ad planum baseos. Per e ducatur e t parallela rectæ f g, & completis parallelogrammis f e t p, d n t p; ponatur t i recta æqualis peripheriæ p h d, & super t i intelligatur constructa figura i l m t proportionalis sinuum versorum, cuius dimetiens ad dimentientem figuræ sinuum versorum sit vt recta c d ad d r. Per p agatur p u complens parallelogrammum b c u p; recta c u producta occurrat limbo l m t in m. Quando punctum g cadit inter d & r, vt in primo schemate, addatur rectæ m n recta n q æqualis rectæ c u vel b p; quando autem r cadit inter d & p dematur rectæ m n recta n q; per q agatur q o parallela rectæ e t vel f g. Dico portionem figuræ proportionalis i l m t insistentem rectæ q o ad partes l, habere proprietatem quæ demonstratur in decimâ tertiâ, hoc est esse tertium gradum quorum primus ad positionem rectæ f e sit lateris f e parallelogrammum quo circumacto generatur cylindrus, secundus sit figura cyclocylindrica insistens rectæ t i, cuius circumductu generatur solidum quod cylindro comparatur: eorum verò graduum dimetientes sint ad positionem rectæ f e proportionales. Igitur per demonstrata in corollario secundo decimæ tertiæ propositionis, & per methodum decimæ quartæ, cylindri quælibet portio intercepta planis ad basim ipsius parallelis est ad solidum iisdem planis contentum, vt parallelogrammi portio iacens inter eadem plana parallela se habet ad portionem figuræ super recta q o consistentis, cuius dimetiens est q m. Reliqua patent ex suprà monstratis: ergo &c. quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXIV.

IN secunda figura superioris propositionis punctum d, congruat puncto s (*Fig.* 20.) & ducta b z ordinatim applicatâ ad axem a s parabolæ f a g, sint a s, s z æquales.

Ostendendum est cylindrum de quo agitur in superiore propositione, nempe cuius basis sit circulus diametri a e ad totum solidum genitum circumductu figuræ totius cyclocylindricæ secundariæ esse in præsenti casu, vt est circulus ad quadratum quod potest latus quadrati circulo inscripti ad ipsum circulum.

Quoniam recta a z ad a s est vt binarius ad vnitatem; erit f g ad z b potestate vt est vnitas ad binarium: rectæ autem r p, r s erunt inter se æquales, ac proinde recta f p ad f r erit potestate vt quaternarius ad vnitatem, sed eadem f p vel z b ad f g est potestate vt quaternarius ad binarium, ergo recta f g ad f r est potestate vt binarius ad vnitatem: ergo recta e q æquat rectam p b vel d a. Rursus quoniam figuræ proportionalis sinuum axis i l ad f p est sicut recta a s ad f r, recta r x dimidium rectæ i l erit æqualis rectæ f a: sed eidem est æqualis recta e q: ergo recta o q producta conuenit in punctum x. Igitur ex generatione figuræ sinuum versorum proportionalis, recta x q o aufert ex ipsâ proportionali

figuram x l m o quę ad quadratum ſemidiametri r p vel i s eſt vt recta i a ad ſ r, vel vt diameter quadrati ad latus; ergo figura x l m o æqualis eſt rectangulo r ſ a.

Rurſus quoniam rectangulum ſub ſ r ſemidiametro circuli d h p, & ſub t i rectâ æquante arcum ſ h p eſt æquale circulo diametri ſ p, vt ex tertia primi liquet, recta verò i t bifariam ſecatur in u vt ex generatione figuræ ſinuum verſorum patet, rectangulum contentum ſub ſemidiametro ſ r vel ſ y & ſub recta i u erit æquale ſemicirculo diametri d p: ergo rectangulum i u A contentum ſub ſ a vel u A & ſub i u erit ad ſemicirculum d h p vt recta a s ad ſ r, vel vt rectangulum a ſ r ad quadratum ſ r. Quoniam igitur vt rectangulum a ſ r ad quadratum ſ r, ita eſt rectangulum i u A ad ſemicirculum ſ h p, erit alternando vt rectangulum a ſ r ad rectangulum i u A, ita quadratum ſ r ad ſemicirculum: ſed rectangulum a ſ r eſt æquale figuræ x q o m l: ergo figura x q o m l ad rectangulum i u A, hoc eſt ſolidum ad cylindrum eſt vt quadratum ſ r ad ſemicirculum, vel vt quadratum quod poteſt latus quadrati circulo inſcripti ad ipſum circulum, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Tres rectas ſ r, ſ g, ſ p eſſe proportionales quamcunque porportionem habeat recta a s ad a z, & ſiue z cadat intra puncta a, s, ſiue extra, patet ex demonſtrandi methodo: nam vt recta a s ad a z, ita eſt poteſtate ordinatim applicata ſ g ad z b: ſed vt a s ad a z, ita eſt ſ r ad z b, vel ad ſ p: ergo vt ſ r recta ad ſ p, ita eſt poteſtate ſ g ad eandem ſ p æqualem rectæ z b: igitur tres rectæ ſ r, ſ g, ſ p ſunt proportionales.

COROLLARIVM II.

Ex methodo præſentis caſûs poterit facili negotio fieri progreſſus ad quoſcunque alios, quamuis puncta d, & s diſcrepent: ac proinde iſti methodo ſatis ſit vnus iſte calculus. Ex demonſtratis autem circa cyclocylindricam manifeſtum eſt faciliùs eſſe quadrare ſolidum genitum ex quacunque cuiuſcunque nominis cyclocylindrica, quàm illam quadrare: ſolidi enim quadraturâ datâ circuli quadraturâ demonſtrauimus pro omni caſu cuiuſlibet nominis cyclocylindricæ; cùm tamen quadraturam cyclocylindricarum vtriuſque nominis primariarum tantummodo dederimus, prætermiſſa quadraturâ ſecundariarum. Hoc tamen habemus quadraturam cyclocylindricarum datam non pendere à quadratura circuli; cùm illa ſolidorum indę pendeat.

PROPOSITIO XXV.

Reuocato ſchemate (*Fig.* 17.) propoſitionis decimæ nonæ, circulus ſphæræ genitor motu circa axem f g eſto f e g, & baſis cylindri d h p: ſemidiametri eius dimidium y E ita ſecetur in V vt tres rectæ p r, V E, V y ſint proportionales: ex recta y p abſcindatur y λ

dupla rectæ y V, per λ ducantur λ D, λ H ordinatim applicatæ ad d p diametrum circuli d h p, & ad r λ axem parabolæ r t u.

Ostendendum est parabolam u t r d translatam lege præscripta in superficiem cylindricam baseos d h p ita respondere illi figuræ quæ in eadem superficie d h p intelligitur gigni ex rectis à puncto λ eductis ad singula peripheriæ d h p puncta, & postea erectis perpendiculariter ad basim, vt sicut est recta λ D a d rectam λ H, ita sint singulæ dimetientes parabolæ translatæ ad singulas istius figuræ insistentes eidem peripheriæ puncto.

Ex constructione patet trium rectarum proportionalium quarum prima V y, secunda V E, tertia sit p r, rectam y λ continere bis primam; rectam y p vel y h bis primam & bis secundam; ergo y r composita ex y p & ex p r tertiâ continebit bis primam, bis secundam & semel tertiam: ergo ablatâ y λ bis prima, residua y λ vel illi æqualis r B contineat necesse est, vt attendenti patet statim, bis secundam semel tertiam: ergo duæ simul y r, r B vel tota y B continent bis primam, quater secundam, & bis tertiam. Igitur y λ æquat bis primam, y p verò bis primam & bis secundam, y B denique bis primam, quater secundam & semel tertiam; vel si bis prima sumatur pro primo termino, recta y λ est primus terminus; recta y p primus & secundus; recta y B primus, secundi duplus, & tertius: ergo vt ex decursu propositionis septimæ libri tertij tetragonismicorum liquet, tres rectæ y λ, y p, y B sunt proportionales.

Quoniam igitur tres rectæ y λ, y p, y B sunt proportionales, & rectæ λ B dimidium r occupat vertex parabolæ r t u, ex trecentesima prima propositione libri quinti Gregorij à S. Vincentio constat vt est ordinatim applicata λ D ad λ H, ita rectam à puncto λ eductam & ad quoduis circuli d h p punctum terminatam esse ad parabolæ r t u ordinatim applicatam axi r i per idem peripheriæ punctum ductam, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quando punctum r siue vertex parabolæ r t u congruit puncto p, ex trecentesima propositione libri quinti Gregorij à S. Vincentio, & ex hactenus demonstratis à nobis satis constat proprietatem iam explicatam competere huic casui. Quando autem punctum r caderet inter y & p, eiusmodi proprietas cessare conuincitur ex vi demonstratorum. Quoties autem D λ, λ H fuerint æquales, parabola r u d translata erit vt patet, ipsa figura descripta in superficie cylindri baseos d h p, cuius dimetientes æquant rectas ex puncto λ eductas ad perimetrum d h p.

PROPOSITIO XXVI.

ESto semicirculus f h d g (*Fig.* 21.) in cuius diametro f g sumpta sint duo puncta a, b æqualiter remota à centro y; per b, a eductæ sint ordinatim applicatæ a c, b d, & per c, d tangentes c e, d F,

per centrum y educta sit ordinatim applicata y h: eductæ etiam sint rectæ a h, b h ex punctis a, b ad h.

Ostendendum est sumpto quouis puncto m in peripheria circuli & eductis rectis a m, b m, duo quadrata a m, b m simul esse æqualia duplo quadrati a h. Et si ex puncto m excitetur m s perpendicularis ad planum circuli æqualis rectæ m b, figuram in superficie cylindri cuius basis sit f c d g comprehensam curuâ f c d g & lineâ descriptâ à punctis s, esse cyclocylindricam secundariam descriptam à circino cuius vnus pes hæreat in puncto a, interuallum autem inter extrema crurum puncta æquet rectam h r cuius quadratum sit duplum quadrati h a.

Rectæ a e, b F bifariam secentur in l, t, & describantur parabolæ l c, t d quarum vertices l, t, ordinatim applicatæ a c, b d; ex puncto m demittatur perpendicularis m u ad f h rectam. Patet duas istas parabolas esse easdem, & habere idem latus rectum; patet quoque ex superiore, rectam m b esse æqualem ordinatim applicatæ ad parabolæ t diametrum t b per punctum u ductæ; similitérque rectam a m æqualem esse ordinatim applicatę per u punctū actę ad axem parabolæ l c. Esto l q latus rectum parabolæ; igitur rectangulum q l u est æquale quadrato ordinatim applicatę vnius, & rectangulum sub q l & sub t u comprehensum est æquale quadrato ordinatim applicatæ alterius: ergo duo quadrata simul ordinatim applicatarum per u ductarum sunt æqualia rectangulo q l t quocunque cadat punctum u: ergo quando punctum u congruit puncto y, cùm a h, b h sint æquales, & duo quadrata a h, b h sint simul æqualia rectangulo q l t, patet duo quadrata ordinatim applicatarum ad parabolarum communem axem, vel duarum rectarum a m, m b vel m s esse æqualia quadrato h r: ergo recta a s est æqualis rectæ h r; ergo punctum s est in superficie sphæræ ex centro a descriptæ, cuius semidiameter æquet rectam h r, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Puncta a & b repræsentantur in schemate præsentis propositionis intra diametri f g terminos f, g: sed eadem est demonstrandi ratio si collocentur extra illos terminos, vt in e & F; ostendit enim Gregorius à S. Vincentio in propositione 303. de parabola, rectas ex punctis e, F eductas ad peripheriæ f h d g quodlibet punctum m esse æquales ordinatim applicatis certæ cuiusdam parabolæ. Hinc verò præterea conficitur præsentis propositionis methodo ampliorem euadere demonstrationem quam Gregorius à S. Vincentio fecit vltimam libri sui tertij. Hinc denique patet istam proprietatem non conuenire solis punctis f, g extremis diametri f g, quod tantum in Elementis Euclidis demonstratur.

PROPOSITIO XVII.

IIsdem manentibus compleatur quadratum c a d e, & ducatur eius diameter d c: completo parallelogrammo u a h l, intelligatur parua semicycloides superior a y l h subcontrariè respondens superiori semicycloidi h o c a. Recta f x occurrat limbo a y l in y, & rectæ u l in z.

Ostendendum est tres rectas u a vel z f, f y, z x esse proportionales, figurámque a y l h esse triangulum c d e expansum sicuti in superioris corolario ostendimus u i x h a esse parabolam d p c a expansam.

Recta o b producta occurrat rectæ a c in n, & rectam b rectis c d, c e in r & g. Igitur per secundam huius libri rectæ b n, f y sunt æquales: sed latera b n, g c parallelogrammi g b n c, sunt æqualia: igitur rectæ f y, g c sunt æquales: sed in triangulo c d e rectangulo cuius duo latera c e, d e sunt æqualia, applicata r g æqualis est lateri c g: ergo rectæ r g, f y sunt æquales. Igitur a y l h est triangulum c d e expansum iuxta explicationem suprà traditam.

Rursus quoniam recta z f æquat rectam m g, & recta f x rectam m p per superiorem, residua z x æquabit reduam p g: tres igitur rectæ z f, f y, z x æquant tres rectas m g, g r, g p singulæ singulas: ergo cùm per duodecimam tertij tetragonismicorum tres rectæ m g, g r, g p sint proportionales, erunt quoque & tres z f, f y, z x. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Nouem, quæ sequuntur, propositiones adiecimus ineunte hoc mense Februario anni labentis 1659. Postea quàm quatuor hos de cycloide libros Regius Magistratus nostro rogatu censuit obsignandos, quod eiusdem autoritate & manu factum deinde est, vt certò omnibus constaret nos eo ipso tempore quo calculum sexdecim casuum edidimus, habuisse exaratos eos libros quorum in eo calculo mentionem facimus. Has porrò propositiones non putamus fore Lectori iniucundas, cùm cyclocylindrica tractatum mirificè amplificent.

PROPOSITIO XVIII.

PAarabolam f a g tangat (*Fig.* 16.) recta ad in a, eiusque axis sit a e: illius quemlibet arcum h n subtendat recta h n non parallela rectæ a d, quæ bifariam secta sit in i, & per i ducta sit i l parallela rectæ a e occurrens arcui h n in l: ex d e abscissa sit a s æqualis rectæ i l, & per s ductæ sint vtrinque ordinatim applicatæ f g, f f ad axem a e; per f, g, h, n ductæ sint f r, g m, h c, n d parallelæ axi a e & occurentes tangenti in r, m, c, d. Parabolæ f a g latus rectum a C respondeat axi a e.

Ostendendum est rectas r m, c d esse æquales, & si describantur semicirculi r B m, c t d ex centris a, x, sumptisque a y, x z æqualibus agantur y q, z p æquidistantes axi a e, & occurrentes in A, u, q, b, o, p lineis B m, a g, g s, t d, l o n, h i n, rectas q u, o p esse æquales: & tres rectas C a, A y, q u, vel C a, z b, o p esse proportionales.

Rectas f g, c d esse æquales patet ex methodo propositionis 267.& 266. Gregorij à S. Vincentio de Parabola. Præterea quoniam rectangulo C a s æquale est quadratum ordinatim applicatæ f g vel a m, vel a B, tres rectæ C a, a B, a s, vel tres C a, t x, i l erunt continuè proportionales: ergo per tertiam tertij tetragonismicorum tres rectæ C a, y A, q u, vel tres C a, z b, p o erunt proportionales: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Si recta a s non esset axis, sed quæuis alia diameter, r B m, c t d non forent semicirculi, sed semiellipses quarum semidiametri coniugatæ r a, a B, vel c x, x t forent inter se æquales: Cætera verò perinde demonstrarentur, vt patet. Cæterùm præsentem propositionem cùm haberemus in nostris manuscriptis nondum editis aliter demonstratam, & pendentem ex nonnullis aliis, libuit illam breuitatis studio monstrare adhibita methodo Gregorij à S. Vincentio.

PROPOSITIO XIX.

Intelligatur (*Fig.* 17.) semicirculus f e g diametro f g, centro s descriptus circa manentem f g volui & describere sphæricam superficiem, cuius centrum erit s, diameter f g. Ad diametrum f g semicirculi f e g excitetur perpendicularis s e ex centro s ad peripheriam educta, sitque e a dupla rectæ s e: ponatur f a g parabola cuius axis a s, basis f g. Ex rectâ f g vtrinque productâ in infinitum abscindatur quælibet recta d p, quæ vel tota sit interpuncta f, g vel saltem aliqua ipsius pars; & y eius bisectio non congruat puncto s. Per d, p ducantur d c, p b parallelæ axi s a occurrentes limbo parabolico in c, & b: iungatur recta c b occurrens rectæ f g in r: rectangulo contento sub rectis s e, d c fiat æquale rectangulum contentum sub rectis d r, r q: describatur parabola r t u cuius axis r d, latus rectum r q. Intelligatur cylindrus cuius basis sit circulus centro y, semidiametro y p vel y h descriptus, axis verò sit y x: parabola u t r d intelligatur circa axem manentem d r volui, quousque planum u d r stet rectum ad basim cylindri; ad positionem plani x y h intelligatur parabola u t r d, vel eius portio u t p d transferri in superficiem cylindricam iuxta methodum traditam in decima quinta propositione.

Ostendendum est parabolam ita translatam esse portionem superficiei cylindricæ inclusam hemisphærio quod supra basim cylindri abscindit circulus centri s semidiametri f e: ac proinde duplum illius parabolæ ita translatæ esse totam portionem superficiei: cylindricæ comprehensæ intra sphæram centro s, semidiametro f f descriptam.

Recta c d producta occurrat peripheriæ f e g in z: ergo per tertiam tertij tetragonismicorum erunt tres rectæ f e, z d, d c proportionales, & rectangulo e s, d c erit æquale quadratum ordinatim applicatæ d z ad f g diametrum semicirculi f z g generantis sphæricam superficiem; idemq; ostenditur in quacunque alia ordinatim applicata p n. Cùm ergo rectangulo contento sub rectis e s, d c æquale sit rectangulum d r q siue quadratum d u, erunt d u, d z æquales: simili prorsus pacto ostendentur p t, p n æquales. Igitur rectæ p t, d u non transferentur, sed manentes in plano u r d erecto ad basim cylindri occurrent in t & u superficiei cylindricæ & sphæricæ simul.

Rursus in recta d p sumatur quodcunque aliud punctum y, & per illud ducta sit y h ordinatim applicata ad d p diametrum circuli d h p, quæ occurrat peripheriæ f e g in m, rectæ c r in i, curuis u t r, f a g in o & l. Igitur per superiorem rectangulo contento sub rectis f e, i l æquale est quadratum y h: Præterea rectangulo contento sub rectis f e, y i æquale esse quadratum y o patet, quia quadratum d u ad quadratum y o est vt recta d r ad y r, cùm sint æqualia rectangulis d r q, y r q: sed rectangulum altitudinis e s baseos d c est est ad rectangulum eiusdem altitudinis, baseos y i vt recta d c ad y i, hoc est in triangulo c d r vt recta d r ad y r; ergo vt quadratum d u ad y o, ita est rectangulum altitudinis f e baseos d c, ad rectangulum eiusdem altitudinis, baseos y i: ergo cùm illud rectangulum sit æquale quadrato d u, rectangulum altitudinis f e, baseos y i erit æquale quadrato y o. Duo igitur quadrata y o, y h æquant duo rectangula altitudinis f e, basium i l, i y, vel æquant rectangulum altitudinis f e, baseos y l: sed rectangulo isti æquale est per tertiam tertij tetragonismicorum quadratum y m; ergo quadrato y m æqualia sunt duo simul quadrata y h, y o: ergo cùm manente c d r plano recto ad basim cylindri, rectæ o y, y h constituant angulum rectum, & perpendicularis o y transferatur ex puncto y in punctum h; circulus interuallo rectæ m y descriptus, motu semicirculi describentis peripheriam sphæricam, transibit per punctum o translatum: ac proinde punctum o translatum erit in peripheriâ cylindri & simul in peripheriâ sphæricâ, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Parabolam cuius vertex congruat termino diametri circularis, & quæ ex superioris methodo sit translata, quadrare & expandere.

Reuocetur schema decimæ quintæ, (*Fig.* 14.) & in eo datus sit semicirculus d e a centro g, semidiametro g n vel g d descriptus, quem tangat recta d H siue sit æqualis rectæ d a, siue inæqualis, & completo parallelogrammo H d a u intelligatur in eo parabola H m a cuius axis H u, ordinatim applicata u a. Ponatur curuæ a e d æqualis recta a h, & describatur cuneus expansus h o c a respondens quadranti circuli a d b c centro a descripti; ex a c auferatur a M æqualis rectæ a u & describatur cuneus proportionalis expansus cuius dimetiens f N ad f o sit vt recta a M ad a c, vel vt recta H d ad d a. Dico figuram h N M a esse æqualem parabolæ translatæ in peripheriam d e a, & esse ad quadratum a c vel a d, vt est recta d H ad d a. Quod si non sumatur tota, sed eius pars f N M a, aio illam esse ad partem f a c o vt est recta d H ad d a; partis verò f a c o quadratura absoluta constat per nonam & vndecimam.

Si H d, d a sint æquales, ex decima quinta propositione parabola translata expanditur in figuram h o c a; si autem H d, d a sint inæquales, patet figurarum h N M a, h o c a dimetientes parallelas rectæ a c esse inter se vt rectas H d, d a, vel vt rectas a M, a c: ac proinde ex sexta primi tetragonismicorum figuram h N M a esse condicta ratione ad figuram h o c a, vt est recta a M ad a c.

Vt autem portionem f o i c a respondentem portioni parabolæ translatæ in arcum a n e inueniamus, hac methodo vtemur. Completo semicirculo d b c x l, ex a c auferatur recta a r æqualis rectæ d e; per r agatur recta r x parallela rectæ a h occurrens peripheriæ l x c in x, & limbo h i c in o; per x agatur x p complens parallegrammum a r x p; compleatur quoque parallelogrammum a r o f. Ex methodo nonæ patet figuræ f o i c a æquale esse rectangulum l a p, ex prima verò eiusque corollario liquet rectas f o, d e esse æquales, & arcui a n e rectam a f esse æqualem. Habemus igitur portionem parabolæ translatæ insistentem arcui a n e esse æqualem rectangulo l a p; portionem verò reliquam insistentem arcui d e esse æqualem rectangulo a l p. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quando recta g d bifariam secatur in z, cùm tres rectæ z d, d e, d a sint proportionales, patet rectam d e vel a r esse æqualem rectæ d g, ac proinde esse dimidium rectæ a c vel a d. Ergo in isto casu recta a p ad a l est potestate vt ternarius ad quaternarium; portio verò parabolæ H m a u translatæ in arcum d e, si H d, d a sint æquales æquat rectangulum a l p; si verò sint inæquales, se habet ad rectangulum a l p, vt recta H d ad d a. Atque ex calculo huius casûs manifesta est methodus calculi reliquorum omnium.

PROPOSITIO XXI.

SIt (*Fig.* 18.) vt in decima nona f e g semicirculus cuius motu circa diametrum manentem f g generetur sphærica superficies

habens centrum s, diametrum f g, ac proinde circulum maiorem fe g qui diuidat sphæram in duo hemisphæria, superius ad partes puncti x quòd extat plano f e g, & inferius oppositum. In diametro f g sumatur recta g d minor rectâ g f, bifariámque secetur in y; centro y per d, g describatur circulus d h g i qui fiat basis cylindri cuius axis y x sit perpendicularis ad planum circuli (de isto enim cylindro loquimur quoties aliud non indicamus, vt monuimus intio præsentis libri.) Per d ducta sit d z ordinatim applicata ad f g diametrum semicirculi f e g.

Ostendendum est portionem superficiei cylindricæ inclusam superficie illa sphærica esse æqualem quadruplo rectanguli g d z.

Describatur vt in decima nona parabola g u d, & parabola f a p, cuius limbo recta z d occurrat in c: ergo vt ibi ostendimus d u ordinatim applicata parabolæ u p d transferendæ erit æqualis rectæ d z: igitur per superiorem parabola translata siue portio cylindricæ superficiei arcui d h g insistens & comprehensa hemisphærio superiore est ad quadratum d g sicut recta d g vel p d ad rectam d u vel d z: ergo æquat rectangulum g d z: ergo duæ portiones insistentes arcubus d h g, d i p æquant bis rectangulum g d z: ergo cùm totidem insistant iisdem arcubus ad partes hemisphærij inferioris: quater rectangulum p d z erit æquale superficiei cylindricæ inclusæ superficie sphæricâ, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Ex superioris demonstratione nota fit quadratura cuiuslibet portionis ex ista superficie cylindrica intra sphæram contentâ abscissæ per planum h y x, vel per aliud quodcunque illi parallelum. Porrò ex definitionibus initio libri præsentis præfixis patet istam portionem cylindricam sphærâ conclusam, quando punctum y congruit puncto s, esse cyclocylindricam primariam; quando autem non congruit, cyclocylindricam secundi nominis. Vnde insuper liquet præsentem propositionem esse longè ampliorem decimâ, ibi enim quadratura solius cyclocylindricæ primariæ tradita est, hîc & illius primariæ primi nominis, & primariç etiam secundi nominis, quoties recta g d minor est rectâ g f: nam si fuerit non minor, cylindrica superficies non secat sphæram. Pes porrò circini qui figitur intelligi debet collocatus in puncto s, vt describatur cyclocylindrica primaria primi & secundi nominis definita initio libri, & congruens portioni cylindricæ clausæ intra sphæram semidiametri s p. Ista autem quadratura ita amplè sumpta non dubito quin nouitate sua plurimos teneat suspensos, & quin comparantes quadraturam circuli vnà cum quadratura istius quasi-circuli dubitaturi primo aspectu sint vtra difficilior existat: vtraque enim figura est portio superficiei cujusdã intra sphæram inclusa; circulus quidem superficiei planæ, altera verò superficiei cylindricæ & minùs

minùs tractabilis. Cæterùm licet postquam res est monstrata, non videatur multò difficilior quadratura cyclocylindricæ primariæ secundi nominis, quàm primi; fuit tamen mihi longè abstrusior, quousque ad hanc methodum omnia oculis lustrando perductus fui. Neque vnquam mihi proposita ab vllo fuit alia cyclocylindrica præter eam qua pes circini collocatur in ipsa superficie cylindrica, non autem extra illam, vt fit in cyclocylindricis secundi nominis.

PROPOSITIO XXII.

IIsdem manentibus cylindrus genitus circumductu rectanguli cuius latus circumactum æquet rectam f e, est ad solidum genitum ex cyclocylindricæ, de qua superior propositio agit, circumuolutione circa basim suam, vt est recta f e ad dimidium rectæ d c.

Ista propositio demonstratur eadem prorsus methodo, qua vsi sumus in demonstranda decima quarta superiore. Quando enim punctum d puncto s congruit, & recta d c congruit rectæ f a, fit casus illius decimæ quartæ; ac proinde cylindrus est duplus solidi, quia parallelogrammum quo circumacto gignitur cylindrus est duplum spatij æquantis figuram sinuum versorum, in quam expanditur triangulum c g d, vt in corollario decimæ quintæ monuimus. Atque in aliis casibus pro figura ex sinibus versis vsurpatur alia illi proportionalis cuius dimetientes quæ ad rectam f a parallelæ sint, se habent ad dimetientes figuræ sinuum versorum, sicut se habet recta c d ad d g, vel sicut quadratum d z ad d g. Ergo (sicuti in vigesimæ propositionis pari causa ostendimus) proportionalis ista figura ad figuram ex sinibus versis constantem se habet ad positionem rectæ a s, vt recta c d ad d g: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Si non sumatur totus cylindrus sed pars eius cum parte solidi intra easdem ad rectam f a parallelas positi, eorum proportio inuenietur adhibita methodo corollarij illius decimæ quartæ. Quando autem totus sumitur, si d g sit quadrans rectæ g f, cylindrus ad solidum est vt octonarius ad ternarium: si verò d g sit dodrans eiusdem g f, cylindrus ad solidum est vt octonarius ad ternarium, & ita de aliis. Hinc verò patet propositionem istam patêre latiùs decimâ quartâ.

PROPOSITIO XXIII.

IN quibuscunque (*Fig.* 19.) cyclocylindricis secundariis tam primi quam secundi nominis inuenire proportionem cylindri & solidi de quibus agitur in pari causâ superioris propositionis pro cyclocylindricis primariis vtriusque nominis.

Maneat vt in decima nona f e g semicirculus genitor sphęrę circa axem f g, & parabola f c g, cuius axis f a æquet rectam f s, vel f e: d p sit diameter circuli d h p, qui fiat basis cylindri, cuius axis y x perpendicula-

ris ad planum baseos. Per e ducatur e t parallela rectæ f g, & completis parallelogrammis f e t p, d n t p; ponatur t i recta æqualis peripheriæ p h d, & super t i intelligatur constructa figura i l m t proportionalis sinuum versorum, cuius dimetiens ad dimentientem figuræ sinuum versorum sit vt recta c d ad d r. Per p agatur p u complens parallelogrammum b c u p; recta c u producta occurrat limbo l m t in m. Quando punctum g cadit inter d & r, vt in primo schemate, addatur rectæ m n recta n q æqualis rectæ c u vel b p; quando autem r cadit inter d & p dematur rectæ m n recta n q; per q agatur q o parallela rectæ e t vel f g. Dico portionem figuræ proportionalis i l m t insistentem rectæ q o ad partes l, habere proprietatem quæ demonstratur in decimâ tertiâ, hoc est esse tertium gradum quorum primus ad positionem rectæ f e sit lateris f e parallelogrammum quo circumacto generatur cylindrus, secundus sit figura cyclocylindrica insistens rectæ t i, cuius circumductu generatur solidum quod cylindro comparatur: eorum verò graduum dimetientes sint ad positionem rectæ f e proportionales. Igitur per demonstrata in corollario secundo decimæ tertiæ propositionis, & per methodum decimæ quartæ, cylindri quælibet portio intercepta planis ad basim ipsius parallelis est ad solidum iisdem planis contentum, vt parallelogrammi portio iacens inter eadem plana parallela se habet ad portionem figuræ super recta q o consistentis, cuius dimetiens est q m. Reliqua patent ex suprà monstratis: ergo &c. quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXIV.

IN secunda figura superioris propositionis punctum d, congruat puncto s (*Fig.* 20.) & ducta b z ordinatim applicatâ ad axem a s parabolæ f a g, sint a s, s z æquales.

Ostendendum est cylindrum de quo agitur in superiore propositione, nempe cuius basis sit circulus diametri a e ad totum solidum genitum circumductu figuræ totius cyclocylindricæ secundariæ esse in præsenti casu, vt est circulus ad quadratum quod potest latus quadrati circulo inscripti ad ipsum circulum.

Quoniam recta a z ad a s est vt binarius ad vnitatem; erit f g ad z b potestate vt est vnitas ad binarium: rectæ autem r p, r s erunt inter se æquales, ac proinde recta f p ad f r erit potestate vt quaternarius ad vnitatem, sed eadem f p vel z b ad f g est potestate vt quaternarius ad binarium, ergo recta f g ad f r est potestate vt binarius ad vnitatem: ergo recta e q æquat rectam p b vel d a. Rursus quoniam figuræ proportionalis sinuum axis i l ad f p est sicut recta a s ad f r, recta r x dimidium rectæ i l erit æqualis rectæ f a: sed eidem est æqualis recta e q: ergo recta o q producta conuenit in punctum x. Igitur ex generatione figuræ sinuum versorum proportionalis, recta x q o aufert ex ipsâ proportionali

figuram x l m o quę ad quadratum ſemidiametri r p vel i s eſt vt recta i a ad ſ r, vel vt diameter quadrati ad latus; ergo figura x l m o æqualis eſt rectangulo r ſ a.

Rurſus quoniam rectangulum ſub ſ r ſemidiametro circuli d h p, & ſub t i rectâ æquante arcum ſ h p eſt æquale circulo diametri ſ p, vt ex tertia primi liquet, recta verò i t bifariam ſecatur in u vt ex generatione figuræ ſinuum verſorum patet, rectangulum contentum ſub ſemidiametro ſ r vel ſ y & ſub recta i u erit æquale ſemicirculo diametri d p: ergo rectangulum i u A contentum ſub ſ a vel u A & ſub i u erit ad ſemicirculum d h p vt recta a s ad ſ r, vel vt rectangulum a ſ r ad quadratum ſ r. Quoniam igitur vt rectangulum a ſ r ad quadratum ſ r, ita eſt rectangulum i u A ad ſemicirculum ſ h p, erit alternando vt rectangulum a ſ r ad rectangulum i u A, ita quadratum ſ r ad ſemicirculum: ſed rectangulum a ſ r eſt æquale figuræ x q o m l: ergo figura x q o m l ad rectangulum i u A, hoc eſt ſolidum ad cylindrum eſt vt quadratum ſ r ad ſemicirculum, vel vt quadratum quod poteſt latus quadrati circulo inſcripti ad ipſum circulum, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Tres rectas ſ r, ſ g, ſ p eſſe proportionales quamcunque porportionem habeat recta a s ad a z, & ſiue z cadat intra puncta a, s, ſiue extra, patet ex demonſtrandi methodo: nam vt recta a s ad a z, ita eſt poteſtate ordinatim applicata ſ g ad z b: ſed vt a s ad a z, ita eſt ſ r ad z b, vel ad ſ p: ergo vt ſ r recta ad ſ p, ita eſt poteſtate ſ g ad eandem ſ p æqualem rectæ z b: igitur tres rectæ ſ r, ſ g, ſ p ſunt proportionales.

COROLLARIVM II.

Ex methodo præſentis caſûs poterit facili negotio fieri progreſſus ad quoſcunque alios, quamuis puncta d, & s diſcrepent: ac proinde iſti methodo ſatis ſit vnus iſte calculus. Ex demonſtratis autem circa cyclocylindricam manifeſtum eſt faciliùs eſſe quadrare ſolidum genitum ex quacunque cuiuſcunque nominis cyclocylindrica, quàm illam quadrare: ſolidi enim quadraturã datâ circuli quadraturâ demonſtrauimus pro omni caſu cuiuſlibet nominis cyclocylindricæ; cùm tamen quadraturam cyclocylindricarum vtriuſque nominis primariarum tantummodo dederimus, prætermiſſa quadraturâ ſecundariarum. Hoc tamen habemus quadraturam cyclocylindricarum datam non pendere à quadratura circuli; cùm illa ſolidorum indę pendeat.

PROPOSITIO XXV.

Reuocato ſchemate (*Fig.* 17.) propoſitionis decimæ nonæ, circulus ſphæræ genitor motu circa axem f g eſto f e g, & baſis cylindri d h p: ſemidiametri eius dimidium y E ita ſecetur in V vt tres rectæ p r, V E, V y ſint proportionales: ex recta y p abſcindatur y λ

dupla rectæ y V, per λ ducantur λ D, λ H ordinatim applicatæ ad d p diametrum circuli d h p, & ad r λ axem parabolæ r t u.

Ostendendum est parabolam u t r d translatam lege præscripta in superficiem cylindricam baseos d h p ita respondere illi figuræ quæ in eadem superficie d h p intelligitur gigni ex rectis à puncto λ eductis ad singula peripheriæ d h p puncta, & postea erectis perpendiculariter ad basim, vt sicut est recta λ D ad rectam λ H, ita sint singulæ dimetientes parabolæ translatæ ad singulas istius figuræ insistentes eidem peripheriæ puncto.

Ex constructione patet trium rectarum proportionalium quarum prima V y, secunda V E, tertia sit p r, rectam y λ continere bis primam; rectam y p vel y h bis primam & bis secundam; ergo y r composita ex y p & ex p r tertiâ continebit bis primam, bis secundam & semel tertiam: ergo ablatâ y λ bis prima, residua y λ vel illi æqualis r B contineat necesse est, vt attendenti patet statim, bis secundam semel tertiam: ergo duæ simul y r, r B vel tota y B continent bis primam, quater secundam, & bis tertiam. Igitur y λ æquat bis primam, y p verò bis primam & bis secundam, y B denique bis primam, quater secundam & semel tertiam; vel si bis prima sumatur pro primo termino, recta y λ est primus terminus; recta y p primus & secundus; recta y B primus, secundi duplus, & tertius: ergo vt ex decursu propositionis septimæ libri tertij tetragonismicorum liquet, tres rectæ y λ, y p, y B sunt proportionales.

Quoniam igitur tres rectæ y λ, y p, y B sunt proportionales, & rectæ λ B dimidium r occupat vertex parabolæ r t u, ex trecentesima prima propositione libri quinti Gregorij à S. Vincentio constat vt est ordinatim applicata λ D ad λ H, ita rectam à puncto λ eductam & ad quoduis circuli d h p punctum terminatam esse ad parabolæ r t u ordinatim applicatam axi r i per idem peripheriæ punctum ductam, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quando punctum r siue vertex parabolæ r t u congruit puncto p, ex trecentesima propositione libri quinti Gregorij à S. Vincentio, & ex hactenus demonstratis à nobis satis constat proprietatem iam explicatam competere huic casui. Quando autem punctum r caderet inter y & p, eiusmodi proprietas cessare conuincitur ex vi demonstratorum. Quoties autem D λ, λ H fuerint æquales, parabola r u d translata erit vt patet, ipsa figura descripta in superficie cylindri baseos d h p, cuius dimetientes æquant rectas ex puncto λ eductas ad perimetrum d h p.

PROPOSITIO XXVI.

Esto semicirculus f h d g (*Fig.* 21.) in cuius diametro f g sumpta sint duo puncta a, b æqualiter remota à centro y, per b, a eductæ sint ordinatim applicatæ a c, b d, & per c, d tangentes c e, d F,

per centrum y educta sit ordinatim applicata y h: eductæ etiam sint rectæ a h, b h ex punctis a, b ad h.

Ostendendum est sumpto quouis puncto m in peripheria circuli & eductis rectis a m, b m, duo quadrata a m, b m simul esse æqualia duplo quadrati a h. Et si ex puncto m excitetur m s perpendicularis ad planum circuli æqualis rectæ m b, figuram in superficie cylindri cuius basis sit f c d g comprehensam curuâ f c d g & lineâ descriptâ à punctis s, esse cyclocylindricam secundariam descriptam à circino cuius vnus pes hæreat in puncto a, interuallum autem inter extrema crurum puncta æquet rectam h r cuius quadratum sit duplum quadrati h a.

Rectæ a e, b F bifariam secentur in l, t, & describantur parabolæ l c, t d quarum vertices l, t, ordinatim applicatæ a c, b d; ex puncto m demittatur perpendicularis m u ad f h rectam. Patet duas istas parabolas esse easdem, & habere idem latus rectum; patet quoque ex superiore, rectam m b esse æqualem ordinatim applicatæ ad parabolæ t diametrum t b per punctum u ductæ; similitérque rectam a m æqualem esse ordinatim applicatę per u punctũ actę ad axem parabolæ l c. Esto l q latus rectum parabolæ; igitur rectangulum q l u est æquale quadrato ordinatim applicatę vnius, & rectangulum sub q l & sub t u comprehensum est æquale quadrato ordinatim applicatæ alterius: ergo duo quadrata simul ordinatim applicatarum per u ductarum sunt æqualia rectangulo q l t quocunque cadat punctum u: ergo quando punctum u congruit puncto y, cùm a h, b h sint æquales, & duo quadrata a h, b h sint simul æqualia rectangulo q l t, patet duo quadrata ordinatim applicatarum ad parabolarum communem axem, vel duarum rectarum a m, m b vel m s esse æqualia quadrato h r: ergo recta a s est æqualis rectæ h r; ergo punctum s est in superficie sphæræ ex centro a descriptæ, cuius semidiameter æquet rectam h r, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Puncta a & b repræsentantur in schemate præsentis propositionis intra diametri f g terminos f, g: sed eadem est demonstrandi ratio si collocentur extra illos terminos, vt in e & F; ostendit enim Gregorius à S. Vincentio in propositione 303. de parabola, rectas ex punctis e, F eductas ad peripheriæ f h d g quodlibet punctum m esse æquales ordinatim applicatis certæ cuiusdam parabolæ. Hinc verò præterea conficitur præsentis propositionis methodo ampliorem euadere demonstrationem quam Gregorius à S. Vincentio fecit vltimam libri sui tertij. Hinc denique patet istam proprietatem non conuenire solis punctis f, g extremis diametri f g, quod tantum in Elementis Euclidis demonstratur.

COROLLARIVM II.

Figuram cuius dimetientes m s æquales sint rectis b m ex puncto vno b eductis esse æqualem superficiei cylindri scaleni demonstrauit Dettonuillæus in epistola data ad D. de Hugguens, vnde factum est vt ex demonstratione perlecta istud nos lucrum perceperimus pro pręsenti & superiore propositione, nimirum superficiem cyclocylindricæ secundariæ, cuius dimetientes m s sunt æquales rectis m b, esse certa quadam ratione æqualem superficiei cylindri scaleni; ac proinde data huius scalenæ superficiei quadratura, inuentum esse à nobis tetragonismum cyclocylindricarum secundariarum de quibus agunt duæ huius libri postremæ propositiones. Istud verò lucrum cùm non contemnendum esse duxerimus, adjiciendum quoque putauimus sub finem huius libri.





DE CYCLOIDE LIBER TERTIVS.

In quo octo problemata ab Anonymo proposita demomstrantur in cycloide paruâ.

DEFINITIONES.

INtelligatur progressio geometrica cuius primus terminus sit quadratum semidiametri circularis, secundus sit ipse circulus, ac proinde cuius primum spatium sit ad secundum vt est circuli diameter ad rectam æqualem toti peripheriæ ipsius; vel vt est circuli semidiameter ad rectam æqualem semiperipheriæ ipsius; vel vt est semidiameter circuli genitoris ad semibasim cycloideos paruæ. Ista progressio vocetur *perspecta*, cuius hæc est proprietas vt si intelligatur altera progressio rectarum quæ *adiuncta* dicatur, & cuius primus terminus sit semidiameter circuli genitoris, secundus sit semibasis cycloideos paruæ, rectangulum sub primo & sub secundo termino huius progressionis sit æquale secundo termino primæ progressionis, itemque rectangulum sub primo & tertio secundæ progressionis sit æquale tertio, & sic de aliis, ita vt rectangulum sub primo & sub quouis alio termino secundæ progressionis æquet terminum primæ numero pari procedentem à primo. Primæ enim progressionis termini sunt vt termini secundæ; sed rectangula quorum altitudo sit primus, bases sint alij termini consequentes se habent vt bases; ergo se habent vt termini primæ; ergo cum rectangulum sub primo & sub ipso primo comprehensum sit primus terminus primæ, patet rectangula consequentia esse æqualia terminis primæ consequentibus, singula singulis. Inde insuper patet tertio termino primæ progressionis æquale esse quadratum secundi termini secun-

dæ, & quinto primæ quadratum tertij secundæ, & septimo primæ quadratum quarti secundæ, & sic deinceps. Progressio *subperspecta* vocetur illa cuius primus terminus est quadratum semidiametri circuli, secundus verò est spatium quod ad quadratum semidiametri, sit vt ipsum quadratum ad circulum: *subadiuncta* verò progressio ea vocetur quæ rectis constat in eadem ratione spatiorum procedentibus, eiusque primus terminus est semidiameter circuli eiusdem.

PROPOSITIO PRIMA.

ESto (*Fig.* 22.) semicuneus primus expansus c z b g respondens circulo genitori diametro c f descripti, ita vt recta b g æquet quartam partem totius peripheriæ circularis; completo rectangulo b g f n ponatur b m f n alter semicuneus primus expansus respondens circulo genitori semidiametro n b, centro n descripti. Intelligatur solidum b g a c comprehensum planis b g c, a g c secantibus se in recta g c, & ad se inuicem rectis, & superficies curua, cuius hæc sit proprietas vt quæcunque z d ordinatim applicata ad axem c g ducatur, si ex puncto d excitata fuerit perpendicularis d e occurrens superficiei in e, & iungatur recta z e, ipsa z e sit in superficie, & angulus e z d sit semirectus. Ex recta g a perpendiculari ad planum b g c abscissa sit g u æqualis rectæ g c.

Ostendendum est solidum istud ad positionem plani a g c esse condita ratione æquale cylindraceo altitudinis g u, baseos b m f g i.

Ducta sit quælibet i p ordinatim applicata ad basim b g, per i ducta sit i s parallela rectæ g a occurrens superficiei curuæ solidi in s; iungatur recta b s, quæ ex constructione erit in superficie solidi, & angulus s b i erit semirectus, ac proinde rectæ b i, i s erunt æquales. Planum s i p secet superficiem curuam solidi secundum lineam s t p; quæcunque z d ordinatim applicata ad axem ducatur occurrens rectæ i p in o; si per o ducatur o t parallela rectæ i s occurrens lineæ p t s in t, recta z t erit in eadem superficie ex constructione, & o t erit æqualis rectæ z o; cùm anguli ad z, t trianguli z o t sint æquales. Igitur figura p t s i ad positionem plani b g a est condita ratione æqualis figuræ b z p i, cùm ambæ insistant super eadem basi p i, & ordinatim ad illam applicatæ z o, o t sint inter se æquales.

Prætetera ex quarta superioris libri constat sinum rectum arcûs in circulo genitore æquantis rectam b i, æqualem esse rectæ p i; & sinum versum, rectæ i m; est enim b g f m complementū subcontrarię ibidem definitum. Igitur per septuagesimā quintam libri noni quadraturæ Gregorij à S. Vincentio vt i l recta vel g f semidiameter circuli genitoris est ad m i sinum versum arcûs æquantis rectam b i, ita est cunei vel vngulæ expansæ portio

portio i s t p hoc est b z p i ad b z c g: sed figuræ b z c g est per nonam superioris æquale quadratum g c vel g f vel i l: ergo vt i l recta ad m i rectam i, ita quadratum l i ad solidi sectionem i s t p: sed vt l i recta ad m i ita etiam est idem l i quadratum ad rectangulum l i m: ergo sectio i s tp est æqualis rectangulo l i m, hoc est sectioni cylindracei altitudinis g u vel l i, baseos b g f m; ergo istud cylindraceum & illud solidum sunt condicta ratione æqualia ad positionem plani a g c, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Hinc patet si compleatur quadratum e d z q & iungatur diameter d q, cùm triangulo z d e, quod est quadrati z d e q dimidium, æquale sit triangulum q d z quod etiam est dimidium eiusdem quadrati, notum esse cuneatum solidum cuius sectio sit triangulum q d z, basis sit c z b g, vel quæuis eius portio p z b i abscissa per rectam p i parallelam axi c g. Igitur si libræ b g brachium g x ponatur æquale rectæ g f vel g u, & libra suspendatur ex g perpendiculo c g, æquiponderans figuræ b z c g erit per vigesimam primam quarti tetragonismicorum æquale figuræ b m f g i, quæ per nonæ superioris libri methodum est æqualis dimidio circuli genitoris deducto quadrato g u vel g c. Item si suspendatur ex i, brachio i r æquante eandem g u vel g c, perpendiculo i p, æquiponderans figuræ b z p i esse æquale spatio b i m, quod per methodum nonæ illius reducitur ad spatium mixtum ex circuli genitoris parte & ex rectilineo noto.

COROLLARIVM II.

Si in curuà b z c sumatur quoduis punctum z, & per z ducatur z d ordinatim applicata ad axem g c, propositumque sit brachio g x perpendiculo g c inuenire æquiponderans portioni z p c d, res facilè obtinetur. Nam toti y z c g æquiponderat y A m f g spatium mixtum ex methodo illius nonæ: præterea parallelogrammo z y g d æquiponderat dimidium rectanguli d g C, ponendo tres rectas x g, g y, g C esse proportionales: ergo cùm recta g y sit data, & recta g x sit nota, notum quoque erit rectangulum d g C, eiusque dimidium: igitur dempto hoc æquiponderante de spatio y A m f g pariter noto (hic notum appello quod ad rectilineum dato tetragonismo circuli reducitur) relinquetur notum æquiponderans figuræ z p c d datæ. Hinc patet notum quoque esse æquiponderans figuræ d z b g datæ, cùm notum sit toti c z b g, & parti c z d.

COROLLARIVM III.

Quoniam, z e & aliæ omnes rectæ quæ sunt sectiones communes superficiei istius curuæ & planorum ad planum a g b parallelorum, æquidistant rectæ b a, patet istam superficiem esse cylindraceam descriptam motu rectæ lineæ quæ sit, ad rectam b a parallela, & quæ incedat per limbum b z c.

PROPOSITIO II.

SIt (*Fig*. 23.) totus ſemicuneus expanſus c z b s a f reſpondens circulo genitori diametri c f, cuius pars ſuperior ſit ſemicuneus primus b z c g, reliqua autem pars ſit inferior b s a f g. In arcu b s a ſumptum ſit quodcunque punctum s, & per s ducta s t æquidiſtans rectæ a f, ſiue s congruat puncto a, ſiue ab eo diſcrepet; per s ducta ſit ordinatim applicata s t ad axem c f: ex recta s t abſcindatur t x æqualis rectæ g c.

Oſtendendum eſt librâ s x ſuſpensâ ex t perpendiculo t c, brachio t x, æquiponderans figuræ t s b z c eſſe notum rectilineum, dato tetragoniſmo circuli, vt in corollario ſecundo ſuperioris vocem iſtam vſurpauimus.

Compleatur parallelogrammum f a q g, & recta s t occurrat rectæ q a in r: ex recta g c abſcindatur g y æqualis rectæ g t, & per y ducatur ordinatim applicata z y ad axem c f. Per corollarium octauæ libri ſuperioris recta r s erit æqualis rectæ z y, & figura r s b q erit æqualis & ſimilis figuræ b g y z. Si ergo ex recta t r abſcindatur r d æqualis brachio t x; brachio verò t x perpendiculo t c inueniatur per ſuperiorem ſpatium A æquiponderans figuræ g b z y: libra d t ſuſpensâ ex r perpendiculo r q, brachio d r æquiponderans figuræ r s b q vt iacet manenti erit A. Vt eſt recta d r ad r t rectā, ita fiat figura r q b s per nonam ſuperioris nota ad B: ergo per methodum nonæ ſecundi libri tetragoniſmici paulo ampliatam, ſi perpendiculum r q mutetur in t c, & brachium d r in t x æquiponderans figuræ r q b s vt iacet manenti erit B ſpatium imminutum ſpatio A. Rurſus vt eſt t x ad t r vel ad f a, ita fiat ipſa f a ad f e, cuius biſectio ſit h: ergo per principia libræ vulgaria parallelogrammo q r t g, brachio manente t x æquiponderat rectangulum notum C contentum ſub rectis t g, f h: ſed figuræ q r s b æquiponderat ſpatium B imminutum ſpatio A: ergo reſiduæ g b s t æquiponderat rectangulum C auctum ſpatio noto A, & imminutum ſpatio noto B: ergo cùm figuræ b z c g æquiponderet per ſuperiorem rectilineum notum, patet duabus ſimul figuris ſ b g t, b z c g, hoc eſt toti figuræ ſ b z c t æquiponderare rectilineum notum, poſito tetragoniſmo circuli, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Duo ſuperioris propoſitionis corollaria huc transferuntur nullo negotio, vt patet.

COROLLARIVM II.

Quoniam ex ſuperioris corollario primo æquiponderans parti ſuperiori c z b g eſt æquale ſemicirculo genitori dempto quadrato g c, ſpatium A erit ſemicirculus genitor imminutus quadrato g c: ergo æquiponderans toti c b a f eſt rectangulum C contentum ſub recta f h & ſub

t g vel f g (nam in hoc casu t & f sunt idem punctú) auctum circulo genitore & imminutum duplo quadrati g c, & spatio B quod ad quadratum g c sit vt recta f a ad g c; hoc est vt circulus genitor ad quadratum ipsius semidiametri: nam rectangulum g f a æquat circulum genitorem, & vt g f ad f a, ita quadratum g f ad g f a. Igitur circulus genitor & B sese elidunt, & restat purgatum æquiponderans toti c b a f rectangulum g f h vel semiquadratum f a imminutum duplo quadrati g c.

PROPOSITIO III.

Iisdem manentibus datum sit semisegmentum c z y ita vt z sumatur ad libitum, propositumque sit inuenire eius centrum grauitatis.

Ex c f abscindatur y i æqualis rectæ g c vel t x, & ex z y abscindatur y l eidem æqualis. Ex primi libri decima sexta eiusque corollario inueniatur rectilineum D notum dato tetragonismo circuli, quod librâ i c suspensâ ex y perpendiculo y z æquiponderet figuræ c z y, brachio y i. Inueniatur per superiorem rectilineum E quod libra l z suspensâ ex y perpendiculo y c æquiponderet eidem c y z, brachio y l. Inueniatur per duodecimam eiusdem primi, vel per nonam superioris libri, rectilineum F pari modo notum, quod æquet figuram c z y. Vt est F ad D ita fiat i y recta ad y p, & vt est idem spatium F ad E, ita fiat l y recta ad y o, compleatur parallelogrammum o y p m. Dico punctum m esse centrum grauitatis in figura c z y.

Quoniam enim vt suspensum F ad æquiponderans D ita vicissim est brachium i y ad longitudinem y p, & per p acta est p m parallela perpendiculo y z, erit in recta y z centrum grauitatis figuræ c y z vt ex vulgaribus elementis libræ liquet. Simili pacto quoniam vt suspensum F ad æquiponderans E, ita vicissim est brachium y l ad longitudinem y o, & per o acta est o m parallela perpendiculo c y, centrum grauitatis figuræ c y z erit in recta p m: sed est in recta o m; ergo est in earum communi sectione m, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quod Anonymus proposuit in cycloide sua his verbis *quærimus dimensionem spatij c z y, eiusdemque centrum grauitatis*; liquet esse à nobis peractum in figura præsenti, quæ est ipsa cycloides circulo genitore imminuta. Dimensionem enim dedimus figuræ c z y posito tetragonismo circuli, eiusque centrum m grauitatis inuenimus, quod erat propositum: vide corollarium tertium septimæ propositionis sequentis.

PROPOSITIO IV.

Iisdem manentibus intelligatur circa axem c f circumuolui figura c b a f.

Ostendendum est totum solidum hac circumuolutione genitum, vel quamuis eius partem abscissam plano ad planum u f a parallelo

esse æquale cylindraceo altitudinis f u quæ ad f g sit vt circulus ad quadratum suæ diametri, baseos æquantis octuplum æquiponderantis inuenti in propositione secunda.

Istud demonstratur eodem prorsus modo quo decima nona primi libri, nec aliud addi debet; ergo &c. quod erat demonstrandum. Hoc verò est vnum ex iis quæ Anonymus postulat in sua cycloide, dum ait *quærimus solida genita ex circumuolutione dicti spatij z c y, tam circa z y quàm circa c y*. Solida ergo ambo habemus, illud ex decima nona primi libri, istud ex præsenti.

COROLLARIVM I.

In corollario secundo superioris extat calculus pro duplici casu, primus est pro tota cycloide, secundus pro superiore parte b z c g: igitur octuplum illorum spatiorum est basis cylindracei propositi in præsenti propositione.

COROLLARIVM II.

Cylindraceum altitudinis f u baseos æquantis octies rectangulum h f c, vel g f e est æquale per methodum decimæ nonæ primi, cylindro genito ex reuolutione parallelogrammi a f c circa latus f c: octies autem rectangulum g f e est octies quadratum f a, cùm tres rectæ g f, f a, f e sint proportionales. Rursus cylindraceum altitudinis f u baseos æquantis octuplum spatij collecti in secundo secundæ corollario pro primo casu, habet ipsam basim mixtam ex octo rectangulis h f g vel ex quatuor e f g vel ex quatuor quadratis f a imminutis duplo quadrati f g. Cùm igitur cylindrus & conoides sint æqualia istis cylindraceis eiusdem altitudinis f u, & ipsa sint vt bases, cylindrus ad conoides erit vt octo quadrata f a ad quatuor quadrata f a imminuta duobus quadratis f g: hoc est vt quadratum f a ad dimidium eiusdem quadrati imminutum quadrante quadrati f g, vel decima sexta parte quadrati f c.

COROLLARIVM III.

Quoniam in superiore propositione inuenimus centrum grauitatis cuilibet portioni figuræ c b a f, ex methodo decimæ nonæ primi libri habemus solidum genitum ex circumuolutione eiusdem figuræ circa quamlibet rectam datam. Cumulatissimè igitur satisfecimus secundæ quæstioni Anonymi, *quærimus*, inquit, *solida genita ex circumuolutione dicti spatij c z y, tam circa z y, quàm circa c y*; cùm non tantum circa c y & z y, sed circa quamlibet iis parallelam; nec solùm ex reuolutione figuræ c z y, sed cuiuscuis alterius, quamuis c y non sit portio axis.

PROPOSITIO V.

SVper rectam c g (*Fig.* 24.) incidat ad normam recta b g, & eidem rectæ c g ad positionem rectæ b g insistat figura c z b g in plano c g b iacens. Ad planum c g b ex puncto g excitetur perpendicularis g a cuiuslibet longitudinis, & ducatur recta b a; per limbum

b z c moueatur recta æquidistans rectæ b a describátque superficiem cylindraceam de qua agit corollarium tertium primæ. Ex b g recta auferatur quælibet g d, & libræ planæ a x e g c, perpendicnlo plano a g c, sustentaculo d i parallelo ad rectam g c, solido superficiei cylindraceæ intercepto inter plana c g a, c g b æquiponderet spatium æquale magnitudini A: itelligatur aliud solidum cuius sectio z y e t parallela plano a g b existat parallelogrammum z y e simile parallelogrammo comprehenso sub rectis b g, g a.

Ostendendum est æquiponderans isti solido cuius sectio est z y e t, esse ad positionem plani a g b triplum spatij A.

Completo parallelogrammo d g y i, quoniam per y ductum est planum e y z parallelum plano a g b; erit triangulum e y z sectio solidi cylindracei, & latera z y, y e erunt vt latera b g, g a trianguli b g a. Recta z y ita secetur in f & h, vt y f sit triens & y h dimidium rectæ y z; per f, h ducantur f x, h u parallelæ ad rectam y e. Trianguli igitur z y e centrum grauitatis erit in recta f x per sextam Archimedeæ quadraturæ parabolæ. Similiter in recta h u erit centrum grauitatis parallelogrammi z y e t. Vt ergo recta i y ad rectá y f, ita est suspensum triangulú e z y quod est dimidiú parallelogrami z y e t, ad æquiponderans B aptatum puncto i, vt ex libræ planæ definitione patet exposita in vigesima octaua quarti tetragonismicorú. Præterea vt i y brachium ad y h ita est suspensum parallelogrammú t z y e ad æquiponderans C aptatum puncto i. Quoniá igitur vt recta y h ad y i ita est C ad t z y e vel ad duplum triáguli e z y, vt autem y i ad y f ita est t z y e vel duplum trianguli e z y ad duplum spatij B: ergo ex ęquo vt y h ad y f siue vt ternarius ad binariú, ita C ad duplum spatij B: igitur vt ternarius ad vnitatem ita C æquiponderans sectioni parallelogrammæ t z y e ad B æquiponderans sectioni triangulari e z y: ergo per vigesimam octauam quarti tetragonismicorum æquiponderans solido cuius sectio est t z y e est triplum spatij A, quòd erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Posuimus angulum e g b esse rectum perspicuitatis causâ, nam id non est necessarium vt patet ad hoc vt demonstratio cogat, dummodo g y, d i æquidistent. Eadem de causa posuimus angulum b g a esse rectum. Porrò solido cuius sectio sit triangulum t e z, vel quod in idem redit t y z, patet æquiponderare duplum spatij A, & bessem eius quod æquiponderat solido cuius sectio est z y e t.

PROPOSITIO VI.

MAneat idem solidum cuius sectio sit quadratum z y e t, ita vt latera z y, y e parallelogrammi z y e t sint æqualia, intelligatur aliud solidum periphericum cuius sectio sit quadrans circularis z m e y descriptus centro y semidiametro y z vel y e.

Oſtendendum eſt beſſem ſpatij quod æquiponderat ſolido ſectionis quadratæ æquiponderare ſolido ſectionis periphericæ z m e y.

Intelligatur ſemicirculi r z m e centrum grauitatis p in ſemidiametro y z iacens, per p agatur p q parallela rectæ y e: eſt igitur in recta p q centrum grauitatis quadrantis circularis z m e y. Vt igitur y n æqualis rectę y z ad y p, ita eſt quadrans circularis z m e y ad æquiponderans aptatum puncto n, vt ex primis libræ principiis patet: ſed iſtud æquiponderans eſt per decimam octauam tertij tetragoniſmicorum æquale trienti quadrati z y: ergo vt quadrans circularis z m e y ad trientem quadrati ſemidiametri z y, ita eſt ſemidiameter z y ad y p: ergo vt circulus ad trientem quadrati quod poteſt diameter, ita eſt ſemidiameter z y ad y p diſtantiam centri grauitatis ſemicirculi à centro y: & vt circulus ad beſſem quadrati circumſcripti ita eſt h y dimidium rectæ z y ad a p. Intelligatur quadrans circularis z m e y ita transferri in plano z y e vt punctum p congruat puncto h, & recta p q rectæ h u; igitur circulari quadranti ita tranſlato æquiponderans aptatum puncto n erit ad æquiponderans quadrato t z y e, vt eſt ipſe quadrans circularis ad quadratum z y e t, hoc eſt vt circulus totus ad quadratum circumſcriptum, vt patet ex decima quinta ſecundi tetragoniſmicorum. Rurſus ſi idem quadrans circularis reſtituatur ſuæ primigeniæ ſedi æquiponderans eidem quadranti ſemoto, ad æquiponderans eidem poſito in ſua prima ſede erit viciſſim per octauam ſecundi tetragoniſmicorũ vt recta y p ad h y, hoc eſt vt circulus ad beſſem quadrati circumſcripti. Quoniam igitur æquiponderans quadrato t z y e vt iacet manenti librâ n z grammicâ ſuſpenſâ ex y, perpendiculo y e, brachio i y, eſt ad æquiponderans quadrantis circularis z m e y ſemoti vt quadratum circumſcriptum ad circulum, æquiponderans autem ſemoti ad æquiponderans locati in ſua natiua ſede eſt vt idem circulus ad beſſem quadrati circumſcripti; erit ex æquo vt quadratum circumſcriptum ad ſui beſſem, ita æquiponderans quadrato z t e y ad aliud quadrantis circularis z m e y librâ grammicâ i z ſuſpenſâ ex y perpendiculo y e, brachio y i; quod cùm perinde demonſtretur in aliis omnibus ſectionibus iſtorum ſolidorum, patet ex vigeſima octauâ quarti tetragoniſmici beſſem æquiponderantis toti cuius ſectio eſt quadratum t z y e eſſe æquale ad poſitionem plani a b g æquiponderanti ſolido cuius ſectio eſt quadrans circularis z m e, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex ſuperiore patet duplum ſpatij A æquiponderare ſolido peripherico cuius ſectio eſt quadrans circularis z m e y, & quadruplum ſpatij A æquiponderare ſolido cuius ſectio eſt ſemicirculus r z m e. Quoniam verò per corollarium ſuperioris ſolido cuius ſectio eſt triangulum t y z, æquiponderat bes eius quod ſolido ſectionis quadratæ, patet cuneo cuius ſectio eſt t y z, & peripherico præſentis propoſitionis idem ſpatium æquipondera-

re: igitur per octauam secundi tetragonismicorum vt est periphericum sectionis z m e y ad cuneum sectionis t y z, hoc est vt semicirculus ad quadratum suæ semidiametri, ita vicissim interuallum, quo cunei centrum grauitatis distat ab axe c g, se habet ad interuallum quo peripherici centrum grauitatis distat ab eodem axe. Igitur cùm vt quadratum semidiametri, hoc est primus terminus perspectæ progressionis definitæ initio huius libri se habet ad dimidium circuli, siue ad dimidium secundi termini perspectæ, ita se habeat primus adiunctæ progressionis, hoc est radius circuli ad dimidium secundi adiunctæ, hoc est ad quadrantem totius peripheriæ circularis (nam adiunctæ secundus est dimidium totius peripheriæ circularis) patet interuallum centri cunealis ad interuallum centri peripherici esse vt quadrantem peripheriæ circularis ad suum radium.

PROPOSITIO VII.

Reuocato schemate primæ (*Fig.* 22.) intelligatur circa axem c g circumuolui figura c z b g & gigni solidum conoides, cuius dimidio ad partes z plani a g c posito æquiponderans quæratur.

Ostendendum est libræ planæ axe g c, perpendiculo plano a g c, sustentaculo x D parallelo ad rectam g c, æquiponderans dimidio illi conoidis vel toti, vel ad positionem plani a g c ex parte sumpti, esse noto parallelepipedo æquale, ex hypothesi tetragonismi circuli inuenti.

Quoniam per primam solidum cuius sectio est triangulum a g b æquale est ad positionem plani a g c cylindraceo altitudinis g u, baseos b g f m; istius cylindracei, & solidi illius centrum grauitatis erit in eodem plano ad planum a g c parallelo, vt ex vndecima quarti tetragonismicorum liquet. Præterea quoniam istius cylindracei altitudinis g u, & eius baseos b g f m centrum grauitatis est in eodem plano ad planum g c parallelo, & per tertiam notum est centrum grauitatis baseos b g f m vel integræ vel cuiuslibet eius partis ad positionem rectæ f g sumptæ, nota quoque est quadratura eiusdem per eandem propositionem: ergo axe g c, perpendiculo a g c, sustentaculo D x ita ducto vt recta g x æquet rectam g u vel g c; si inueniatur rectilineum E æquiponderans basi cylindracei, parallelepipedum altitudinis g u, baseos E æquiponderabit cylindraceo, ac proinde & solido cuius sectio est b g a: ergo per corollarium superioris cylindraceum altitudinis g u, baseos æquantis quadruplum spatij E æquale est æquipõderanti proposito, quando g x æquat altitudinem g u. Quòd si g x, g u sint inæquales, ex octaua secundi tetragonismicorum liquet vt est g u recta ad g x, ita vicissim fieri debere quadruplum spatij E ad basim quæsitam. Vel retenta eadem basi ita vicissim fieri debere altitudinem g u ad altitudinem quæsiti cylindracei: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quando ſumitur dimidium totum conoideos, cùm figuræ b m f n, brāchio æquante rectam g c, perpendiculo b n, æquiponderans per corollarium ſecundum ſecundæ ſit ſemicirculus genitor diametri f c imminutus quadrato g c, ex nonâ & decima ſecundi tetragoniſmicorum conſtat ſi axis b n mutetur in g c, brachio g x æquante rectam g c, æquiponderans figuræ b m f n eſſe ſpatium quod ad b m f n hoc eſt ad quadratum c g ſe habeat vt b g recta ad g c, auctum quadrato g c & imminutum ſemicirculo genitore: ſed ex eodem corollario ſpatium illud quod ita ſe habet ad quadratum g c eſt æquale ſemicirculo genitori: ergo figuræ b m f n, brachio g x, perpendiculo g c æquiponderat quadratum g c. Præterea fiant tres rectæ g c, g b, g F proportionales, punctum verò G ſit biſectio rectæ F g: æquiponderans ergo toti b g f n parallelogrammo erit parallelogrammum G g f, hoc eſt dimidium quadrati g b: ergo ſi ex hoc æquiponderante dematur æquiponderans figuræ b m f n reſtat E æquale dimidio quadrati b g imminutum quadrato g c. Igitur cylindraceum altitudinis g u baſeos æquantis duplum quadrati b g imminutum quadrato f c æquiponderat conoidi propoſitionis præſentis in caſu aſſumpto.

COROLLARIVM II.

Calculus reliquorum caſuum tractari debet pari methodo, qui quidem tam latè patent quàm propoſitio prima eiuſque corollaria. Porrò ſicuti inuenimus æquiponderans eſſe æquale cylindraceo cuius altitudo æquet ſemidiametrum g c circuli genitoris, baſis ſit dimidium ſpatij quod poteſt recta b g, dempto rectangulo contento ſub g c ſemidiametro circuli genitoris & ſub ſinu verſo arcûs cui ęqualis eſt recta b g. Ita ſi ſumatur quælibet figura b z p i oſtendetur æquiponderãs figuræ b i s cuneatæ, libræ planæ axe i p, brachio æquante rectam g c, eſſe æquale cylindraceo eiuſdem altitudinis, cuius baſis ſit dimidium ſpatij quod poteſt recta b i, dempto rectangulo contento ſub ſemidiametro g c & ſub ſinu verſo arcûs cui æqualis eſt recta b i.

COROLLARIVM III.

Quoniam ex corollario primo brachio g x æquante ſemidiametrum g c circuli genitoris, perpendiculo g f, æquiponderat toti ſemicuneo primo expanſo b m f n ſpatium æquale quadrato ſemidiametri g c, ipſa autem figura b m f n eſt æqualis eidem quadrato, ſi ex recta g b auferatur g y æqualis rectæ g c vel g x, & per y agatur y A B parallela rectæ g f, ex principiis libræ notis patet, cùm vt g x brachium ad g y longitudinem, ita viciſſim ſit ſuſpenſa magnitudo b m f n ad æquiponderans, in recta A B eſſe centrum grauitatis ſemicunei expanſi b m f n. Igitur ſecluſo tetragoniſmo circuli inuenitur recta A B parallela axi c g ducta per centrum grauitatis ſemicunei expanſi. Pari verò methodo inuenietur ſecluſo eodem tetragoniſmo, recta per centrum cuiuſuis partis b n l m poſitâ l m parallela recta g c.

PROPO-

PROPOSITIO VIII.

SVper recta b a (*Fig.*25) stet ad normã recta b g, & eidem ad positionem eiusdẽ b g insistat figura a h g b, quæ etiam ad positionem rectæ a b insistat rectæ b g. Ex a b abscissa sit quælibet b c, cui b D ponatur æqualis; completo parallelogrammo g e c b intelligantur duæ figuræ c f e, c t e ita se habentes ad parallelogrammum g b c e & ad figuram b a h g vt quæcunque h d æquidistans rectæ b c ducatur occurrens lineis a h g, b g, c f e, c t e, c e in punctis h, f, f, t, d, quatuor rectæ f d, f h, f d, t d sint continuè proportionales. Libra grammica c D suspensa ex b perpendiculo b g, brachio b c, intelligantur generari prima b i a quadratrix & secunda b x a respondentes figuræ b a h g sic vt quemadmodum c b ad b o quamuis portionem rectæ b a, ita o h parallela perpendiculo b g & dimetiens figuræ b a h g, sit ad o i dimetientem primæ quadratricis, & ita sit ipsa o i ad o x dimetientem secundæ.

Ostendendum est quæcunque o h parallela rectæ b g ducatur, completo parallelogrammo h o b f, trientem figuræ c t d esse æqualem quadratrici secundæ figuræ b a h f compositæ ex figura D o x & ex secunda quadratrice notã parallelogrammi b o h f.

Ad planum a b g excitata sit perpendicularis b A & completum sit quadratum A b D l, cuius diameter b l; in plano b D l descripta sit parabola b n l cuius axis A b, ordinatim applicata A l. Intelligatur cylindraceum cuius basis b a h g, descriptum per limbum baseos b a h g motu rectæ b A perpendicularis ad planum a b g; intelligatur aliud cylindraceum cuius basis b a l n descriptum per limbum baseos b a l n motu rectæ b g perpendicularis ad planum A b a. Per h ducatur planum h o p parallelum plano A b g secans lineas a b, l n b, l b, l A in punctis o, n m, p. Quoniam per duodecimam tertij tetragonismicorum vt b c vel p o ad b o vel ad o m, ita est b o vel o m ad o n; rectis autem b c, b o æquales sunt d f, f h, & vt d f ad f h ita est f h ad f d, erunt o n, f d æquales; ergo cùm o n r h sit sectio parallelogramma dicylindracei suprà descripti, erunt h r, f d æquales. Quoniam igitur vt d f ad f h, ita est f d vel h r ad t d, rectangulo sub mediis f h, f d contento æquale erit rectangulum f d t sub extremis comprehensum.

Rursus quoniam planum r h f æquidistat plano A b a, si compleantur parallelogramma r h f u, n o b B erunt similia, & cylindracei cum plano r h f sectio r h f y erit similis & æqualis siue, vt Archimedes loquitur, erit eadem cum sectione n o b z. Est igitur r y f parabola quam tangit f h, cuius axis u f, ordinatim applicata u r: ergo portio r y f h est per demõstrata ab Archimede triens parallelogrammi r h f u, siue rectanguli f d t. Quo-

niam igitur dicylindracei cuius sectio n o h r parallela plano A b g singulæ sectiones r h f y parallelæ plano A b a sunt æquales trienti rectanguli f d t, patet ex vndecima tertij tetragonismicorum dicylindraceum illud esse ad positionem plani A b a condicta ratione æquale trienti cylindracei altitudinis b c, baseos c t e.

Rursus quoniam vt c b ad b o vel vt p o ad o m, ita est o h ad o i, & vt o m ad n o ita est o i ad o x, erit ex æquo vt p o ad n o, ita o h ad o x: ergo rectangulum sub mediis n o, o h est æquale rectangulo sub extremis p o, o x. Igitur dicylindraceum genitum ad positionem plani A b g ex figuris b a l n, b a h g est condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis b c baseos b x a o: sed dicylindraceo isti æqualis est, vt ostendimus, triens cylindracei altitudinis f d, baseos c t d: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quando punctū o congruit puncto b patet punctum h congruere puncto g, & nullum esse parallelogrammum o h f b. Præterea ex demonstrationis progressu liquet idem euinci quæcunque sit linea a h siue recta, siue caua ad partes rectæ b g, siue conuexa: & siue pertingat ad g, siue non pertingat.

COROLLARIVM II.

Patet quoque ex demonstratis si habeatur quadratrix secunda parallelogrammi b o h f, & quadratrix secunda D o x, triplum eiusmodi spatij esse æquale figuræ c t d. Figuras autem istiusmodi quarum prima est parallelogrammum quodlibet b c e g, secunda quælibet figura b a h g, tertia c f e, quarta c t e, habentes iam dictam proprietatem voco gradus primum, secundum, tertium, quartum, & rectas d f, f h, f d, d t parallelas rectæ b c, voco earum dimetientes. Dati igitur quarti gradûs ad positionem rectæ b c triens est quadratrix secunda ad positionem rectæ b g: & vicissim datæ secundæ quadratricis ad positionem rectæ b g, triplum est quartus gradus ad positionem rectæ b c.

COROLLARIVM III.

Patet insuper vt habeatur quadratrix secunda D o x, datâ figurâ c t d, ex triente figuræ c t d auferendam esse quadratricem secundam parallelogrammi o h f b: & vicissim vt ex quadratrice data D o x obtineatur quartus gradus c t d, ad triplum ipsius quadratricis D o x addi oportere triplum quadratricis secundæ parallelogrammi o h f b.

COROLLARIVM IV.

Præterea si dicylindraceo genito ex ipsa figura b a h g ad positionem plani A b a in seipsam ducta notum sit æquiponderans axe libræ planæ b g, perpendiculo plano A b g, sustentaculo c e, patet basim cylindracei altitudinis b c, æquantis dictum æquiponderans ad positionem plani A b a esse dimidium quarti gradûs; nam vt d e ad f E dimidium rectæ f h, ita est f h ad dimidium rectæ d s; ergo posita eadem altitudine f h ita quo-

que eſt quadratum f h ad rectangulum contentum ſub f h & ſub dimidio rectæ d s. Cùm igitur quadrati f h centrum grauitatis ſit in perpendiculari ad planum a b g ex puncto E excitata, & cùm vt d f ad f E ita viciſſim ſit quadratum f h ſuſpenſum ad rectangulum contentum ſub f h & ſub dimidio rectæ d s, patet iſtud rectangulum aptatum puncto d ad poſitionem plani A b a æquiponderare quadrato f h ad eandem poſitionem ſtanti: ergo per vigeſimam octauam quarti tetragoniſmicorum ſolido genito ex figura b a h g præſcriptâ iam ratione, æquiponderat ſolidum genitum pari pacto ex ſecundo gradu b a h g & ex dimidio tertij c f e; hoc eſt ex primo gradu c b g e ex dimidio quarti c t e, vt ex demonſtratis liquet.

PROPOSITIO IX.

SIt vt in ſecunda (*Fig.* 26.) totus ſemicuneus expanſus c b a f circulo genitore diametri c f genitus; axis c f bifariam ſectus ſit in g, vt c b g ſit ſemicuneus primus expanſus: ex recta g f productá abſciſſa ſit f E æqualis ipſi a f, & adimpletum ſit parallelogrammum a f E B cuius diameter a E, itemque parallelogrammum f g h a. Ex puncto h excitetur h F perpendicularis ad planum b h a & æqualis rectæ h b: intelligatur figura a h F G condictá ratione æqualis figuræ a h b z ad poſitionem plani F h b, ita vt quodcunque planum G F z ducatur parallelum plano F h b, ſectiones eius F G, F z cum figuris a h F G, a h b z ſint æquales. Intelligatur cylindraceum cuius baſis ſit a h F G, altitudo a f: per limbum a z b intelligatur incedere recta æquidiſtans rectæ h F, & deſcribendo ſuperficiem cylindraceam diuidere cylindraceum altitudinis a f, baſeos a h F G in duas portiones quarum baſes ſunt h a z b, a z b g f. Iſta vocetur *portio ſecunda cylindracei condicti*. Completo quadrato q h a e intelligatur libra grammica h g ſuſpendi ex h perpendiculo h a, brachio q h, & generetur quadratrix a o n reſpondens figuræ a t z b h, vt ſicut q h ad quamlibet h s portionem rectæ h b, ita f t parallela rectæ a h dimetiens figuræ a t b h, ſit ad r o dimetientem quadratricis. Intelligatur præterea ſolidum cuius ſectio parallela plano F h g ſit z y D triangulum rectangulum ſimile triangulo p f a cuius latera a f, f p ſunt æqualia ſicut in primá deſcriptum fuit, eius verò baſis ſit pars inferior g b t a f ſemicunei expanſi c b a f.

Oſtendendum eſt figuræ iſti cuius ſectio D z y, æquale ad poſitionem plani F h a eſſe cylindraceum altitudinis f A æquantis rectam f g, cuius baſis ſit triangulum rectilineum a E f, demptis cylindraceo altitudinis A f baſeos a o n, & portione ſecunda cylindracei condicti. Euiuſmodi verò ſolidi centrum grauitatis eſſe in plano noto parallelo ad planum A f c.

Quoniam per octauæ libri secundi corollarium 2. figura h b z a est eadem cum figura c b g, sed subcontrariè posita; figura autem c b g si ponatur basis solidi cuius sectiones plano p f a æquidistantes sint quadrata, habet notum æquiponderans per septimam, axe c f perpendiculo plano c f p: igitur si figura h b t a ponatur basis paris solidi erit notum æquiponderans eiusmodi solidi portioni quæ ad plani p f c partes f iacet. Igitur cùm eiusmodi solidum sit ad positionem plani F h a condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis f A vel f g, baseos a o n vt ex methodo vigesimæ quintæ & sextæ quarti tetragonismicorum liquet, erit per superioris corollariū secundum nota secunda quadratrix respondens primæ a o n siue tota sumatur, siue ex parte: ac proinde notum est planum parallelum plano F h a incedens per centrum grauitatis cylindracei altitudinis f A, baseos a o n. Similiter cùm cylindracei condicti baseos a h F G, altitudinis a f, centrum grauitatis iaceat in plano noto parallelo ad planum F h a, & portionis primæ centrum grauitatis iaceat in plano noto parallelo ad idem F h a vt ex septima constat, notum erit planum parallelum illis incedens per centrum grauitatis portionis secundæ. Cùm igitur cylindracei altitudinis A f, baseos a f E trianguli rectilinei centrum grauitatis iaceat in plano noto eisdem parallelo, patet si ex isto cylindraceo cylindraceum baseos a o n, & portio secunda demantur ad positionem plani F h a, residui centrum grauitatis iacere in plano noto parallelo ad planum F h a.

Quoniam verò solido cuius sectio sit triangulum a f p, basis parallelogrammum a h g f, ad positionem plani p f c æquale est condicta ratione solidum altitudinis f A vel f g, baseos a f E rectilineæ: solido verò cuius sectio sit triangulum F z i comprehensum sub F z, & sub z i parallelâ rectæ y D in triangulo F y D, æquale est ad positionem plani F h a cylindraceum baseos a o n: secundæ verò portioni condicti cylindracei æqualis est portio cuius sectio est parallelogrammum i z D C; igitur solido cuius sectio est triangulum z y D ęquale est ad positionem plani F h a solidum illud residuum de quo paulo antè egimus, & cuius centrum iacet in noto plano parallelo ad planum F h a: ergo per vndecimam quarti tetragonismicorum solidi cuius sectio est triangulum z y D centrum grauitatis iacet in plano noto parallelo ad planum F h a, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Propositionis primæ corollaria hîc locum habent rectè aptata, vt patet.

PROPOSITIO X.

Iisdem manentibus ostendendum est de dimidio solidi conoidis descripti circa axem g f motu figuræ g b z a f, idipsum quod de dimidio conoidis geniti motu figuræ b c g circa axem c g, ostendimus in septima.

Istud posita demonstratione superioris propositionis ostenditur eodem plane pacto, nec aliud quicquam adjici oportet: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quoniam ex corollario primo septimæ æquiponderans toti quadranti conoideos geniti circa axem h a circumuolutione figuræ h b z t a, axe h a, perpendiculo plano F h a, sustentaculo q e, est cylindraceum altitudinis h d æquantis rectam h a, baseos æquantis quadratum b g, vel quadrantem quadrati f a imminutum dimidio quadrati f c; istud verò æquiponderans ad æquiponderans solido cuius sectio loco quadrantis circuli sit quadrans quadrati circumscripti est vt binarius ad ternarium per sextam, æquiponderans isti solido homœoconoidi (ita enim fuit appellatum in decima nona primi) erit cylindraceum altitudinis h d, baseos æquantis tres semiquadrantes quadrati f a imminutum tribus quadrantibus quadrati f c. Si igitur quadratum q h a e ponatur ad positionem rectæ q h esse primus gradus, secundus h b z a, quartus ex corollario quarto octauæ erit duplum eiusmodi baseos; videlicet tres quadrantes quadrati f a detractis tribus semissibus quadrati f c. Igitur ex corollario secundo eiusdem octauæ quadratrix quadratricis a o n, librâ q b suspensâ ex h perpendiculo h a, brachio h q, est triens quarti illius gradus; nempe quadrans quadrati f a, detracto dimidio quadrati f c.

Rursus quoniam quadratrix a o n est per corollarium secundum secundæ æqualis semicirculo genitori dempto quadrato g c, si perpendiculum h a mutetur in g f, & brachium h q in g l ipsi æquale, æquiponderans figuræ a o n erit, vt patet ex methodo nonæ & decimæ libri secundi tetragonismicorum, spatium quod ad supensum a o n (hoc est ad semicirculum imminutum quadrato g c) sit vt recta a f ad f g, imminutum quadrante quadrati f a, & auctum dimidio qurdrati f c. Igitur æquiponderans quadratrici a o n, erit quadrans quadrati f a, auctus dimidio quadrati f c, & imminutus circulo genitore. Atque hæc est basis cylindracei altitudinis h d æquiponderantis cylindraceo eiusdem altitudinis, baseos a o n, brachio g l libræ suspensæ ex g, perpendiculo plano A f c.

Præterea iisdem positis quadrato a f E B vt iacet manenti æquiponderans ita inuenitur. Fiant tres rectæ g f, f a, f V proportionales, & f V diuidatur bifariam in M; igitur rectangulum M f E vel V f n æquiponderat quadrato a f E B, vt ex methodo primi corollarij septimæ constat. Rursus quoniam vt recta g f ad f a, ita est quadratũ g f ad circulum genitorem æqualem rectangulo g f a, & vt recta g f ad f a ita est f a ad f V, ac proinde ita est rectangulum g f a siue circulus genitor ad rectangulum g f V siue ad quadratum f a; erunt porportionalia tria hæc spatia, quadratum f g, circulus genitor, & quadratum f a. Cum igitur vt recta f a ad f V, vel vt g f ad f a, ita sit quadratum f a ad rectangulum a f V, & ita etiam sit quadratum g f ad circulum genitorem, patet quatuor spatia

esse continuè proportionalia, quadratum g f, circulum genitorem, quadratum a f, rectangulum V f a. Est igitur V f a ad quadratum f g semidiametri circuli genitoris in triplicata ratione circuli ad quadratum suæ semidiametri. Est ergo V f a *quartus terminus progreßionis perspectæ*, cuius dimidium est rectangulum V f n. Igitur cùm dimidium quarti termini perspecti æquiponderet parallelogrammo a f E B, libra g h suspensa ex g perpendiculo g f, brachio g l, triens huius æquiponderantis, hoc est sextans quarti termini perspecti æquiponderabit toti triangulo f a E, vt ex quintæ methodo apertè constat. Igitur cylindraceo cuius basis sit triangulum a f E, altitudo f A æquiponderat iisdem positis cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis sextantem quarti termini perspectæ progressionis: nam ipsa hæc est progressio, quam *perspectam* initio huius libri diximus & cuius hæc est natura vt primus terminus ad secundum sit sicuti est diameter circuli ad rectam æqualem toti peripheriæ; quod ad calculum centrorum numeris quàm proximè exprimendum miros præstabit vsus.

Rursus cylindracei condicti insistentis super basi a h F G pars prima respondens figuræ a h b z est æqualis per quartam cylindraceo altitudinis h d vel a h, baseos æquantis circulum genitorem imminutum duplo quadrati g c. Æquiponderans eidem primæ parti axe h a perpendiculo plano d h a, sustentaculo q e est per demonstrata paulò antè cylindraceum altitudinis h d, baseos æquantis tres semiquadrantes quadrati f a imminutos tribus quadrantibus quadrati f c. Si igitur perpendiculum h a mutetur, vt suprà in g f, & brachium h q in g l ipsi æquale, æquiponderans primæ partis condicti cylindracei erit spatium quod ad primam illam partem suspensam sit vt recta a f ad f g, imminutum æquiponderante antè inuento: erit igitur cylindraceum altitudinis f A vel f g. baseos æquantis quinque octauas partes quadrati f a auctas tribus quadrantibus quadrati f c, & imminutas duobus circulis genitoribus.

Quoniam igitur cylindraceum condictum baseos a h F G altitudinis a f est ad positionem plani F h à condicta ratione æquale cylindraceo cuius altitudo a f, basis sit figura a h F G; hæc verò figura quando tota sumitur æquat quadratum f g vel a h ex duodecima primi, quando verò non sumitur tota sed pars eius ad positionem rectæ h F, est æqualis per octauam rectilineo noto; quando igitur tota sumitur istud dicylindraceum erit ad positionem plani A f c condicta ratione æquale cylindraceo baseos parallelogrammæ g h a f altitudinis f A. Igitur cùm basi g f a h æquiponderet dimidium quadrati a f ex methodo supra tradita, cylindraceo isti siue cylindraceo condicto æquiponderabit cylindraceum altitudinis A f, vel f g, baseos æquantis dimidium quadrati f a. Tale igitur est æquiponderans duabus simul partibus cylindracei condicti: ergo dempto æquiponderante primæ partis relinquetur æquiponderans secundæ nempe cylindraceum altitudinis f g baseos æquantis duos circulos genitores im-

minutos semiquadrante quadrati f a, & tribus quadrati f c quadrantibus.

Præterea quoniam cylindraceo altitudinis f A baseos rectilineæ f a E æquiponderat cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis sextantem quarti termini perspecti, si inde auferatur æquiponderans secundæ parti cylindracei conditi, & æquiponderans cylindraceo baseos a o n, residuum fiet æquiponderans solido cuius sectio est triangulum z D y, nempe cylindraceum altitudinis f g, baseos æquantis sextantem quarti termini perspectæ primæ progressionis auctum quadrante quadrati f c, imminutum octaua parte quadrati f a, & circulo genitore.

Igitur ex corollario sextæ quadruplum huius æquiponderantis videlicet bes termini quarti perspecti auctus quadrato f c, imminutus dimidio quadrati f a & quatuor circulis genitoribus est basis cylindracei altitudinis f A, quod repræsentat æquiponderans dimidio conoideos geniti circa axem g f motu partis inferioris b z a f g, libræ planæ axe f c, perpendiculo plano A f c, sustentaculo l x parallelo ad rectam g f.

Igitur si æquiponderanti isti addatur spatium æquiponderantis dimidio conoideos superioris collectum in corollario septimæ, fiet æquiponderans dimio totius conoideos motu figuræ c b a f descripti, nempe cylindraceum altitudinis f A baseos æquantis bessem termini quarti perspecti deductis quatuor circulis genitoribus.

COROLLARIVM II.

Calculus reliquorum casuum tractari debet simili methodo, qui quidem tam latè patent quàm propositio prima cum suis corollariis.

PROPOSITIO XI.

Sit (*Fig.* 27.) semicuneus primus expansus h o c a genitus circulo diametri c u, centri a, eius basis a h secta sit bifariam in r; in quam incidat r q parallela rectæ a c, & æqualis dimidio rectæ a c, vel a u. Intelligantur completa parallelogramma h a u g, b h r q, y q r a. Sit b h t q semicuneus expansus genitore circulo centri b, semidiametri b h, sit quoque y u i q semicuneus alter expansus genitore circulo centri y, semidiametri y u; figura h t q i u a sit illa quam *ex finibus versis* appellauimus in secundo corollario decimæ tertiæ secundi libri, ac proinde quæcunque t l parallela axi a c ducatur occurrens basi h a in e, limbo h o c in o, lateri g u in l, tres rectæ l e, e o, e t sint proportionales. Intelligatur præterea ex puncto a excitari a m perpendicularis ad planum c a b æqualis rectæ a c. Ponatur circa axem a h manentem circumuolui figura h o c a & gignere conoides cuius tantùm quadrans interceptum planis h a c, m a h, m a c hic consideratur perspicuitatis causa; cùm ex quadrantis modulo ad totum transitus facilè

fiat: ex recta h a, producta abscindatur a B æqualis rectæ a c: vt est quadratum diametri ad circulum, ita fiat recta a m ad a p.

Ostendendum est cylindraceũ baseos h t q i u a altitudinis a p esse ad positionẽ plani p a c condicta ratione æquale conoidis quadranti proposito; & libra B h suspensa ex a perpendiculo plano m a c notum esse cylindraceum altitudinis p a, baseos æquantis rectilineum (dato circuli tetragonismo) notum; æquale spatio quod æquiponderat quadranti, vel cuilibet eius portioni ad positionem plani p a c sumptæ.

Quoniam tres rectæ l e, e o, t e sunt proportionales, rectangulum altitudinis l e vel a m, baseos t e erit æquale quadrato e o: ergo per vndecimam quarti tetragonismicorum cylindraceum altitudinis a m baseos h t q i u a erit ad positionem plani m a c condicta ratione æquale quadranti solidi homœoconoideos cuius sectiones sunt quadrata parallela plano m a c, latera autem eorum sunt ordinatim applicatæ ad basim h a semicunei expansi h o c a. Igitur vt in decima nona primi ostendimus pro pari casu, cylindraceum altitudinis p a eiusdémque baseos erit quadranti conoideos proposito æquale condicta ratione ad positionem plani m a c.

Quoniam igitur cylindraceum altitudinis p a, baseos h t i u a ad positionem plani p a c est condicta ratione æquale quadranti conoideos circa basim a h descripti; per eandem vndecimam quarti tetragonismicorum, quod ad positionem plani m a c æquiponderabit cylindraceo, æquiponderabit quoque quadranti: sed quod æquiponderat cylindraceo altitudinis a p, est cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis æquiponderans figuræ h t q i u a ad positionem rectæ a c, vt ex methodo vigesimæ quintæ quarti tetragonismicorum liquet: ergo cùm ex tertiæ methodo habeatur æquiponderans figuræ h t q i u a cuilibet portioni ad positionem rectæ a c sumptæ, patet quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ex methodo calculi initi in corollariis septimæ & decimæ inuenitur quadrãti conoideos integrè sumpto æquiponderare axe a c perpendiculo plano m a c, brachio a B cylindraceum altitudinis p a, baseos æquantis quadrantem quadrati a h, imminutum quadrànte quadrati a c, ac proinde toti conoidi æquiponderare quadratum a h imminutum quadrato a c: dimidio verò eiusmodi conoideos abscisso per planum m a h, æquiponderare dimidium quadrati a h imminutum dimidio quadrati a c. Diuidatur enim a B bifariam in C, vt rectæ q r, a C sint æquales; ex recta r a abscindatur r s rectæ q r æqualis: igitur per demonstrata initio corollarij primi primæ librâ a h suspensâ ex r perpendiculo r q, brachio r s, æquiponderans figuræ b h t q est æquale quadrato q r: ergo per recessum si axis r q mutetur in a y, & brachium r s in a C æquiponderans figuræ b h t q erit spatium quod ad b q t h sit vt recta a r ad r s auctum quadrato q r: sed illud spatium proportionale per demonstrata initio eiusdem corollarij est

larij est æquale semicirculo genitori semidiametri q r: ergo figuræ b q t h librâ C h suspensâ ex a perpendiculo a y, brachio a C æquiponderat semicirculus semidiametri q r auctus quadrato q r. Rursus iisdem positis parallelogrammo a h b y vt iacet manenti ex methodo corollarij primi decimæ æquiponderat dimidium quadrati h a: ergo figuræ residuæ y q t h a æquiponderat brachio a C, perpendiculo a y dimidium quadrati h a imminutum semicirculo semidiametri q r, & quadrato q r: sed figuræ u i q y iisdem positis æquipōderat per demōstrata in corollario secundo secundæ propositionis dimidium eiusdem circuli dempto quadrato q r: ergo figuræ u i q t h a æquiponderat dimidium quadrati h a imminutum duplo quadrati q r vel dimidio quadrati a c: Igitur brachio a B, æquiponderat prioris æquipondarantis dimidium, per octauam secundi tetragonismicorum, nempe quadrans quadrati a h, imminutus quadrante quadrati a c. Ergo quadruplum illius est quadratum h a imminutum quadrato a c: & huius dimidium illiusque duplum est dimidium quadrati h a imminutum dimidio quadrati a c.

COROLLARIVM II.

Propositionis nonæ corollaria hic locum habent, vt patet.

PROPOSITIO XII.

Iisdem manentibus compleatur totus semicuneus expansus vel tota semicycloides parua u c o h x A, additá parte inferiore u a h x A, & figuræ u i q t h a subcontrariè posita sit figura eadem D h f P, ita vt tres E F, F z, F R dimetientes figurarum g A D h, h x A D, h f P D sint proportionales, est enim h x A D subcontrariè posita eadémque cum figura h o c a per superioris libri octauam in corollario. Ex rectâ h g abscindatur g V æqualis ipsi g h, & compleatur parallelogrammum g A T V: intelligatur figura T H g V ad positionem rectæ g h insistere ita rectæ T V, vt quæcunque S E parallela rectæ a c ducatur occurrens lineis T V, T H g, A g, A x h in punctis S, H, E, z, tres rectæ S E, E z, S H sint proportionales.

Ostendendum est figuram T H g V ad positionem rectæ a c esse condicta ratione æqualem parallelogrammo A g h D aucto figura h f P D, & imminuto bis figura A z h D: ac proinde sicuti in superiore, librâ a h suspensâ ex a perpendiculo plano m a c, brachio a B æquiponderans quadranti conoidis circa axem g A circumuolutione figuræ g A x h esse idem quod æquiponderans cylindraceo altitudinis a p, baseos æquantis rectilineum ex dato tetragonismo circuli notum.

Figuræ A x h D axe h D sustentaculo M P æquiponderat condicta ratione ad positionem rectæ a c dimidium figuræ h f P D; cùm enim tres

rectæ F N vel a c, z F & F R sint proportionales, vt F N brachium ad dimidium rectæ F z, ita vicissim est tota F z ad dimidium rectæ F R: ergo ex vigesima octaua quarti tetragonismicorum dimidium figuræ D h f P aptatum sustentaculo M P æquiponderat condicta ratione figuræ A z h D. Si igitur axis h D mutetur in g A & sustentaculum P M in T V, æquiponderans eidem figuræ aptatum sustentaculo T V erit ipsa figura A z h D imminuta dimidio figuræ D h f P, vt ex nona secundi tetragonismicorum liquet. Præterea quoniam parallelogrammo A g h D axe g A sustentaculo V T æquiponderat condicta ratione ad positionem rectæ g h dimidium parallelogrammi ipsius A g h D, æquiponderans figuræ A g h x erit iisdem positis condicta ratione æquale dimidio parallelogrammi A g h D ad positionem iam dictam sumpti, addito dimidio figuræ h f P D, & ablata figura A z h D. Igitur cùm figura T H g V sit ad positionem eandem condicta ratione dupla istius æquiponderantis, erit ipsa parallelogrammum A g h D auctum figurâ h f P D & imminutum bis figura A z h D. Ergo vt ex superiore liquet cylindraceum altitudinis a p baseos V T H g est ad positionem plani m a c condicta ratione æquale quadranti conoideos circa rectam g A descripti motu figuræ A z h g: & habent idem æquiponderans: sed cylindraceo æquiponderat cylindraceum altitudinis a p, baseos æquantis rectilineum vt ex præcedentis methodo patet notum, quod figuræ T V g H æquiponderat iisdem positis: ergo &c. quod erat demonstrandùm.

COROLLARIVM.

Calculus pro casu quadrantis conoideos respondentis toti figuræ g A z h circa rectam g A manentem circumuolutæ exhibet cylindraceum altitudinis a p baseos æquantis nouem decimas sextas partes quadrati u A imminutas circulo genitore, & septem decimis sextis quadrati u c. Ex rectâ a D producta abscindatur D Y æqualis rectæ a c vel a B. Quoniam figura T H g V est parallelogrammum A g h D auctum figurâ D h f P, & imminutum bis figurâ A x h D: librâ autem Y a suspensâ ex D perpendiculo D G æquiponderat figuræ A g h D dimidium quadrati D h vel h a vt ex corollario decimæ liquet; figuræ verò D h f P per corollarium superioris æquiponderat quadrans quadrati D h imminutus quadrante quadrati a c; figuræ demum a z h D bis sumptæ æquiponderat per corollarium secundum secundæ circulus diametri u c imminutus bis quadrato a c: summa ex illis collecta erit æquiponderans figuræ T H g V brachio D Y, perpendiculo D G, videlicet tres quadrantes quadrati D h aucti septem quadrantibus quadrati a c, & imminuti circulo diametri u c. Ipsa porrò figura T H g V est tres quadrantes circuli genitoris diametro u c descripti dempto bis quadrato a c: nam prima pars A g h D est dimidium circuli genitoris ex corollario septimæ; secunda D h f P est quadrans eiusdem circuli siue rectangulum b h D G; tertia est bis quadratum a c. Si igitur brachium Y D mutetur in a B & perpendiculum D G in a y, æ-

quiponderans postremum erit spatium quod ad figuram T H g V sit vt recta D a ad a c imminutum æquiponderante priore. Cùm igitur T H g V sit tres quadrantes genitoris circuli demptis duobus quadratis a c, proportionale illi spatium ex methodo corollarij iam dicti erit tres quadrantes quadrati u A vel a D subductis duobus circulis genitoribus: ergo deducto priore æquiponderante relinquetur æquiponderans figuræ T H g V, nempe nouem decimæ sextæ quadrati a D deducto circulo genitore, & septem decimis sextis quadrati u c. Istud verò æquiponderans est basis cylindracei altitudinis a p, quod æquiponderat quadranti conoideos propositi.

PROPOSITIO XIII.

Iisdem manentibus vt in vndecimâ, circa axem g u intelligatur circumuolui figura g h o c u.

Ostendendum est figuram cuius dimetiens parallela rectæ u c sit tertia proportionalis post primam L u, secundam l o parallelam rectæ u c interceptam recta u g & arcu h o c, esse compositam ad positionem rectæ u a ex parallelogrammo u g h a, ex figurâ h q i u a & ex bis figurâ h o c a; ac proinde librâ a h suspensâ ex a perpendiculo plano m a c, brachio a B notum esse æquiponderans quadranti huius conoidis nempe cylindraceum altitudinis a p, baseos æquantis rectilineum notum, posito circuli tetragonismo.

Quoniam enim tres rectæ l e, e o, t e sunt proportionales, erunt quoque proportionales l e, l o composita ex prima l e & ex e o secundâ, & composita ex primâ, bis secundâ, & semel tertiâ; cùm vt prima trium proportionalium ad primam & secundam, ita sit prima secunda, ad primam, bis secundam & tertiam simul sumptas. Cùm igitur tertia ista figura respondens secundæ g h o c u sit hoc pacto composita, & illi æquiponderans ad positionem rectæ a u sit notum vt ex superioribus duabus liquet, erit quoque nota basis cylindracei altitudinis a p, æquiponderantis ad positionem plani p a c, libra B h suspensa ex a perpendiculo a u, brachio a B, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quando poneretur circumuolui circa quamuis rectam, parallelam rectæ a h, obtinebitur tertia illa figura proportionalis, non multum absimili methodo, vt propiùs inspicienti patebit. Nam per axis paralleli rectæ h a recessum ab ipsa h a manet dimidium eiusmodi tertiæ figuræ inuentæ pro æquiponderante in primo statu ante recessum, & augetur figura proportionali quæ ad tertiam sit vt recessûs interualum ad u a rectam. Huius verò duplum vnà cum parallelogrammo cuius latus parallelum rectæ a h se habeat ad u a, vt quadratum interualli recessûs ad quadratum u a, erit tertia proportionalis quæsita. Nec dissimilis admodum

erit ratio per accessum, vel inuertendo brachium ad partes oppositas, prout ex nona & decima secundi tetragonismicorum patet, & planius fiet ex calculo casuum specialium in sequentibus. Semper verò eiusmodi tertiæ figuræ perinde obtinebitur æquiponderans brachio B a, perpendiculo a u. Istud quoque annotari oportet, figuram h q i u a esse totam semicycloidem paruam circulo diametri u a genitam centro y, ita vt pars eius superior sit u i q y, inferior y q t h a; vt ex decima tertia secundi liquet.

COROLLARIVM II.

Totius istius conoidis quadranti æquiponderans cylindraceum altitudinis a p si hoc calculo computetur, eius basis inuenitur esse tres decimæ sextæ partes quadrati a D auctæ circulo genitore diametri u c, & imminutæ nouem decimis sextis quadrati u c. Nam parallelogrammo u g h a æquiponderat ex corollario superioris dimidium quadrati a h; figuræ u t h a quadrans eiusdem quadrati imminutus quadrante quadrati a c; figuræ h o c a bis sumptæ circulus genitor imminutus duobus quadratis a c. Igitur tertiæ illi figuræ brachio a B, perpendiculo a u æquiponderat dodrans quadrati a h auctus circulo genitore, & imminutus nouem quadrantibus quadrati a c; hoc est tres decimæ sextæ partes quadrati a D vel u A auctæ circulo genitore & imminutæ nouem decimis sextis quadrati u c.

COROLLARIVM III.

Si in vnum confundantur æquiponderantia in superioris propositionis corollario, & in præsentis 2. inuenta, fiet æquiponderans quadranti totius conoidis motu figuræ u A h c circa axem u A geniti, nempe cylindraceum altitudinis a p, baseos æquantis dodrantem quadrati u A vel a D, deducto quadrato u c. Duplum illius dimidio conoidis respondebit, & quadruplum toti, vt in corollario vndecimæ ostensum fuit.

COROLLARIVM IV.

Corollaria nonæ aptari possunt præsenti propositioni, cum opus fuerit.

PROPOSITIO XIV.

Rectæ a b, b g (*Fig.* 28.) secent se ad normam; centro b descriptus sit circulus per a, g, cuius quadrans a f g b, sit parabola a p g cuius vertex g, axis g b, ordinatim applicata b a: circuli diameter f b g intelligatur suspendi ex centro b perpendiculo b a, & generari prima, secunda, tertia quadratrices g m, g l, g i respondentes quadranti circulari ita vt sicuti est f b ad b q quamlibet portionem rectæ b g, sic sit ordinata q f ad ordinatim q m primæ quadratricis, & q m ad q l ordinatam secundæ, & q l ad q i ordinatam tertiæ. Sit alia quadratrix g y x respondens figuræ a p g b ita vt sicuti f b ad b r, sic p r parallela rectæ d b sit ad r x.

Ostendendum est si intelligatur ad positionem rectæ b g figura b g

l u cuius limbus sit quadratrix secunda g l, basis b u portio rectæ a b productæ; intelligatur autem alia figura b g y x u cuius limbus sit quadratrix g y x; tres figuras quarum prima est parallelogrammum f b u e, secunda est limbi g l, tertia limbi g y x, ita esse positas vt quæcunque e l parallela rectæ b g ducatur occurrens lineis f e, b u, g y x, g l in e, u, x, l, tres rectæ e u, u l, u x sint proportionales.

Per f ducatur f n parallela rectæ b g occurrens limbo parabolæ in p; rectæ a b in n, rectæ e s in o: igitur per tertiam tertij tetragonismicorum tres rectæ o n, n f, n p sunt proportionales. Rursus quoniam vt f b ad b q ita ex generatione quadratricis est f q ad q m, & q m ad q l; vt autem f b vel o n ad b q vel ad n f, ita est f n vel b q ad n p vel ad b r; ergo tribus rectis f q, q m, q l proportionales sunt tres f b, b q, b r; ergo ex æquo vt f b ad b r, ita f q vel p r ad q l: sed ita etiam ex generatione quadratricis est eadem p r ad r x: ergo duæ rectæ r x, q l sunt æquales, cúmque sint parallelæ, recta x l connectens puncta x l æquidistabit rectæ b g: tres igitur rectæ e u, u l, u x cum sint æquales tribus o n, n f, n p sunt proportionales, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Demonstrationis robur viget in quibuslibet aliis figuris dummodo tres rectæ o n, n f, n p sint proportionales. Oportet autem cauere vt si recta e u secet in duobus punctis limbos g l, g y, sumantur illæ tres e u, u l, u x quæ tribus o n, n f, n p proportionalibus sunt æquales, alioqui peruersè omnia incederent.

COROLLARIVM II.

Quoniam tres rectæ e u, u l, u x sunt proportionales patet ex vigesima octaua quarti libri tetragonismicorum, si b u ponatur axis libræ planæ & sustentaculum f e, cui ad positionem rectæ b g aptetur dimidium figuræ tertiæ, ita vt puncto e aptetur dimidium dimetientis u x, & sic de aliis, istud dimidium ita aptatum æquiponderare condicta ratione figuræ limbi g l: ergo si libra plana conuertatur in grammicam f g suspensam ex b perpendiculo b u, brachio f b, idem manebit æquiponderans vt ex corollario eiusdem vigesimæ octauæ liquet.

COROLLARIVM III.

Axis b g ita diuidatur in d vt d g ad b d sit sicut ternarius ad binarium, & per d agatur d c parallela rectæ b a; ex demonstratis in prima quarti tetragonismicorum centrum grauitatis figuræ a p g b est in recta d c: ergo axe b a sustentaculo f o æquiponderans figuræ a p g b est vt f b ad b d hoc est vt quinarius ad binarium: sed a p g b est bes quadrati b g: ergo æquiponderans figuræ a p g b est quatuor decimæ quintæ partes quadrati b g: ergo tota tertia quadratrix g i b est dimidium illius, nempe duæ decimæ quintæ partes quadrati b g.

COROLLARIVM IV.

Quadratrix prima g m b toti quadrāti circulari respondens est vt patet ex decima octaua tertij tetragonismicorum triens quadrati b g : secunda g l b tota est quadrans figuræ a f g b, nam cuneo baseos a f g b, cuius acies sit a b, & angulus plani inclinati per a b ducti sit semirectus, æquiponderat cylindraceum altitudinis b g baseos æquantis quadrantem figuræ a f g b vt in decima tertia primi ostendimus : ergo per methodum vigesimæ quintæ & vigesimæ sextæ quarti tetragonismicorum secunda quadratrix g l b tota est quadrans figuræ a f g b vel decima sexta pars totius circuli centro b geniti.

PROPOSITIO XV.

SIt (*Fig.* 29.) quadratum d b C Q cuius diameter b Q ; ex puncto d excitata sit ad planum Q d b perpendicularis d z æqualis lateri d Q ; ex centro d descriptus sit quadrans circularis d z M Q, qui basis sit cylindri habentis axem d b ; ex recta Q d abscissa sit d L ipsi æqualis, & completo quadrato d b B L cuius diameter b L, descripta sit parabola b h L cuius axis b B, ordinatim applicata B L, ac proinde latus rectum d b. Intelligatur conus descriptus motu trianguli b L d circa latus manens b d, eiusque quadrans inclusus planis d b B, z d b consideretur in præsenti propositione. Iungatur recta z b, & in triangulo b z d descripta sit parabola b m z quam tangat recta b d in puncto b, & cuius axis æquidistet rectæ z d. Intelligatur solidum cuius quælibet sectio parallela plano z d Q sit e c g f quadrans ellipseos semiaxium f g lateris parallelogrammi b f g C, & f e parallela rectæ d z occurrens rectæ z b in e, & parabolæ f m z in m : intelligatur aliud solidum cuius sectio parallela plano z d Q sit m q g f quadrans ellipseos semiaxium m f, f g. Recta f g producta occurrat limbo b h L in h, & rectis b L, b Q in i, n ; plani e f i sectio cum quadrante coni sit quadrans circularis i p e f : per h ducta sit ordinata h p ad f i semidiametrum circuli centro f per i descripti. Recta t n parallela rectæ b d occurrat lateribus, d Q, b C in y, t, & per y ducta sit y M ordinata ad semiaxem d Q quadrantis circularis z M Q d.

Ostendendum est vt est recta b a ad m f ita esse spatium z d M y comprehensum arcu z M & rectis z d, M y, d y ad spatium h p e f comprehensum arcu p e, & rectis p h, h f, f e ; & ita spatium M y Q ad p h i : spatiúmque m f n q n comprehensum arcu m q & rectis m f, f n, n q esse æquale spatio p h f e ; spatiúmque q n g, spatio p h i.

Quoniam enim vt a b dimidium diametri a d, ad b f, ita est f g recta ad i f, erit vt quadratum a b ad b f, ita quadratum f g ad f i : sed qua-

dratum a b ad b f est vt recta a b ad f m vt ex duodecima tertij tetragonismicorum liquet; ergo vt recta a b ad f m, ita est qudratum f g ad f i quadratum: ergo vt recta a b ad f m, ita quadrans circularis z M Q d ad quadrantem circularem i p e f. Rursus quoniam tres rectæ a b vel f g, f i, f m sunt proportionales ex illa duodecima, quadrans ellipticus m q g f erit æqualis quadranti i p e f, ac proinde ad positionem plani z d Q solidum cuius sectio m q g f erit condicta ratione æquale quadranti coni cuius sectio i p e f. Igitur vt recta a b ad f m, ita est quadrans circularis semidiametri f g ad quadrantem ellipticum m q g f. Sunt igitur proportionales quadrans circularis semidiametri f g, quadrans ellipticus e c g f, & quadrans ellipticus m q g f; cùm sint præditi eodem semiaxe f g, & alij semiaxes f D vel f g, f e, f m sint proportionales; inter se verò sunt vt recta a b ad b f.

Rursus quoniam vt a b recta ad b f ita est f g recta ad f n, & ita est etiam ex duodecima illâ tertij, recta f i ad h f; semiaxes f i, f g secantur proportionaliter in h & n: ergo cùm quadrans ellipticus m q g f sit æqualis quadranti e f i, & semiaxes f g, f i secentur proportionaliter in n & h, erit f m q n portio æqualis prtioni p e f h, & portio residua q g n residuæ p h i: Tres ergo portiones z d y M, c f n c, m f n q sunt proportionales tribus rectis a b, b f, f m; tresque item M y q, c n g, q n g: ergo ex æquo vt a b ad f m ita est z d y M ad f m q n vel p h f e; & ita etiam est M y q ad q n g vel p h i; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Quoniam vt f g ad f i vel f e, ita est f e ad f m, & semiaxes f g, f i secantur proportionaliter, tres rectæ M y, p h, q n erunt proportionales tribus a b vel f g, f n vel b f, & f m: ergo cùm tres etiam M y, c n, q n sint proportionales iisdem tribus, erunt c n, p h æquales; ac proinde septum medium, hoc est portio superficiei cylindraceæ descriptæ motu rectæ parallelæ ad rectam z d incedentis per limbum b h L inclusa quadrante coni ad positionem plani z d Q, habebit easdem altitudines cùm septo medio siue portione plani E b Q recti ad planum d b C intercepto intra quadrantem solidi elliptici e c g f. Præterea descriptus sit quadrans circularis b a C, & in eo quadratrices prima b r C, secunda b o C occurrentes rectæ n t in r, o: quoniam vt a b vel B b ad b f vel ad f n, ita est M y vel t s ad c n, & c n ad q n, & ita quoque est t s ad t r, & t r ad t o vt ex generatione quadratricum liquet, erunt c n, q n æquales rectis t r, t o, & rectangula t n c, t n q erunt æqualia rectangulis n t r, n t o; & cuneatum cuius sectio est t n c, cuneato, cuius sectio est n t r, & ita de aliis.

PROPOSITIO XVI.

Iisdem manentibus sectio plani t y M cum superficie solidi cuius sectio est e c g f, est linea recta t c M, sectio verò cum solido cuius

sectio m q g f, est parabola t q M cuius tangens t y, axis æquidistat rectæ y M.

Quoniam enim vt B b ad b t, hoc est vt t y ad c n, ita est M y ad c n, & c n ad q n; & ita quoque est z d ad e f & e f ad f m; sicuti b e z est recta ita quoque t c M erit recta, & sicuti b m z est parabola quam tangit b d & cuius axis æquidistat rectæ d z, ita quoque t q M erit parabola quam tanget recta t y, & cuius axis æquidistabit rectæ M y; id enim ex eo patet quod ordinatim vtrinque applicatæ & parallelæ ad rectam z d sint perpetua lege inter se vt rectæ z d, M y: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quoniam t n q est ceratoides parabolica, patet figuram t n q esse trientem parallelogrammi t n q, ac proinde portionem solidi cuius sectio f m q g interceptam planis ad planum d b C rectis E b C, E b Q esse ad positionem plani E b d æqualem trienti solidi geniti ex triangulo Q b C & ex quadratrice secunda b o C. Tota igitur portio erit vt ex corollario tertio decimæ quartæ patet, æqualis cylindraceo altitudinis b E æquantis rectam b C, cuius basis sit duæ quadragesimæ quintæ partes quadrati b C; Cùm autem ex superiore propositione portio quadrantis coni iacens inter septum medium & planum E b L sit ad positionem plani E b B condicta ratione æqualis portioni solidi cuius sectio m q g f, intercepti inter plana E b Q, E b C, patet totam illam coni portionem esse æqualem eidem cylindraceo.

COROLLARIVM II.

Quod si quæratur portionis eiusdem pars intercepta planis E b B, e f i, illa erit æqualis cuneato genito ex triangulo b n t & ex secunda quadratrice b t o, noto per methodum corollarij secundi suprà laudati, & ex cylindraceo altitudinis n g, baseos t n q quæ est portio nota ceratoidis parabolicæ, Illa itaque pars erit æqualis cylindraceo eiusdem altitudinis, baseos æquantis rectilineum notum.

COROLLARIVM III.

Quoniam si iungatur recta p f, sector i f p componitur ex figura i p h & ex triangulo h f p, hoc est ex dimidio parallelogrammi f h p vel f n q, solidum cuius sectiones sint sector i f p & alij similiter sumpti, erit ad positionem plani E b C condicta ratione æquale solido cuius sectio est i p h suprà computato, & dimidio solidi geniti ad positionem plani E b C ex triangulo b d Q & ex septo medio cuius dimetiens q n, hoc est dimidio solidi geniti ad positionem plani E b d ex triangulo Q b C: & ex quadratrice b o C. Erit igitur vt ex superiore corollario patet æquale cylindraceo altitudinis E b, baseos æquantis rectilineum notum; & pro casu totius figuræ basis eiusmodi erit vna decima quinta pars vel tres quadragesimæ quintæ partes quadrati b C. Igitur solidum cuius sectio parallela

plano

plano E b C est sector p f i, est æquale cylindraceo altitudinis E b, baseos æquantis rectilineum notum, quod in casu iam computato erit quinque quadragesimæ quintæ partes, vel vna nona quadrati b C. Duplum verò eiusmodi solidi erit æquale cylindraceo altitudinis E b, baseos æquantis duas nouenas partes quadrati b C.

COROLLARIVM IV.

Iungatur recta d M, patet sectorem M d Q esse similem sectori p f i: est enim vt Q d ad d y, ita f i ad f h: ergo arcus M Q, i p sunt similes, atque adeo sectores M d Q, p f i. Si igitur recta f i producta occurrat rectæ L B in F, & interuallo rectæ f F describatur quadrans circularis F G D f & per i ducatur i G parallela rectæ D f occurrens arcui F D in G, arcus F G erit æqualis arcui M Q, cùm rectæ d y, f i vel f n sint æquales, ergo recta f p producta transit per G; vt sectores G F f, p f i sint similes.

COROLLARIVM V.

Hinc denique patet si in cylindro cuius basis sit quadrans circularis L z d, axis d b, consideretur quadrantis cylindri portio intercepta planis E b L, E b B, hoc est cuneus primus; vnà cum portione solidi cuius sectio est triangulum G f i, hoc est vnà cum semicuneo primo cuius basis est quadrans ellipseos axium L b, b E, eiusmodi solidum ex duobus genitum, ad solidum cuius sectio est sector p f i compositum ex duobus aliis solidis esse condicta ratione ad positionem plani E b C vt est recta b a ad f m, vel vt quadratum b a ad b f. Res autem in idem redit quamuis inter parallelas B C, L Q anguli parallelogrammi L B C Q non sint recti vt in nona primi libri monuimus.

PROPOSITIO XVII.

Iisdem manentibus (*Fig.* 30.) angulus L B b sit semirectus, ac proinde angulus L b C rectus, sintque L b, b C æquales: per a ducta sit a t parallela rectæ B C, vt plani E b L sectio cum cylindro baseos L z Q, cuius axis b d, sit circulus diametri t L vt in septima primi ostendimus. Quadrans circularis E b L G fiat genitor semicunei expansi L y n b, ita vt eius dimetiens i y sit æqualis arcui L G, vel F G. Figuræ L y n b librâ grammica t L suspensâ ex b perpendiculo b n, brachio b t respondeat prima quadratrix L c b, & secunda L q b, ita vt sicut brachium t b ad longitudinem b i (hoc est a b ad b f) ita sit i y ad i c, & i c ad i q.

Ostendendum est ad positionem rectæ b n, quadratricem secundam esse æqualem rectilineo noto; & quando tota sumitur, esse æqualem duabus nouenis partibus quadrati b C.

Quoniam enim vt quadratum a b ad b f, vel vt quadratum t b ad b i, ex corollario vltimo superioris ita est sector G F f ad sectorem p i f & ita duplum sectoris illius ad duplum istius; rectangulum autem altitudinis

b C baseos y i est per demonstrata in tertia primi libri æquale duplo sectoris G F f: ergo si rectangulum eiusdem altitudinis baseos i r sit æquale duplo sectoris p i f, vt est quadratum t b ad b i ita erit rectangulum ad rectangulum, ac proinde basis i y ad basim i r. Quoniam verò vt t b recta ad b i, ita ex generatione quadraticum est recta y i ad c i, & c i ad c q; ergo vt quadratum t b ad b i, ita est recta y i ad i q: sed ita etiam ostendimus esse eandem i y ad i r: ergo rectæ i q, i r sunt æquales: ergo rectangulum altitudinis b C, baseos q i quæ est dimetiens ordinata secundæ quadratricis L q b est æquale duplo sectoris p i f. Igitur per vndecimam quarti tetragonismicorum solidum cuius sectio sit dupla sectoris p i h est ad positionem plani E b C condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis E b vel b C, baseos L r b quæ est secunda quadratrix: ergo cum ista basis sit ad positionem rectæ b C rectilineo noto æqualis per corollariũ tertium superioris, erit quadratrix secunda æqualis rectilineo noto ad eandem positionem, & tota L q b erit æqualis duabus nouenis quadrati b C, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Quoniam vt t b ad b i ita est i y ad i c; & ita quoque est arcus F G ad arcum similem p i; recta vero y i ponitur æqualis arcui F G ex generatione ipsius figuræ L y i: ergo recta i c est æqualis arcui i p coni cuius axis b d, basis L z Q. Cùm igitur ex primi decima sexta eiusque corollario primo habeamus quadratricem primam L c b, habemus etiam portionem illam superficiei conicæ expansam. Similem superficiei conoideos parabolici obtineremus, si necessarium id foret; quamuis neque istud corollarium erat necessarium; sed prætermittere id noluimus, cùm vno verbo absolueretur: huc tamen reuocari ea oportet quæ in scholio propositionis octauæ libri secundi scripsimus.

COROLLARIVM II.

Quoniam, vt ex nona secundi tetragonismicorum liquet, si ex b L producta auferatur L s æqualis rectæ b L & fiat brachium libræ suspensæ perpendiculo L d, quadratrix prima subcontraria figuræ L y n b ita suspensæ est figura L y n b c, hoc est suspensa figura imminuta quadratrice primâ prioris perpendiculi, quæ absolutè vocatur prima, nam alia dicitur subcontraria; igitur secunda subcontraria erit suspensa figura imminuta bis primâ quadratrice & aucta semel secundâ. Suspensa enim figura notetur elemento A, & quadratrix prima B, secunda C. Patet vt A ad A - B ita esse A - B ad A - B - B † C.

COROLLARIVM III.

Ex simili ratiocinij methodo si pro axe primario b n sumatur quilibet i g inter rectas b n, L Q brachium verò maneat æquale rectæ b t, & suspensum vocetur A vt suprà, prima quadratrix erit per decimam secundi tetragonismicorum. B — à. Voco a spatium quod ad A sit vt recta i b ad b t: simili pacto b, & c voco spatia quæ ad B & C sint in eadem ratione: b

b autem & c c quæ ad B & C sint in duplicata ratione, & ita de b b b in triplicata &c. Igitur vt A ad B — a ita erit B — a ad C — b — b — c c. Quod si punctum i iaceat vltra puncta L, b ad partes t erit prima quadratrix B † a, secunda verò C † b † b † c c. Quæ progressio potest in infinitum propagari, vt intelligunt qui istis sunt assuefacti.

PROPOSITIO XVIII.

SIt semicuneus (*Fig.* 31.) expansus c b a f genitus circulo diametri c f; ex c f producta abscissa sit f T æqualis rectæ f g, & genita sit b n f g brachio f T perpendiculo f a quadratricis quadratrix respondens parti inferiori b i a f g.

Ostendendum est posito tetragonismo circuli istam quadratricem secundam esse rectilineo noto æqualem; & totam f n b g esse æqualem septem vnciis circuli genitoris diametro f c descripti, deductis vndecim trigesimis sextis quadrati f c.

Quoniam completo parallelogrammo e b d a, ex superioris corollario secundo figuræ e a i b secunda quadratrix est ipsa e a i b, quæ est æqualis quadrato g c, vnà cum secundâ quadratrice notata ibidem elemento C quæ est duæ nouenæ quadrati g c, deductâ bis primâ qudratrice quæ per primi decimam sextam est bis semiquadrans, vel semel quadrans circuli genitoris; quadratrix quadratricis figuræ e a i b erit vndecim nouenæ quadrati c g deducto quadrante circuli genitoris. Sed quadratrix quadratricis parallelogrammi f g e a est, vt patet per duodecimam tertij tetragonismicorum, triens ipsius parallelogrammi quod per corollarium secundum secundæ est æquale circulo genitori: ergo quadratrix quadratricis figuræ a i b g f est circuli genitoris septem vnciæ deductis vndecim nouenis quadrati g c, vel vndecim trigesimis sextis quadrati f c, quod pro casu designato erat demonstrandum.

In aliis verò casibus methodus est eadem positâ superiore propositione, eiusque corollariis: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quoniam ex corollarij secundi superioris propositionis methodo quadratrix secunda partis c z b g vt iacet manentis brachio T f perpendiculo f a est † A † bis B † C erit vndecim nouenæ quadrati g e auctæ quadrante circuli genitoris. Ergo quadratrix quadratricis toti c b a f respondens est decem vnciæ vel quinque sextantes circuli genitoris.

COROLLARIVM II.

Quadratrix secunda quarumlibet partium in figura c b a f assignatarum, notam esse, perpendiculo f a vel quouis ei parallelo, patet examinanti rem, neque res eget noua vlla demonstratione homini cui istorum contemplatio est familiaris.

PROPOSITIO XIX.

ISdem manentibus ad planum a f c excitetur perpendicularis f x æqualis rectæ f g; intelligatur conoides genitum circa rectam f a reuolutione totius c b a f; itemque aliud circa b g reuolutione figuræ c z b g: denique aliud circa quamcumque l i parallelam basi f a reuolutione figuræ i z c L.

Ostendendum est librâ grammicâ T g suspensâ ex f perpendiculo plano x f d, brachio T f æquante rectam f g, æquiponderans totius conoidis dimidio iacenti ad partes c esse æquale cylindraceo altitudinis f x vel f g, baseos æquantis trientes quinque circuli genitoris diametro c f descripti. In secundo verò casu si compleatur parallelogrammum g f x d diuidaturque in duo g l u, u l f, æquiponderans dimidio conoidis descripti circa rectam b g manentem, librâ f c suspensâ ex g perpendiculo plano d g b, brachio g f, esse æquale cylindraceo altitudinis g d, baseos æquantis quatuor nouenas quadrati g c. In tertio denique casu librâ f g suspensa ex l perpendiculo plano u l i, brachio l o æquante rectam g f esse æquale cylindraceo eiusdem altitudinis, baseos noto rectilineo æqualis, datâ quadraturâ circuli.

Quoniam ex superioris corollario primo quadratrix secunda figuræ a b c f librâ T g suspensa ex f perpendiculo f a, brachio T f, est quinque sextantes circuli genitoris, ex corollario secundo octauæ triplum huius spatij erit quartus gradus ad positionem rectæ f c, quorum primus sit parallelogrammum dimetientis f T, secundus figura a b c f. Igitur ex corollario quarto eiusdem octauæ æquiponderans solido cuius sectiones sint quadrata parallela plano x f g, latera sint ordinatim applicatæ ad basim f a, est cylindraceum altitudinis f x, baseos quæ sit dimidium quarti gradûs. Rursus ex sexta bes istius cylindracei est æquiponderans periphærico cuius sectio est quadrans circuli inscripti quadrato cuius latus sit duplum ordinatim applicatæ: huius verò bessis duplum est æquiponderans dimidio conoidis ad partes c posito: ergo cùm ex ductu harum minutiarum [illegible] in se ipsas gignatur minutia, æquiponderans quæsitum erit cylindraceum altitudinis f x baseos duplæ spatij inuenti in superiore propositione; eiusmodi ergo basis pro primo casu est quinque trientes circuli genitoris: pro secundo (eadem enim ratio) est quatuor nouenæ partes quadrati g c; pro tertio denique duplum inueniendi spatij ex methodo superioris, eiusque corollariorum: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

SEcent se (*Fig.* 32.) ad normam duæ quælibet rectæ b a, a c; ad positionem rectæ a c insistat rectæ b a figura quæcunque b i c a, &

eadem b i c a ad positionem rectæ b a insistat rectæ a c, ita vt omnes parallelæ ad rectas b a, a c cadant intra figuram b i c a. Intelligatur ex puncto a excitari ad planum b a c perpendicularis x a; concipiatur solidum cuius omnes sectiones parallelæ plano x a b sint quadrata quorum latera sint ordinatim applicatæ ad rectam a c, vel certè quadrantes circulorum vt in superiore & in sexta exposuimus; intelligatur aliud solidum cuius sectiones ad positionem plani x a c sint vt modo diximus quadrata vel quadrantes circulorum. Ex rectis a c, a b abscindantur e a, a d inter se æquales.

Ostendendum est solido sectionis quadratæ genito ad positionem plani x a c, brachio d a, perpendiculo plano x a c æquiponderare idem spatium quod solido sectionis quadratæ genito ad positionem plani x a b, brachio e a perpendiculo plano x a b. Idémque æquiponderans respondere solidis sectionum periphericarum pari pacto comparatis.

Compleatur parallelogrammum e a b h, & super recta h e ad positionem rectæ a c insistat figura h m a e cuius quælibet dimetiens t m parallela rectæ a c sit tertia proportionalis post primam t f dimetientem parallelogrammi e a b h, & secundam f i dimetientem figuræ b i c a; per m ducatur m q parallela ad rectam h e; ex punctis e, q educantur perpendiculares e o, q p ad planum h e a æquales dimetientibus h e, m q figuræ h m a e, & iungantur rectæ h o, m p quæ erunt sectiones planorum o e h, p q m & superficiei cylindraceæ descriptæ motu rectæ parallelæ ad rectam h o incedentis per limbum h m a, vt in corollario tertio primæ notatum extat. Intelligatur quoque superficies cylindracea descripta simili pacto motu rectæ ad rectam h o parallelæ incedentis per limbum b i c. Per i ducatur planum parallelum plano x a c cuius cum solido contento sub basi b i c a & sub cylindracea superficie modo descripta sit figura f s i; sectio verò cum solido comprehenso sub basi h m a e & sub superficie cylindracea primò descripta sit r t m,

Quoniam vt in prima pari prorsus casu ostendimus figura f s i est eadem cum figura b f i, & figura r t m eadem quoque est cum figura h t m; dimidium autem figuræ h t m ad positionem rectæ a c aptatum sustentaculo h e axe b a æquiponderat figuræ b f i vt iacet manenti: ergo in plano r t i figuræ f f i vt iacet manenti axe f f sustentaculo t r æquiponderabit dimidium figuræ t r m aptatum sustentaculo r t. Igitur ex vigesima octaua quarti tetragonismicorum dimidium solidi cuius sectio est triangulum p m q aptatum plano h e o ad positionem plani x a c æquiponderat condicta ratione solido cuius sectio est triangulum rectangulum i h u habens latera i h, h u æqualia, posito libræ planæ axe b a, perpendiculo plano x a b, sustentaculo plano h e o; siue quod in idem redit recta h e

obeunte vicem sustentaculi. Igitur solido cuius sectio est quadratum lateris h i duplum trianguli i h u, ad positionem plani x a c æquiponderat iisdem positis solidum cuius sectio est triangulum m q p. Sed solidum cuius sectio est triangulum p q m est ad positionem plani x a b idem cum solido cuius sectio est triangulum q y m contentum sub lateribus q m, m y parallelogrammi p q m y, & sub q y eius altera diametro: sunt enim triangula p m q, y m q æqualia: ergo cùm solidum cuius sectio est triangulum y q m habens angulum y q m semirectum, & angulum q m y rectum, sit ex vigesima tertia quarti tetragonismicorum æquale spatio quod cylindraceo altitudinis x a baseos h m a c æquiponderat libræ planæ axe a c perpendiculo plano x a c, sustentaculo d g latere parallelogrammi d a c g, patet spatium quod axe b a, sustentaculo h e æquiponderat solido cuius sectio est quadratum lateris i h vel h u esse æquale solido cuius sectio est triangulum p q m. Cùm igitur per methodum vndecimæ cylindraceum cuius basis est h m a c altitudo x a habeat ad positionem plani x a c idem æquiponderans cum solido cuius sectio parallela plano x a c est quadratum lateris f i, patet solido cuius sectio est quadratum lateris f i axe a c sustentaculo d g æquiponderare idem spatium quod solido cuius sectio parallela plano x a b est quadratum lateris h i, axe a b sustentaculo h e, quod erat demonstrandum. Nam de solidis periphericis cum eorum periphericæ sectiones sint proportionales sectionibus quadratis, rationum consequutio idem euincit.

COROLLARIVM I.

Hic si quando opus fuerit adhiberi cum proportione debent corollaria primæ, vt patet.

COROLLARIVM II.

Rectæ a c insistat ad positionem rectæ a d figura a d n c tertia post primam a d g c, & secundam a b i c, ita vt tres dimetientes l h, h i, h n sint proportionales; ex demonstratis liquet quadratricem figuræ h m a c libra d a suspensa ex a perpendiculo a c, brachio a d, esse æqualem spatio quod figuræ a d n c æquiponderat libra e c suspensa ex a perpendiculo a d brachio e a. Nam solidis quorum sectiones sunt quadrata laterum f i, h i æquiponderant ex præsenti æqualia spatia; ex prima verò illa spatia æqualia sunt cylindraceo altitudinis a x, basium æquantium spatia æquiponderantia modo iam præscripto figuris h m a c, a d n c ergo &c. quod erat demonstrandum. Hanc porrò propositionem extendemus ad curuas in septimæ libri quinti corollario secundo.

PROPOSITIO XXI.

Reuocatâ figurâ vndecimæ & decimæ tertiæ (*Fig.* 27.) circa axem a c manentem gigni conoides motu figuræ A h c u intelligatur. Ostendendum est libra u c suspensa quolibet perpendiculo y b siue punctum y congruat puncto a, vel puncto u, siue non congruat, bra-

chio æquante rectam a c, æquiponderans conoidis istius portioni quæ iacet ad rectæ y t partes h esse idem cum æquiponderante conoidis alterius dimidio geniti circa axem y b motu eiusdem figuræ inuento in illis iam laudatis propositionibus.

Istud ita apertum est ex propositione superiore, vt nihil addendum sit, ne quicquam otioso scribatur calamo, dum ad alia currimus.

PROPOSITIO XXII.

REuocetur (*Fig. 31.*) figura decimæ octauæ, & ex recta a f abscindatur f p æqualis rectæ T f vel f g: intelligatur circa axem f c gigni conoides motu figuræ c b i L, ita vt punctum L sumptum sit ad libitum.

Ostendendum est centrum grauitatis dimidij conoideos abscissi plano u l c esse notum.

Per quartam inueniatur A cylindraceum æquale suspenso; per septimam & decimam inueniatur cylindraceum B æquale spatio quod axe f c, perpendiculo plano x f c, sustentaculo S p latere parallelogrammi p f c S æquiponderat suspenso. Per superiorem inueniatur cylindraceum C æquale spatio quod axe l i, perpendiculo plano u l i sustentaculo o t latere parallelogrammi l h t o, eidem solido æquiponderat. Vt est A suspensum ad B æquiponderans, ita fiat recta p f ad l q abscissam ex l h: vt autem est A ad C ita fiat l o brachium ad rectam l g abscissam ex l c: compleatur parallelogrammum q l g r.

Dico punctum r esse centrum grauitatis solidi quod ad rectæ f c partes b iacet.

Primò centrum grauitatis eiusmodi portionis solidi est in plano c f a, cùm sectiones illius plano u l h parallelæ, sint semicirculi diuisi bifariam per ipsum planum. Præterea ex puncto r excitetur perpendicularis r s ad planum h l c, ergo ex lege æquiponderantium reciprocâ cùm vt suspensum A ad æquiponderans B, ita sit interuallum f p ad g r, centrum grauitatis suspensi erit in plano f r q parallelo ad perpendiculum planum u l c. Simili pacto cùm vt suspensum A ad æquiponderans C, ita sit interuallum o l ad l g, centrum grauitatis suspensi erit in plano f r g; ergo erit in eorum communi sectione f r: sed est etiam in plano b g f: ergo punctum r est centrum grauitatis solidi propositi; ergo istud centrum est notum; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Si tota portio solidi quam vtrinque abscindit planum u l i sumatur, patet eius centrum grauitatis esse punctum g.

PROPOSITIO XXIII.

MAnente eadem figura decimæ octauæ, circa manentem l i intelligatur circumuolui eadem figura i z c l.

Oſtendendum eſt centrum grauitatis dimidij conoideos abſciſſi plano u l i eſſe notum.

Per decimam nonam primi libri inueniatur A cylindraceum æquale ſuſpenſo;& per decimam nonam præſentis ſpatium C æquiponderans ſuſpenſo libræ axe l i perpendiculo plano u l i, ſuſtentaculo o t; per vndecimam & decimam tertiam inueniatur ſpatium B quod æquiponderet ſuſpenſo libræ planæ axe l c, perpendiculo plano u l c, ſuſtentaculo p S. Vt eſt A ad B ita fiat o l recta ad l q; & vt A ad C, ita fiat ad l g. Dico completo parallelogrammo q l g r, punctum r eſſe centrum grauitatis quæſitum. Iſtud oſtenditur vt ſuperior propoſitio.

COROLLARIVM.

Si tota portio ſolidi ſumatur, patet eius centrum grauitatis eſſe punctum q.

PROPOSITIO XXIV.

OCTO problematis ab Anonymo propoſitis ſolutionem eſſe hactenus à nobis pro cycloide paruâ datam demonſtrare.

Primò iiſdem manentibus quæritur dimenſio ſpatij z c y. Demonſtratur in duodecima primi libri & in eius corollariis.

Secundò quæritur centrum grauitatis ſpatij z c y. Demonſtratur in corollario tertiæ.

Tertiò quæritur ſolidum circa baſim z y. Demonſtratur in decima nona primi libri.

Quartò quæritur ſolidum circa axem c y. Demonſtratur in quartâ huius libri.

Quintò quæritur ſolidí totius circa baſim z y centrum grauitatis. Demonſtratur in corollario ſuperioris.

Sextò quæritur centrum grauitatis ſolidi totius circa axem c y. Demonſtratur in corollario vigeſimæ ſecundæ.

Septimò quæritur grauitatis centrum dimidij ſolidi circa baſim z y diuiſi à plano per rectam z y ducto & recto ad c y z planum. Demonſtratur in ſuperiore.

Octauò quæritur centrum grauitatis dimidij ſolidi circa c y geniti & diuiſi à plano per rectam c y ducto & recto ad planum c y z. Demonſtratur in vigeſima ſecunda propoſitione: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXV.

PRoponitur calculus octo problematum pro duplici caſu quem Anonymus in primis ad Europæ Geometras literis deſignauit.

Sit a c d (*Fig.* 33.) cycloides parua circulo genitore diametri c f, eiuſque pars ſuperior ſit b c o, inferior b o d a; rectæ g c, f i abſciſſæ ex rectis b o, a d æquent ſingulæ rectam c g: ad planum c f a ex puncto f excitata ſit perpendicularis f n æqualis rectæ f g, & completum ſit parallelogrammum

logrammum n f g m. Vt quadratum circulo circumscriptum se habet ad ipsum circulum ita ponatur recta f n ad f u: intelligatur perspectæ progressionis in fronte huius libri definitæ primus terminus esse quadratum g c, vt secundus sit circulus genitor diametri f c, & tertius quadratum f a: erit ergo recta f n ad f u vt quadruplum primi termini perspectæ progressionis definitæ initio huius libri ad secundum: vel vt primus terminus ad quadrantem secundi. Per solos terminos istius perspectæ progressionis definiemus singulorum casuum epilogismum, vt methodi ratio clarior euadat, & vt quàm proximè ad vera spatia, rectas, & puncta accedere quilibet possit, assumpto quod Archimedes in tertia propositione circuli dimensionis demonstrauit, secundum huius progressionis terminum esse triplum primi, & adhuc superare parte quapiam quæ quidem minor est septima primi, maior autem decem septuagesimis primis eiusdem termini primi. Quod si quis recentiorum numeros alios grandiores & propiùs accedentes ad veram istius progressionis rationem abhibere maluerit, ipsi integrum esto.

Primò quæritur segmentum a c d, itémque segmentum b c o. *Istud constat ex duodecima propositione primi libri.*

Segmentum a c d æquat duplum termini secundi progressionis perspectæ; segmentum b c o æquat duplum termini primi.

Secundò quæritur grauitatis centrum pro figura c z b g, itémque pro figura c b a f. *Istud obtinebitur ex corollario secundo secundæ propositionis.*

Vt est primus terminus ad dimidium secundi imminutum primo, ita fiat recta g c ad g q abscissam ex g b. Vt autem idem primus terminus ad octauam partem secundi, ita fiat recta g f ad g y abscissam ex rectâ g c. Completo parallologrammo y g q p, dico punctum p esse centrum grauitatis in figura c z b g.

Præterea vt est secundus terminus ad dimidium tertij imminutum duplo primi, ita fiat recta f i ad f r abscissam ex f a: punctum t ita secet rectam c f vt tota c f ad f t sit sicut octonarius ad ternarium. Completo parallelogrammo t f r s, dico punctum s esse centrum grauitatis in figura c b a f.

In figuris autem b c o, a c d centra grauitatis sunt y & t.

Tertiò quæritur solidum genitum circa basim b o circumuolutione figuræ b c o, itémque aliud circa basim a d circumuolutione figuræ a c d. *Istud obtinetur per decimam nonam primi libri.*

Solidum genitum circa rectam b o est æquale cylindraceo altitudinis f u, baseos æquantis duplum secundi termini; vel per leges reciprocationis altitudinis f n, baseos æquantis dimidium tertij termini. Solidum verò aliud est æquale cylindraceo altitudinis f u, baseos æquantis duode-

L

cim terminos secundos, vel reciprocè altitudinis f n, baseos æquantis triplum tertij termini perspectæ progressionis.

Quartò quæritur solidum genitum circumuolutione figuræ c z b g circa rectam c g manentem; & aliud præterea genitum circumductu figuræ c b a f circa rectam c f manentem. *Istud habetur ex quarta propositione.*

Solidum primò quæsitum est æquale cylindraceo altitudinis f u, baseos æquantis quadruplum secundi termini imminutum octuplo primi: vel reciprocè altitudinis f n, baseos æquantis tertium terminum, imminutum duplo secundi. Alterùm verò solidum est æquale cylindraceo altitudinis f u, baseos æquantis quadruplum tertij, termini imminutum sexdecuplo primi: vel reciprocè altitudinis f n, baseos æquantis quartum terminum imminutum quadruplo secundi.

Quintò quæritur centrum grauitatis solidi circa b g geniti motu figuræ c z b g, itémque alterius geniti motu figuræ c b a f circa manentem a f. *Istud obtinetur ex corollariis vndecimæ & decimæ tertiæ libri præsentis.*

Vt secundus progressionis terminus ad quadrantem tertij imminutum primo, ita fiat recta g e ad g q abscissam ex recta g b. Dico punctum q esse centrum grauitatis pro primo casu.

Vt autem sextuplum eiusdem secundi termini ad triplum tertij imminutum sexdecuplo primi, ita fiat recta f i ad f r abscissam ex recta f a. Dico punctum r esse centrum grauitatis pro casu secundo.

Sextò quæritur centrum grauitatis solidi circa c g geniti motu figuræ c z b g, itémque alterius geniti motu figuræ c b a f circa manentem c f. *Habetur ex vigesima prima & ex corollariis vndecimæ & decimæ tertiæ.*

Vt quadruplum secundi termini imminutum octuplo primi se habet ad quadrantem tertij imminutum primo, ita fiat recta f g ad g y abscissam ex g c. Dico punctum y esse centrum grauitatis pro primo casu.

Vt autem quadruplum tertij imminutum sexdecuplo primi se habet ad triplum eiusdem tertij imminutum sexdecuplo primi, ita fiat recta x f ad f t abscissam ex f c. Dico punctum t esse centrum grauitatis pro secundo casu.

Septimò solidum genitum circa rectam b g circumuolutione figuræ c z b g intelligatur diuidi bifariam per planum m g b, nec non solidum genitum circa rectam f a circumuolutione figuræ c b a f per planum n f a. Quæritur centrum grauitatis dimidij solidi in vtroque casu. *Obtinetur per decimam nonam propositionem.*

Vt octaua pars tertij termini ad quatuor nouenas primi, ita fiat recta

g f ad g y abſciſſam ex g c, & manente puncto q in ſolutione quinti reperto compleatur parallelogrammum y g q p. Dico punctum p eſſe centrum grauitatis pro primo caſu.

Vt autem tertij termini dodrans ad quinque trientes ſecundi ita fiat recta f x ad f t abſciſſam ex recta f g; manente autem puncto r reperto in ſolutione quinti compleatur parallelogrammum t f r s. Dico punctum s eſſe centrum grauitatis pro ſecundo caſu.

Octauò ſolidum genitum circa rectam c g circumductu figuræ c z b g intelligatur bifariam diuidi per planum m g c, item aliud ex circumductu figuræ c h a f concipiatur bifariam ſecari per planum n f c. Quæritur centrum grauitatis dimidij ſolidi pro vtroque caſu. *Habetur ex ſeptima & decima corollariis.*

Vt dimidium tertij termini imminutum ſecundo ad idem dimidium tertij imminutum quadruplo primi, ita fiat g e recta ad g q abſciſſam ex g b; manente autem puncto y quod in ſolutione ſexti repertum eſt, compleatur parallelogrammum y g q p. Dico p eſſe centrum grauitatis quæſitum in primo caſu.

Rurſus vt dimidium quarti terminni imminutum duplo ſecundi ad beſſem quarti termini imminutum quadruplo ſecundi, ita fiat f i recta ad f r abſciſſam ex f a; manente verò puncto t quod in ſolutione ſexti ſuprà inuenimus compleatur parallelogrammum t f r s. Dico punctum s eſſe centrum grauitatis pro ſecundo caſu. Ergo &c. quod erat propoſitum.

SCHOLIVM I.

Cùm vt ſuſpenſum ad æquiponderans, ita ſit x f ad f t, & i f ad f r, & e g ad g q, & f g ad g y; ipſa verò ſuſpenſa & æquiponderantia ſint interdum ſolida, loco ipſorum ſolidorum vſurpauimus in calculo baſes eorum ad eandem altitudinem reuocatorum; tunc enim vt ſolida, ita & baſes. Porrò vt dignoſcamus pingui quadam minerua inter computandum vtrum punctorum q, y, r, t epilogiſmus rectè incedat duæ iſtæ regulæ adhiberi poſſunt. Prima eſt; portiones a r, b q, c t, c y eſſe maiores dimidio ipſarum rectarum a f, b q, c f, c g. Altera eſt, in ſolidis eaſdem a r, b q, c t, c y eſſe maiores, quàm in planis. Si itaque in ſubducendis rationibus appareat aliquid peccari contra aliquam harum regularum, cohibendus eſt calculus, & retrotexendus quouſque origo erroris occurrat. Id autem nullo negotio apparére poteſt exercitatis cogitantibus ſecundum terminum continere ter primum & vnam fermè ſeptimam ipſius. Atque hæc omnia obſeruanda erunt in calculo quem ſub calcem libri ſequentis adſcripſimus. Supereſt vt ad ipſum quartum librum progrediamur, in quo inueniendo mirum quantum laborauit mens noſtra, nec vnquam niſi illi Deus optimus ſpeciali face præluxiſſet, rem inuentu difficillimam exploraſſet.

SCHOLIVM II.

Quoniam Autor Hiſtoriæ Cycloideos multa de me ſcripſit calumnioſa, non poſſum quin literas D. Vaſcoſcelij ad me datas hìc repræſentem, quarum ſola lectione falſitas Hiſtoriæ manifeſta fiat. Is igitur cùm Pariſios miſiſſem calculum duplicem ſolidi circa

axem geniti, de quo problema præsentis propositionis quartum agit, respondit XI. *Septemb.* 1658. *in hac verba.* Vtinam, mi Pater, inspicere posses quantum sit illud gaudium quo postremæ tuæ literæ me affecerunt, quando in iis legi te inuenisse dimensionem solidi circa axem tam cycloideos totius, quàm dati segmenti. Credas velim neminem esse qui mihi par sit in extollendis meritis hominum: sed, fateor, ad id non adducor vnquam nisi graui de causa. Rara, profectò & eximia virtus præcipuè in iis qui scientias profitentur, est ille sincerus omnisque inuidiæ vacuus animi candor quo nunc ego glorior, & quem tuâ causâ quoties occasio se dederit manifestum omnibus faciam. Hoc enim tibi seriò affirmo tanto me gaudio nunc exultare, dum palàm omnibus prædico à te solutum esse vnum ex difficillimis Geometriæ problematis, quanto mærore antea premebar dum veritatis non dissimulandæ studio coactus fatebar priora illa quorum solutionem edidisti non nisi tantillum quid præ magnis istis inuentis esse. Dubitari non potest, Pater mi, quin istud Problema sit verè magnum; quare optarem addiscere quænam te via eò deduxerit: nam, vt vno verbo rem dicam, D. Roberuallius vir certè eruditissimus, sex annos impendit in eo inueniendo, sed methodo quæ non exhibet nisi vnum casum, nempe cycloideos totius; tu verò habes solutionem pro omni etiam segmentorum casu generalem, quod ego semper extollam, summorumque inuentorum laude dignum comprobabo. *Postea verò decimo octauo eiusdem illius mensis cùm numeros calculi nostri examinasset, scripsit iterum his verbis.* Tibi satis explicare non possum, Pater mi, quàm impatienter hîc optemus viam scire quam tibi fecisti in inueniendis solidis circa Cycloideos axem genitis. Tuus porrò illorum calculus nuper ad nos missus ne erroneus esset, iniuriâ timebam; examine enim accurato comperi eum omni prorsus errore vacare.... Sed vt ad te redeam, mi Pater, nullam quietem capiam quousque à te obtinuerim vt me doceas qua methodo perueneris ad illa solida, vel quod (vt tibi aliàs significaui) in idem redit, ad solida ex rectis, quæ arcubus circuli sint æquales, generata; cupidè enim & curiosè admodum illam addiscere expeto.... *Cæterùm quod in vtraque hac epistola D. Pascalius assumit ex inuentâ solutione problematum in cycloide paruâ, citato cursu statim perueniri ad solutionem eorundem in magnâ, id nostrâ nobis experientiâ non constat, sed contrarium potiùs, vt ex toto libro sequenti patebit. Historiæ illius Autor Dettonuillaeus, quem dicunt esse Pascalij imprimis necessarium, postquam nostrum istum calculum vidit & examinauit, cauillatorem eum fore asseruit, qui methodum illam Roberuallianam esse generalem negauerit. D. Pascalij erit illum admonêre, hoc sine cauillo vllo à se ita ad amicos perscriptum fuisse. Fortasse dum D. Pascalius hæc ad me scribebat, methodus erat adhuc particularis, & de illa cuiusmodi erat testatus est; interlabente verò tempore de particulari facta est generalis, prout sæpè accidit, atque de hac ita prouectâ loquutus fuerit Dettonuillaeus. Porrò Geometras rectè venatoribus comparari in confesso est; sicuti enim sæpe venatoriæ artis minus periti fortunatiores sunt in inueniendâ & capienda præda, ita non rarò minùs nobiles Geometræ*

fælicior nobiliore est in indaganda solutione alicuius problematis. Certè nullus est qui tantum sibi in hoc inuentionis negotio arroget, vt auxiliantis Numinis immemor vocem illam in sacris libris consignatam verè & sincerè vsurpare recuset, voluntas Dei fuit, vt citò occurreret mihi quod volebam. *Hoc quippe est ipsum quod Rex ille sapiens vidisse se pronuntiat,* nec velocium esse cursum, nec fortium bellum.... Sed tempus casumque [*cui Deus supremus cunctorum moderator praeest*] in omnibus.





DE CYCLOIDE
LIBER QVARTVS.

In quo octo ab Anonymo proposita de magnâ Cycloide problemata soluuntur.

PROPOSITIO PRIMA.



SIT (*Fig.* 34.) quadratum a b d f, & ex a excitata sit a o perpendicularis ad a b d f æqualis lateri a f : in planis o a b, o a f descripti sint quadrantes circulares o n b a, o z f a. Intelligatur solidum cuius quælibet sectio n m e p parallela plano o a f sit quadrans ellipseos semiaxium n p, p e; sit autem n p ordinatim applicata ad circuli o n b a semidiametrum a b, & p e compleat parallelogrammum f a p e. Eiusmodi solidum intelligatur secari quocunque plano h g c ad planum o a b parallelo, & eius cum solido sectio sit h m c g comprehensa sub linea h m c, & sub rectis g h, g c, quarum g h est ordinatim applicata ad a f semidametrum circuli o z f, & g c compleat parallelogrammum g a b c.

Ostendendum est sectionem h m c g esse quadrantem ellipseos semiaxium h g, g c.

Compleatur parallelogrammum g h s c, & intelligatur cylindrus cuius basis sit o h f a, axis a b, eius verò sectio per axem a b sit parallelogrammum a o q b; In recta g c sumatur quoduis punctum l & per l ducta sit p e parallela rectæ a f; ex p excitata sit p n parallela rectæ a o occurrens peripheriæ o n b in n; rectæ o q in r; sit r u e p sectio cylindri, quadrans videlicet circularis æqualis quadranti o h f a: ergo cùm isti quadrantes secentur plano h g c, ordinatim applicatæ g h, l u effectæ occursu illius plani sunt inter se æquales. Recta l u occurrat curuæ h m c in m. Quoniam quadrantis circularis r u e p, & quadrantis elliptici n m

e p communis est semiaxis p e sectus in l, vt est alter semiaxis r p ad alterum p n, ita est ordinatim applicata l u ad ordinatim applicatam l m: igitur vt r p vel o a ad ordinatim applicatam p n in quadrante circulari o n b a, ita est u l vel g h ad l m. Quoniam ergo quadranti circulari o n b a ita respondet figura h m c g, vt si ex a b, g c auferantur æquales a p, g l & ad a b semiaxem quadrantis circularis excitetur ordinatim applicata p n, recta verò l m parallela rectæ g h occurrat limbo h m c in m, sicut est a o ad p n, ita sit g h ad l m, ex vigesima prima primi conicorum inferetur figuram h m c g esse quadrantem ellipseos semiaxium h g, g c, quod erat demonstrandum. Istud solidum dicatur *Vtrinque ellipticum*, eiusque *basis b a f d*; *quadrans circularis genitor, o n b a*.

COROLLARIVM.

Iste demonstrandi modus latissimè patet, estque imprimis vtilis ad plurima è tenebris eruenda. Eo verò iam ante vsi sumus in decima sexta superioris libri.

PROPOSITIO II.

VTtrinque elliptici basis sit (*Fig*. 35.) quadratum a b e c, cuius diameter a e; sit s c dupla rectæ a c; basisq; segmenti parabolici, cuius axis a t sit æqualis rectæ a b: sumptum sit in diametro a e quodcunque punctum g, & per g ductæ sint i m, f h complentes parallelogramma a i m c, a f h b; per puncta f, i ducantur ordinatim applicatæ f n, i l ad semidametros a c, a b quadratium circularium a d n c, a d l b: plani l i m sectio cum solido vtrinque elliptico sit l o m i quadrans ellipticus; sectio plani n f h cum eodem solido sit n o h alter quadrans ellipticus, vt ex superiore patet; lineæ l o m, n o h secent se in puncto o superficiei ellipticæ; iungatur recta o g quæ erit perpendicularis ad planum b a c, cùm sit communis sectio planorum n f h, l i m rectorum ad planum b a c, ac proinde erit in plano d a e. Sectio plani eiusdem d a e cum superficie elliptica sit d o e.

Ostendendum est figuram d o e a esse semisegmentum parabolicum, cuius axis a d, ordinatim applicata a e; & si recta g f producta occurrat limbo parabolæ s t c in u, rectam f u esse æqualem rectæ g o.

Centro a semidiametro a t descriptus sit quadrans circularis a t z c, cuius peripheriæ t z c recta f u occurrat in z: igitur rectæ f n, f z sunt æquales; & per tertiam tertij tetragonismicorum tres rectæ b a, f z, f u sunt proportionales. Rursus quoniam a i, a f latera quadrati a i g f sunt æqualia, erunt l i, f n æquales: ergo per demonstrata in progressu superioris vt d a recta ad l i, ita est f n ad g o, ac proinde cùm l i, f n sint æquales, tres rectæ a d vel b a, l i vel f z, & g o sunt proportionales: ergo

cùm tres etiam rectæ b a, f z, f u ostensæ sint proportionales, rectæ g o, f u sunt æquales; & figura d o e a est semisegmentum parabolicum, cum d a ad g o sit sicut a t ad f u, & rectæ a e, a c secentur proportionaliter in g & f: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Si recta b t poneretur basis segmenti parabolici cuius axis a s, perinde ostenderetur ad positionem plani d a c rectam o g fore æqualem rectæ i p parallelæ axi s a & in puncto p conuenienti cum parabolico limbo s p b.

COROLLARIVM II.

Recta a c ita diuidatur in x vt portio x c sit ad a x sicut quinarius ad ternarium, & per x agatur recta x y parallela rectæ a t: igitur ex corollario quarto primæ quarti libri tetragonismicorum figuræ a t u c centrum grauitatis est in recta x y: ergo si libra s c suspendatur ex a, perpendiculo a t, brachio s a æquiponderans eiusmodi figuræ erit tres octauæ partes ipsius figuræ: sed ipsa est bes quadrati a c; ergo æquiponderans illi figuræ est quadrans quadrati a c. Igitur per methodum corollarij quarti decimæ quartæ superioris libri cuneatum solidum genitum ad positionem plani d a b ex triangulo a e c & ex parabolica figurâ a t u c totâ, est æquale cylindraceo altitudinis d a, baseos æquantis quadrantem quadrati a c. In aliis verò casibus quando non sumetur tota figura a t u c, sed eius quælibet pars ad positionem rectæ a t, pari methodo inuenietur portio cuneati illi respondens.

PROPOSITIO III.

Ostendendum est iisdem manentibus, solidum vtrinque ellipticum esse ad cylindrum baseos a d l b altitudinis a c, vt est circulus ad quadratum suæ diametri.

Quoniam enim sectio quæcunque l o m i est ad rectangulum m i l sub semiaxibus l i, i m comprehensum vt est circulus ad quadratum suæ diametri, patet ex vndecima quarti tetragonismicorum, totum solidum cuius sectio est rectangulum l i m esse ad solidum cuius sectio est quadrans ellipticus l o m i, vt est quadratum diametri circularis ad ipsum circulum: sed solidum cuius sectio est rectangulum l i m parallelum rectæ a c perpendiculari ad planum d a b, & ex centro circuli d l b eductæ, est cylindrus habens axem a c, basim b l d a; ergo illud solidum de quo agit præsens propositio est ad cylindrum baseos a d b l altitudinis a c, vt est circulus ad quadratum suæ diametri.

PROPOSITIO IV.

Iisdem manentibus ostendendum est solidum illud cuius sectio est l o m i parallela plano d a c, diuidi bifariam per planum d a e: & quodcunque quadratum a i g f ducatur circa diametrum a e, portionem solidi insistentem quadrato a i g f diuidi bifariam à plano d a e.

Per i,

Per i, f ducantur i l, f n ordinatum applicatæ ad semidiametros a b, a c quadrantium circularium d a b l, d a c n. Quoniam a i, a f sunt æquales, sunt quoque l i, f n æquales; ergo quadrantes elliptici l i m o, n f h o sunt æquales & similes: ergo portio n f g o est æqualis portioni l i g o: ergo si portio insistens triangulo a c e intelligatur manente a circumferri donec recta ac rectæ a b congruat, & recta c e iaceat in directum rectæ b h, duo ista solida talia erunt vt ad positionem plani d a c sint condicta ratione æqualia: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO V.

IIsdem manentibus portio eiusdem solidi insistens parallelogrammo f h e c ad positionem plani d a c est ad cylindrum cuius basis sit quadrans ellipticus n o h f, altitudo f c, vt quadrantis circularis d n q c a portio n q c f ad parallalogrammum n f c.

Quoniam quodcunque planum l i m ducatur parallelum plano d a c, faciensque sectionem l o r m i quæ sit quadrans ellipseos semiaxium l i, i m, semiaxis i m secatur in g, sicuti semiaxis a c in f, vt quadrans circularis d a c q n ad sui portionem n q c f ita est quadrans ellipticus l i m r o ad portionem sui o r m i; ergo vt rectangulum n f c ad figuram n q c f in ipso contentam, ita rectangulum o g m ad figuram o r m g in ipso inclusam: igitur per vndecimam quarti tetragonismicorum, vt figura n f c q ad rectangulum n f c, ita ad positionem plani d a c est portio solidi vtrinque elliptici insistens parallelogrammo f h e c ad solidum cuius sectiones sunt parallelogramma n f c, o g m; sed solidum cuius sectiones sunt illa parallelogramma est, vt ex superioris pari casu patet, cylindrus aut quasi cylindrus (hoc enim nomen paulò latiùs sumere cogimur) baseos f n o h altitudinis f c: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quoniam ex superiore nota est portio insistens parallelogrammo a i m c, & ex præsenti nota est portio insistens parallelogrammo f g m c, patet notam esse portionem insistentem quadrato a i g f. Similiter quoniam ex superiore nota est magnitudo insistens parallelogrammo a c e b, & ex præsenti insistens parallelogrammo f h e c, nota erit insistens parallelogrammo a b h f: ergo dempta portione quæ quadrato a i g f incumbit, nota erit portio parallelogrammi b i g h, quamuis b h latus non foret in latere quadrati a e, sed ei æquidistaret.

COROLLARIVM II.

Ex demonstratis hactenus in præsenti libro patet portionem solidi vtrinque elliptici interceptam planis d a e, d a c vnà cum dimidio cuneati dicylindracei expositi in corollario secundo secundæ, complecti dimidium solidi quod ad cylindrum altitudinis a c, baseos d l b a, sit vt circulus ad quadratum ipsi circumscriptum, insuper verò complecti parallelepipedum altitudinis a c, baseos æquantis semiquadrantem quadrati

a c. Duplum igitur complectetur cylindraceum altitudinis d a cuius basis contineat quadrantem quadrati a c vel d a, & spatium quod ad quadrantem circularem a d l b sit vt circulus ad quadratum circumscriptum. Simili pacto procedendum erit in aliis casibus.

PROPOSITIO VI.

MAneat solidum vtrinque ellipticum (*Fig. 36.*) cuius basis sit quadratum a b e c, quadrans circularis genitor d l b a, alter quadrans ad positionem plani d a c sit d n c a: in plano a b e c super latere b a constructum sit aliud quadratum b a C B. Centro a descriptus sit quadrans circularis C y b a, cui ita respondeat figura C u b a, vt quæcunque i u parallela rectæ a C ducatur occurrens in y peripheriæ C y b; in u limbo C u b; in A rectæ C B, tres rectæ A i, i u, i y sint perpetua lege proportionales. Intelligatur a o b quadratrix respondens figuræ C u b a, ita vt sicut brachium a D æquans rectam a b se habet ad a i, sic se habeat i u ad i o dimetientem figuræ quadratricis. Motu figuræ C u b a circa rectam b a manentē descriptum sit periphericum solidum cuius quadrans insistens figuræ C u b a hîc tantummodo consideratur: intelligatur quoque cylindracea superficies descripta motu parallelæ ad rectam a d incedentis per limbum a o b: huius verò superficiei portio intercepta superficie periphericì & plano C a b vocetur *septum medium* quadratricis.

Ostendendum est ad positionem plani d a c periphericum & solidum vtrinque ellipticum esse condicta ratione æqualia. Item portionem periphericì insistentem inter curuas C u b, a o b portioni alterius solidi interceptæ inter plana d a e, d a c esse æqualem; & consequenter portionem periphericì residuam portioni alterius solidi residuæ. Denique si agatur q i u planum parallelum plano d a c, eiusque sectio cum peripherico sit quadrans circularis i u r q, & ex puncto o excitetur ordinatim applicata o r parallela semidiametro i q, iungaturque recta i r constituens sectorem r i u, solidum cuius sector est r i u esse condicta ratione æquale portioni alterius solidi interceptæ inter plana d a e, d a c, & simul dimidio dicylindracei cuneati geniti ex triangulo b a e, & ex parabola B z a b cuius vertex a, axis a b, ordinatim applicata b B.

Quoniam enim tres rectæ i m vel A i, i u & i y vel i l ordinatim applicata parallela semidiametro a d quadrantis circularis d l b a sunt per constructionem proportionales, rectangulum l i m erit æquale quadrato i u; ergo & quadrans ellipseos semiaxium l i, i m erit æquale quadranti circulari u r q i: ergo ad positionem plani d a c periphericum & solidum

vtrinque ellipticum sunt æqu... Quod ad æqualitatem portionum attinet, demonstratur eodem pacto quo ... superioris libri decima sexta eiusque corollariis vsi sumus pro simili causa: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex corollario secundo superioris liquet bis totum solidum cuius sectio est sector r i u esse æquale cylindraceo altitudinis a d vel a b, cuius basis contineat quadrantem quadrati a c vel d a, & spatium quod ad quadrantem circularem a d l b sit vt circulus ad quadratum circumscriptum.

PROPOSITIO VII.

MAneat (*Fig.* 37.) peripherici quadrans geniti motu figuræ C u b a circa axem b a, eiusque sectio sit quadrans circularis u r q i, maneátque, vt supra, sector u r i: sit parua semicycloides superior g z b a, eiusque ordinatim applicata i z parallela lateri b B quadrati a b B C. Sit figura b m c a ita se habens ad figuram b z g a ad positionem rectæ a C, vt sicut est A i vel a C recta ad i z, ita i y ordinatim applicata ad a b semidiametrum quadrantis circularis C y b a sit ad i m dimetientem figuræ b m c a.

Ostendendum est figuram b m c a vel totam vel ex parte sumptam esse ad positionem rectæ a c æqualem rectilineo noto, positá quadratura circuli: in casu verò quo tota sumitur, ipsam esse æqualem quadranti quadrati a b, & spatio quod ad quadrantem circuli semidiametro a b descripti sit vt circulus ad quadratum circumscriptum.

Istud demonstratur vt decima septima prioris libri. Nam si intelligatur cylindrus cuius axis a b, basis sit quadrans B f b circuli ad planum c a b recti centro b descripti, & iungatur diameter a B quadrati C B b a per quam ducatur planum rectum d a B secans quadrantis circularis A h c i peripheriam in h; rectæ h i & r i iacebunt in eadem recta vt ibidem ostendimus, & vt A i recta ad y i, ita erit sector A h i ad sectorem u r i, & ita bis solidum cuius sectio est sector A h i ad bis solidum sectoris u r i.

Rursus solido bis sectoris A h i æquale est ad positionem plani d a C cylindraceum altitudinis d a æquantis rectam a b, baseos g z b a, vt ex tertia primi constat. Quoniam igitur vt A i recta ad i z, ita est i y recta ad i m, ita quoque erit rectangulum altitudinis communis d a, baseos z i, ad rectangulum baseos i m; cùm autem ita etiam sit bis sector A h i hoc est rectangulum baseos z i, ad bis sectorem u r i, rectangulum baseos i m erit æquale bis sectori u r i: ergo cùm per superiorem notum sit cylindraceum altitudinis d a, ad positionem plani d a C æquale solido bis sectoris u r i, nota quoque erit basis b m c a. Ex corollario verò supe-

rioris tota b m c a erit æqualis quadranti quadrati a b, & simul spatio quod ad quadrantem circuli semidiametro a b descripti sit vt circulus ad quadratum circumscriptum, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Spatium quod ad circulum sit vt ipse circulus ad quadratum circumscriptum est quadratum quod potest a g, vel recta æqualis quartæ parti peripheriæ eiusdem circuli: nam ex corollario secundo decimæ nonæ primi libri, quadratum circumscriptum est ad circulum vt b a semidiameter circuli ad a F rectæ a g dimidium. Cùm igitur rectangulum contentum sub b a & sub a F dimidio rectæ a g sit quadrans circuli semidiametro a b descripti, & vt quadratum b a ad rectangulum b a F, ita sit b a F ad quadratum a F patet vt quadratum circumscriptum ad circulum, ita esse b a F siue quadrantem circuli ad quadratum a F, siue ad quadrantem quadrati a g: ergo vt quadratum circumscriptum circulo est ad ipsum circulum, ita est circulus ad quadratum a g. Igitur spatium quod ad quadrantem circuli sit vt quadratum circumscriptum circulo ad circulum, est quadrans quadrati a g: vel decima sexta pars quadrati quod potest dupla rectæ a g.

PROPOSITIO VIII.

SIt parua semicycloides tota c b a f (*Fig.* 38.) circulo genitore diametri c f, semidiametri g f procreata; sit semicirculus genitor c o f, & intelligatur ad positionem plani t f a recti ad planum c f a generari dicylindraceum ex tota semicycloide & ex c o f semicirculo: item ex quacunque c b h d & ex c o e d.

Ostendendum est in primo casu illud spatium esse æquale cylindraceo altitudinis g f, baseos æquantis quadrantem quadrati f a; in aliis verò casibus æquantis rectilineum notum, datâ circuli quadraturâ.

Intelligatur semicycloides parua f r s c subcontrariè posita: igitur duæ simul z y, y q æquant totam a f: igitur dicylindraceum genitum ex g o p c & ex figuris c z b g, c s q r g est æquale cylindraceo altitudinis f a vel c s, baseos c p o g: ergo cum dicylindraceo genito ex figuris c p o g, c s q r g æquale sit dicylindraceum genitum ex figuris b h a f g, g o e f, patet dicylindraceum genitum ex semicirculo c o f, & ex tota c b a f esse æquale cylindraceo baseos c p o g, altitudinis f a: hoc est altitudinis g f baseos æquantis quadrantem quadrati f a. Nam si fiant tres rectæ g f, f a, f u proportionales, cùm rectangulum g f a sit æquale circulo diametri c f, quadrans rectanguli g f a erit æqualis quadranti circuli c f. Igitur cùm cylindracea æqualia habeãt reciprocè bases & altitudines proportionales, vt altitudo f g ad altitudinem f a, ita reciprocè erit basis c g o p siue qua-

drans rectanguli g f a ad quadrantem rectanguli g f u, hoc est ad quadrantem quadrati f a; quod erat primò ostendendum.

Rursus inuenire oporteat dicylindraceum genitum ex figuris c z b h d, c p o e d; ponimus autem figuram c b h d esse maiorem parte superiore c z b g; nam si sit illi æqualis, vel sit ea minor problema solutum est in superiore. Ex recta g c abscindatur g y æqualis rectæ g d. Ex methodo demonstrationis pro primo casu vsurpatæ liquet ex figura z y d h, & ex y p e d idem gigni spatium quod ex figuris b z q r, y p o g, nempe cylindraceum altitudinis f a, baseos y p o g: sed ex superiore constat dicylindraceum genitum ex figuris c z y, c p y: ergo per additionem constat dicylindraceum genitum ex figuris c b h d, c p e d: quod erat secundum ex demonstrandis.

PROPOSITIO IX.

Isdem manentibus (*Fig.* 38.) sit semicycloides magna a m n c f ita vt figura a m n c z b sit ad positionem rectæ f a condicta ratione æqualis semicirculo genitori c o f.

Ostendendum est libræ planæ axe c f, sustentaculo o u, notum esse ad positionem rectæ a f æquiponderans cycloidi magnæ vel toti vel ex parte designatæ.

Ducatur quæcunque n y parallela rectæ f a occurrens limbo cycloidis magnæ in n, cycloidis paruæ in z, & axi c f in y. Quadratum lateris n y est æquale duobus quadratis n z vel y p, z y & simul bis rectangulo n z y. Si ergo intelligatur solidum cuius basis sit a m c f, sectiones verò eius parallelæ plano t f a sint quadrata laterum n y, Id &c. patet istud solidum esse æquale solidis quadratorum z y, y p, & bis rectanguli z y p. Atqui solidum quadrati z y demonstratur ex tertij quarta; solidum verò quadrati y p habetur ex secunda quinti tetragonismicorum; solidum verò bis rectanguli z y p obtinetur ex superiore: ergo notum est solidum cuius sectio parallela plano t f a est quadratum lateris n y. Ergo ex corollario quarto octauæ libri superioris dimidium baseos cylindracei habentis altitudinem c g & æquantis solidum iam dictum est æquiponderans quod erat inueniendum.

COROLLARIVM I.

Pro casu totius semicycloideos magnæ a m c f, solidum quadrati y p est cylindraceum altitudinis g c, baseos æquantis bis bessem quadrati g c; solidum bis rectanguli z y p est per superiorem æquale dimidio quadrati f a solidum verò quadrati z y cùm sit duplum æquiponderantis inuenti in corollario secundo secuudæ libri superioris, est cylindraceum ejusdem altitudinis, cuius basis sit quadratum a f imminutum quadrato c f: Totum igitur solidum pro illo casu est tres semisses quadrati f a, deducto besse quadrati c f: ergo æquiponderans pro isto casu est tres quadrantes quadrati f a, deducto triente quadrati f c.

COROLLARIVM II.

Pro casu superioris partis c n m g solidum quadrati y p est cylindraceum altitudinis g c baseos æquantis bessem quadrati g c: solidum bis rectanguli z y p est per septimam eiusque corollarium, cylindraceum eiusdem altitudinis baseos æquantis dimidium quadrati g c & simul octauam partem quadrati f a: solidum verò quadrati z y est duplum spatij inuenti in corollario secundo secundæ supra laudatæ nempe circulus c f dempto bis quadrato g c. Summa ex tribus collecta est circulus genitor auctus octaua parte quadrati f a, & imminutus quinque vigesimis quartis quadrati f c: ergo æquiponderans pro isto casu est semicirculus genitor, auctus decima sexta parte quadrati f a, & imminutus quinque quadragesimis octauis quadrati f c.

COROLLARIVM III.

Quoniam ex primi decima sexta habetur æquiponderans eidem figuræ axe z y, & ex præsenti habetur axe c f, ipsum verò suspensum est notum per duodecimam primi, patet ex methodo tertiæ tertij libri inueniri centrum grauitatis figuræ c n y.

PROPOSITIO X.

Iisdem manentibus ostendendum est (*Fig.* 38.) notum esse solidum periphericum circa manentem f c motu cycloideos magnæ a m c f descriptum, siue totum sumatur, siue quælibet eius pars ad positionem plani t f a.

Vt quadratum circumscriptum circulo est ad ipsum circulum ita recta f t (quæ æqualis est rectæ f g) fiat ad f x. Dico octuplum baseos æquiponderantis reperti in superiore propositione esse basim cylindracei altitudinis f x, quod sit æquale solido proposito, & quadruplum semisolido. Istud patet ex methodo decimæ nonæ primi libri: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Igitur basis cylindracei habentis altitudinem f x æquantis periphericum genitum circa rectam c g motu figuræ c n m g æquat quadruplum circuli genitoris auctum dimidio quadrati f a & imminutum quinque sextantibus quadrati f c. Basis verò cylindracei æquantis periphericum genitum circa rectam c f motu figuræ c b a f æquat sextuplum quadrati f a imminutum octo trientibus quadrati f c.

PROPOSITIO XI.

Sit vt in vndecima (*Fig.* 39.) superioris libri h o c g pars superior cunei expansi geniti circulo semidiametri g c, sitque f q t h g figura ex sinibus versis illi ita respondens vt tres dimetientes l e, e o, t e sint proportionales. Sit cycloidis magnæ pars superior g c z b eodem

circulo genitore descripta. Sit f u B parabola cuius axis f g, ordinatim applicata g B æqualis ipsi f g: sit c A B quadrans circuli genitoris: in recta g c sumptum sit quodcunque punctum y, & per y ordinatim applicata y z occurrens limbo cycloidis magnæ in z, paruæ in o. Sit figura f a C b g ita descripta vt quæcunque z C parallela axi g c ducatur occurrens basi g b in i, curuæ f a b in C, rectæ f l in d, tres rectæ d i, i z, i C sint proportionales: per C ducatur C x parallela rectæ b g occurrens lineis f q h, f g, f u B in t, x, u.

Ostendendum est rectas t C, x u esse æquales.

Recta z y producta occurrat arcui circulari c B in A. Quoniam ex prima propositione libri primi rectæ z o, y A sunt æquales, erunt quoque y A, C t æquales. Nam cùm rectæ l e, D i sint æquales, item e o, i z, tertia proportionalis post rectas l e, e o erit æqualis rectæ C i vel t e; sed illa in recta l o intercipitur inter curuam f q h & rectam h g: ergo punctum t iacet in recta l e. Cùm igitur duo quadrata g y, y A æquent simul quadratum f g vel g A, siue rectangulum c g f; quadratum autem g y vel e o æquet rectangulum L e t, vel c g x, relinquitur vt quadratum y A vel C t æquet rectangulum contentum sub rectis g c, f x, hoc est rectangulum E f x, contentum sub f x & sub f E latere quadrati f g B E, & latere quoque recto parabolæ. Cùm igitur quadratum ordinatim applicatæ x u æquet rectangulum E f x, patet quadratum x u esse æquale quadrato C t, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

IIsdem manentibus ex puncto g excitetur perpendicularis g m ad planum c g b æqualis rectæ g c.

Ostendendum est dicylindraceum genitum ad positionem plani m g b ex parabola f u B g, & ex figura f q t h g esse æquale cylindraceo altitudinis g m, baseos æquantis rectilineum notum, si nota sit quadratura circuli.

Intelligatur cylindraceum genitum ad positionem plani m g c ex ipsa figura f t h g in seipsam ducta, vt eius sectiones parallelæ plano m g c sint quadrata. Ex recta g f productâ abscindatur f H æqualis rectæ g c, & compleatur parallelogrammum f H M D. Recta f g bifariam secta sit in n, & completa sint parallelogramma h g n P, P n f Q: recta h g bifariam secta sit in S, & per S ducta sit S R complens parallelogramma S q n g, q R f n. Igitur ex tertij vndecima propositione figura P q t h est semicycloides parua subcontrariè posita semicycloidi item paruæ f q n genitæ circulo centri q, diametri R S. Quoniam verò figura f q h g est illa quam in decima tertia libri secundi appellauimus *ex finibus versis*, erit (vt in corollario primo decimæ tertiæ libri tertij ostendimus) integra

semicycloides parua genita diametro f g, centro n. Si igitur compleatur parallelogrammum H f Q L, & intelligatur superior semicycloides parua L V f Q, respondens genitori circulo semidiametri Q L, cuius limbus L V f occurrat rectæ T l in V, erunt per decimam septimam secundi libri tres rectæ T l, l V, l t proportionales, ac proinde media inter T l, l t erit l V, & posito ad positionem rectæ f g primo gradu parallelogrammo L Q f H, secundo L V f Q, tertius erit f t h Q. Igitur ex decimâ nonâ superioris libri adiuncto corollario quarto octauæ libri eiusdem habemus notum quartum gradum post tertium f t h Q.

Intelligatur parabola f u B g stare erecta super plano f g h & per eius ita stantis limbum f u B incedere linea parallela rectæ g h & describere superficiem cylindraceam; intelligatur alia superficies cylindracea describi motu parallelæ ad rectam m g incedentis per limbum f q t h Q. Igitur sectio l t N F cylindracei prioris, baseos f u B g erectæ, parallela ipsi basi & inclusa intra cylindraceum posterius, incedens per rectam l t quamlibet, erit ipsa f x u translata; ergo vt L T prima ad l t tertiam, ita erit x u vel t N secunda ad quartam: ergo rectangulum sub quarta & sub prima T l est æquale rectangulo l t N.: sed sectio l F N t est bes eiusmodi parallelogrammi vt ex quadratura parabolæ constat: ergo cùm solidum cuius sectio est parallelogrammum l t N fit per vndecimam secundi tetragonismicorum ad positionem plani m g c condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis T l vel g m, baseos æquantis quartum gradum notum, si nota sit quadratura circuli; patet solidum cuius sectio est L F N t esse æquale bessi huius cylindracei noti. Cùm igitur notum sit cylindraceum altitudinis g h, baseos f u B g erectæ, si ex hoc cylindraceo dematur bes cylindracei cuius basis est quartus gradus, residuum fiet cylindraceum altitudinis g m, baseos notæ, æquale portioni dicylindracei geniti ex parabola f u B g, & ex parua cycloide f q h g, quod erat demonstrandum.

COROLLARVM.

Huc aduocari debet corollarium simile illi quod propositioni vndecimæ superioris libri adscripsimus.

PROPOSITIO XIII.

Iisdem manentibus (*Fig. 39.*) circa basim g h intelligatur circumduci semicycloidis magnæ pars superior g b z c.

Ostendendum est illi æquiponderans esse notum datâ circuli quadraturâ, si libra B b suspendatur ex g perpendiculo plano m g c, brachio B g latere quadrati f g B E.

Quoniam tres rectæ d i, i z, C i sunt proportionales, patet ex methodo vndecimæ superioris libri cylindraceum altitudinis g m, baseos f a b g ad positionem plani m g c esse condicta ratione æquale dicylindraceo genito ex b g c z superiore parte magnæ semicycloideos ad positionem plani m g c

ni m g c in seipsam ductæ; & si vt quadratum diametri ad circulum, ita fiat g m recta ad g λ cylindraceum altitudinis g λ, baseos eiusdem, esse condicta ratione æquale conoidi descripto circa rectam g b manentem. Ex eiusdem methodo constat cylindraceum altitudinis g λ baseos æquantis æquiponderans figuræ f a b g axe f g, sustentaculo E B latere quadrati f g B E, esse æquale æquiponderanti spatio conoidis.

Superest vt ostendamus notum esse æquiponderans figuræ f a b g iisdem positis. Ducta sit quælibet x C parallela rectæ b g occurrens limbo f a b in C, & rectæ g f in x. Quadratum igitur x C componitur ex quadratis x t, t C, & bis rectangulo x t C, vt ex Elementis Euclidis liquet. Per methodum superioris libri in quartâ propositione, habemus rectangulum altitudinis g m baseos notæ, æquale quadrato x t; per parabolæ quadraturam eiusque centrum grauitatis habemus rectangulum altitudinis eiusdem, baseos quoque notæ, æquale solido cuius sectio est quadratum lateris t C vel x u: per superiorem habemus cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos pariter notæ æquale bis rectangulo x t C: ergo per vndecimam quarti tetragonismicorum notum est cylindraceum altitudinis g m, baseos æquantis rectilineum notum positâ circuli quadraturâ, æquale solido cuius sectio parallela plano m g b est quadratum lateris x C: ergo vt ex demonstratis in prima tertij libri patet, æquiponderans cylindraceo altitudinis g m, baseos f a b c, est ad positionem plani m g b condicta ratione æquale dimidio cylindracei inuenti; ergo cùm ambo cylindracea sint eiusdem altitudinis, patet figuræ f a b g vt iacet manenti æquiponderare ad positionem rectæ g b dimidium baseos cylindracei inuenti si libræ planæ axis ponatur g f, sustentaculum B E. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Applicentur huic propositioni corollaria primæ & septimæ superioris libri. Reliqui verò casus quando recta circa quam fit reuolutio æquidistat rectæ f a, facilè expediuntur ex methodo præsentis casûs, vt patebit ex calculo tradendo in sequentibus.

COROLLARIVM II.

Si b z c g poneretur contraria ratione esse semicycloides parua superior, & illi ad partes g insisteret figura b z c o h condicta ratione æqualis circuli quadranti g c A B ad positionem rectæ g b: Similiter si f a b g esset tota semicycloides habens axem f g, & illi ad partes g insisteret figura f a b h q condicta ratione æqualis parabolæ f u B g, patet ex cylindraceis æquantibus quadrata x C, C t nota demendum fore bis cylindraceũ æquale dicylindraceo genito ex cycloide f a b g & ex parabola f u B g vel f a b h q, vt haberetur æquiponderans conoidi genito ex reuolutione figuræ h o c g circa axem g h: figura autem h o c g est in isto casu parua semicycloides superior imminuta quadrante circulari, sicuti in casu superioris est aucta eodem quadrante.

PROPOSITIO XIV.

SIt (*Fig.* 40.) tota ſemicycloides magna a z b c f, eiuſque axis f c; circa rectam f a circumuolutione partis inferioris D a z b (nam parallelogrammum f D b g pertinet ad figuram D b c f circa f D reuolutam.) intelligatur gigni ſolidum periphericum.

Oſtendendum eſt illi æquipouderans eſſe notum ſi libra B b ſuſpendatur ex g perpendiculo plano m g c, brachio g B latere quadrati f g B E.

Deſcripta ſit ſemicycloides parua a o h c f habens eundem axem h c, & eandem ſemibaſim f a: completo parallelogramma f g T a, & h T a Q, erit a o h T parua ſemicycloides ſuperior ſubcontrariè poſita paruæ ſuperiori h i c g, vt ex ſecundi libri octauæ propoſitionis corollario liquet. Igitur ex tertiæ propoſitionis corollario huius libri axe f g, ſuſtentaculo E B (ita vt B g, g c ſint æquales) perpendiculo plano m g c; notum eſt æquiponderans ſolido genito ex circumuolutione figuræ a z b t circa rectam T b.

Intelligatur quadratum lateris d i parallelum plano m g c in quo recta m g ponatur perpendicularis ad planum h g c, & æqualis rectæ g c; eiuſmodi verò quadratum concipiatur diuiſum in duo quadrata z i, z d & in bis rectangulum d z i. Per ipſa quadrata & per rectangula volumus intelligi in præſenti ſolida quorum ipſa quadrata & rectangula ſunt ſectiones. Per corollarium ſuperioris axe f g & cæteris manentibus, notum eſt æquiponderans quadrato z i; rectangulo autem d i z æquiponderans notum eſt, videlicet cylindraceum altitudinis d i baſeos æquantis rectilineum notum quod figuræ planæ a z b T æquiponderat per tertiam tertij libri; ergo diuiſa altitudine d i in duas d z, z i notum eſt æquiponderans duobus rectangulis eadem baſi z i præditis, altitudinum d z, z i, hoc eſt rectangulo d z i, & quadrato z i; ergo dempto æquiponderante noto quadrati z i, relinquitur notum æquiponderans rectanguli d z i. Cùm ergo notum ſit æquiponderans totius quadrati d i cylindraceum nempe altitudinis d i, baſeos æquantis æquiponderans figuræ planæ parallelogrammæ a D b T, cúmque notum ſit æquiponderans partium, videlicet quadrati z i & bis rectanguli d z i, ſi iſta demantur ex illo, relinquetur æquiponderans quadrati d z, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Si circa alios axes parallelos rectæ f a fiat circumuolutio, demonſtratio methodo non admodum diuerſa ſuccedet, idque ſatis conſtabit ex ſequentibus calculis. Quæ verò de aliis caſibus in vndecimâ ſuperioris ſcripſimus, hîc cum proportione intelligi debent.

PROPOSITIO XV.

Reuocato schemate propositionis duodecimæ (*Fig. 39.*) dicylindraceum genitum ad positionem plani m g b ex parabola integra f u B g & ex figurâ integrâ f q t h g est æquale cylindraceo altitudinis g m, baseos æquantis trientem circuli genitoris f c imminutum quatuor nouenis partibus quadrati g c.

In casu proposito si libra f c suspendatur ex f perpendiculo plano X f D recto ad planum H f Q, ita vt rectæ X f, m g æquidistent & sint æquales vni tertiæ g c, sustentaculo verò g h, solido cuius sectio parallela plano g m c sit quadrans circularis insistens super l V dimetiente figuræ f V L Q, æquiponderans per decimam nonam superioris libri est cylindraceum altitudinis f X vel g c, cuius basis sit duæ nouenæ quadrati g c vel L Q: sumi enim debet dimidium æquiponderantis ibi appositi vt patet, cùm sectio parallela plano m g c in casu illius decimæ nonæ sit bis quadrans circularis insistens super l V. Igitur per sextam eiusdem libri solido cuius sectio sit quadratum lateris l V æquiponderant tres semisses æquiponderantis iam inuenti; ac proinde solido sectionis illius quadratæ æquiponderat cylindraceum altitudinis g c vel X f, baseos continentis trientem quadrati g c. Igitur ex corollario quarto octauæ superioris libri duplum huius baseos nempe bes quadrati g c, est quartus graduum, quorum primus est parallelogrammum dimetientis f g, secundus est figura f V L Q, tertius est figura f q h Q: ac proinde cylindraceum altitudinis g m vel g c baseos æquantis bessem quadrati g c est æquale condicta ratione ad positionem plani m g c solido cuius sectio est parallelogrammum l t N.

Quoniam verò per methodum secundæ propositionis bes huius cylindracei est æquale dicylindraceo genito ex parabola f u B g & ex figura f q h Q ad positionem plani m g h, patet istud dicylindraceum esse æquale cylindraceo altitudinis g c vel g m, baseos æquantis quatuor nouenas quadrati g c.

Rursus quoniam cylindraceum altitudinis g h baseos æquantis quadratum f g, est per leges reciprocationis æquale cylindraceo altitudinis f g baseos æquantis semicirculum f c, nam recta g h ad f g est per demonstrata in corollario secundo decimæ nonæ primi libri vt semicirculus f c ad quadratum f g: sed f u B g basis est bes quadrati f g: ergo cylindraceum altitudinis g h baseos f u B g est cylindraceũ altitudinis g m baseos æquantis bessem semicirculi f c, vel trientem circuli f c. Cùm igitur ex præscripto eiusdem secundæ isti cylindraceo demi debeat illud paulo antè inuentum eiusdem altitudinis, baseos æquantis quatuor nouenas quadrati g c, vt relinquatur dicylindraceum quæsitum, patet illud esse æquale cylindraceo altitudinis g m, baseos æquantis trientem circuli genito-

PROPOSITIO XIV.

SIt (*Fig.* 40.) tota semicycloides magna a z b c f, eiusque axis f c; circa rectam f a circumuolutione partis inferioris D a z b (nam parallelogrammum f D b g pertinet ad figuram D b c f circa f D reuolutam) intelligatur gigni solidum periphericum.

Ostendendum est illi æquiponderans esse notum si libra B b suspendatur ex g perpendiculo plano m g c, brachio g B latere quadrati f g B E.

Descripta sit semicycloides parua a o h c f habens eundem axem h c, & eandem semibasim f a: completo parallelogramma f g T a, & h T a Q, erit a o h T parua semicycloides superior subcontrariè posita paruæ superiori h i c g, vt ex secundi libri octauæ propositionis corollario liquet. Igitur ex tertiæ propositionis corollario huius libri axe f g, sustentaculo E B (ita vt B g, g c sint æquales) perpendiculo plano m g c; notum est æquiponderans solido genito ex circumuolutione figuræ a z b t circa rectam T b.

Intelligatur quadratum lateris d i parallelum plano m g c in quo recta m g ponatur perpendicularis ad planum h g c, & æqualis rectæ g c; eiusmodi verò quadratum concipiatur diuisum in duo quadrata z i, z d & in bis rectangulum d z i. Per ipsa quadrata & per rectangula volumus intelligi in præsenti solida quorum ipsa quadrata & rectangula sunt sectiones. Per corollarium superioris axe f g & cæteris manentibus, notum est æquiponderans quadrato z i; rectangulo autem d i z æquiponderans notum est, videlicet cylindraceum altitudinis d i baseos æquantis rectilineum notum quod figuræ planæ a z b T æquiponderat per tertiam tertij libri; ergo diuisa altitudine d i in duas d z, z i notum est æquiponderans duobus rectangulis eadem basi z i præditis, altitudinum d z, z i, hoc est rectangulo d z i, & quadrato z i; ergo dempto æquiponderante noto quadrati z i, relinquitur notum æquiponderans rectanguli d z i. Cùm ergo notum sit æquiponderans totius quadrati d i cylindraceum nempe altitudinis d i, baseos æquantis æquiponderans figuræ planæ parallelogrammæ a D b T, cúmque notum sit æquiponderans partium, videlicet quadrati z i & bis rectanguli d z i, si ista demantur ex illo, relinquetur æquiponderans quadrati d z, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Si circa alios axes parallelos rectæ f a fiat circumuolutio, demonstratio methodo non admodum diuersa succedet, idque satis constabit ex sequentibus calculis. Quæ verò de aliis casibus in vndecimâ superioris scripsimus, hic cum proportione intelligi debent.

PROPOSITIO XV.

REuocato ſchemate propoſitionis duodecimæ (*Fig. 39.*) dicylindraceum genitum ad poſitionem plani m g b ex parabola integra f u B g & ex figurâ integrâ f q t h g eſt æquale cylindraceo altitudinis g m, baſeos æquantis trientem circuli genitoris f c imminutum quatuor nouenis partibus quadrati g c.

In caſu propoſito ſi libra f c ſuſpendatur ex f perpendiculo plano X f D recto ad planum H f Q, ita vt rectæ X f, m g æquidiſtent & ſint æquales vni tertiæ g c, ſuſtentaculo verò g h, ſolido cuius ſectio parallela plano g m c ſit quadrans circularis inſiſtens ſuper l V dimetiente figuræ f V L Q, æquiponderans per decimam nonam ſuperioris libri eſt cylindraceum altitudinis f X vel g c, cuius baſis ſit duæ nouenæ quadrati g c vel L Q: ſumi enim debet dimidium æquiponderantis ibi appoſiti vt patet, cùm ſectio parallela plano m g c in caſu illius decimæ nonæ ſit bis quadrans circularis inſiſtens ſuper l V. Igitur per ſextam eiuſdem libri ſolido cuius ſectio ſit quadratum lateris l V æquiponderant tres ſemiſſes æquiponderantis iam inuenti; ac proinde ſolido ſectionis illius quadratæ æquiponderat cylindraceum altitudinis g c vel X f, baſeos continentis trientem quadrati g c. Igitur ex corollario quarto octauæ ſuperioris libri duplum huius baſeos nempe bes quadrati g c, eſt quartus graduum, quorum primus eſt parallelogrammum dimetientis f g, ſecundus eſt figura f V L Q, tertius eſt figura f q h Q: ac proinde cylindraceum altitudinis g m vel g c baſeos æquantis beſſem quadrati g c eſt æquale condicta ratione ad poſitionem plani m g c ſolido cuius ſectio eſt parallelogrammum l t N.

Quoniam verò per methodum ſecundæ propoſitionis bes huius cylindracei eſt æquale dicylindraceo genito ex parabola f u B g & ex figura f q h Q ad poſitionem plani m g h, patet iſtud dicylindraceum eſſe æquale cylindraceo altitudinis g c vel g m, baſeos æquantis quatuor nouenas quadrati g c.

Rurſus quoniam cylindraceum altitudinis g h baſeos ęquantis quadratum f g, eſt per leges reciprocationis æquale cylindraceo altitudinis f g baſeos æquantis ſemicirculum f c, nam recta g h ad f g eſt per demonſtrata in corollario ſecundo decimæ nonæ primi libri vt ſemicirculus f c ad quadratum f g: ſed f u B g baſis eſt bes quadrati f g: ergo cylindraceum altitudinis g h baſeos f u B g eſt cylindraceũ altitudinis g m baſeos æquantis beſſem ſemicirculi f c, vel trientem circuli f c. Cùm igitur ex præſcripto eiuſdem ſecundæ iſti cylindraceo demi debeat illud paulo antè inuentum eiuſdem altitudinis, baſeos æquantis quatuor nouenas quadrati g c, vt relinquatur dicylindraceum quæſitum, patet illud eſſe æquale cylindraceo altitudinis g m, baſeos æquantis trientem circuli genito-

N 2

ris f c imminutum quatuor nouenis quadrati c g, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Reuocato schemate propositionis decimæ tertiæ (*Fig. 39.*) intelligatur semicycloideos magnæ pars superior g b z c tota volui circa rectam b g; ostendendum est librâ B b suspensâ ex g perpendiculo plano m g c, brachio g B, æquiponderans istius solidi quadranti esse æquale cylindraceo altitudinis g λ, baseos æquantis quadrantem quadrati g h auctum triente circuli f c & imminutum quatuor nouenis quadrati g c.

Ex corollario secundo secundæ tertij libri habemus æquiponderans figuræ f q h g librâ grammicâ B h suspensâ ex g perpendiculo g f, brachio g G æquante rectam g n vel dimidium rectæ g B, esse æquale dimidio quadrati g h, deducto duplo quadrati n g: ergo æquiponderans eidem, brachio g B duplo prioris, est dimidium æquiponderantis illius; sed duplum æquiponderantis illius si fiat basis cylindracei altitudinis g B vel g m æquale est dicylindraceo genito ex parua semicycloide f t h g in se ducta ad positionem plani m g h: ergo solidum cuius sectio parallela plano m g h est quadratum lateris x t æquat cylindraceum altitudinis g m, baseos continentis dimidium quadrati g h, imminutum duplo quadrati n g, vel dimidio quadrati f g.

Præterea quoniam parabolæ f u B g cuius axis f g, centrum grauitatis distat ab axe f g interuallo trium octauarum rectæ g B ex corollario quarto primæ quarti tetragonismicorum, æquiponderans illi figuræ brachio æquante rectam g B, perpendiculo g f, erit tres octauæ suspensi; cùm igitur suspensum sit bes quadrati B g, æquiponderans erit quadrans quadrati g B; ergo duplum huius nempe dimidium quadrati g B est basis cylindracei altitudinis g B vel g m, quod æquat cylindraceum ex parabola f u B in seipsam ducta ad positionem plani m g B.

Rursus per superiorem bis solidum cuius sectio parallela plano m g h est rectangulum x t C vel t x u est æquale cylindraceo altitudinis g m, baseos æquantis bessem circuli f c imminutum octo nouenis quadrati c g. Igitur ex methodo eiusdem decimæ tertiæ cylindraceum altitudinis g λ baseos æquantis dimidium trium illorum spatiorum iam computatorum in bases trium cylindraceorum, est æquiponderans toti conoidi circa rectam g b geniti circumuolutione figuræ c z b g. Istud autem dimidium est quadrans quadrati g h auctus triente circuli f c, & imminutus quatuor nouenis quadrati g c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Duobus igitur quadrantibus istius solidi, siue dimidio illius æquiponderat duplum spatij iam inuenti nempe cylindraceum altitudinis g λ, baseos æquantis dimidium quadrati g h, auctum besse circuli f c, & immi-

nutum octo nouenis partibus quadrati g c. Quatuor verò quadrantibus siue toti solido, baseos æquantis quadratum g h auctum quatuor trientibus circuli f c, & imminutum sexdecim nouenis quadrati g c.

COROLLARIVM II.

Si g b z c ponatur pars superior semicycloideos paruæ, & b z c o h circuli quadrans insistens illi ad partes g; similiter si f a b g ponatur tota semicycloides parua habens axem f g, & f a b h q parabola insistens ad partes g; solidum cuius sectio parallela plano m g h est quadratum lateris x t, erit duo simul solida quadratorum x C, C t, dempto bis solido rectanguli x C t: cylindraceum verò illis æquale altitudinis g m habebit pro basi dimidium quadrati cuius latus æquat peripheriam B A c auctum octo nouenis quadrati f g vel g c, imminutum besse circuli f c genitoris. Ergo dimidium huius baseos nempe quadrans quadrati g h, auctus quatuor nouenis quadrati f g & imminutus triente circuli f c genitoris est pro hoc casu basis cylindracei æquantis æquiponderans quæsitum & habentis altitudinem g λ.

PROPOSITIO XVII.

IIsdem manentibus vt in decima tertia (*Fig. 39.*) circa rectam f D intelligatur circumuolui figura D b z c f; ostendendum est solidi *illius* quadranti iisdem vt supra manentibus, æquiponderare solidum altitudinis g λ, baseos complectentis quinque quadrantes quadrati g h, auctos vndecim sextantibus circuli genitoris f c, & imminutos septem nouenis quadrati g c.

Quoniam æquiponderans basi quæ fit tertius gradus modo suprà explicato, quorum primus fit parallelogrammum H f D M, secundus figura D b z c f ad positionẽ rectæ f c, est basis cylindracei altitudinis g λ quod æquale fit æquiponderanti quæsito vt ex superioris praxi patet, superest vt in præsenti inueniamus illud æquiponderans tertij gradûs. Porrò vt ex methodo qua vsi sumus in corollario primo decimæ & in corollariis decimæ septimæ tertij libri constat, tertius gradus componitur ex parallelogrammo H f D M & ex bis figura g c z b, nec non ex tertio gradu f a b g inuento in superiore propositione: inueniendum igitur restat æquiponderans tribus illis figuris planis libræ grammicæ B h brachio B g, perpendiculo g f: id autem ita præstamus.

Ex superioris progressu æquiponderans figuræ f a b g est quadrans quadrati g h auctus triente circuli f c, & imminutus quatuor nouenis quadrati g c.

Rursus solidum cuius sectio sit quadratum lateris y z parallelum plano m g b est æquale solidis quorum sectiones sint quadrata laterum y o, o z vel y A, & bis rectangulum y o z vel y A vt in superioris pari casu diximus: Atqui solidum quadrati y o æquale est vt patet ex corollario secundo secundæ tertij, cylindraceo altitudinis g m, cuius basis sit circulus

genitor dempto bis quadrato g c: solidum bis rectanguli oz y est per septimam & corollarium eius æquale cylindraceo paris altitudinis cuius basis sit bis quadrans quadrati g c auctus bis quadrante quadrati g h: solido quadrati o z æquale est cylindraceũ altitudinis eiusdem, cuius basis sit bes quadrati g c. Igitur summa basium est circulus genitor f c auctus dimidio quadrati g h, deductis quinque sextantibus quadrati c g. Tale verò est bis æquiponderans figuræ g b z c quæsitum.

Æquiponderans parallelogrammo H f D M conflatur ex æquiponderante parallelogrammis H f Q L vel f g h Q, & Q D M L, vel h b D Q. Parallelogrammo H f Q L æquiponderans est dimidium quadrati g h, vt ex corollario primo decimæ libri tertij constat. Parallelogrammo siue quadrato Q D M L librâ f D suspensâ ex Q, perpendiculo Q L brachio æquante rectam f E & ad partes f conuerso, est vt patet dimidium ipsius quadrati æquantis quadratum g c; ergo si suspensio ex Q mutetur in suspensionem ex f, eidem parallegrammo respondebit æquiponderans prius auctum spatio quod ad ipsum suspensum vel quadratum g c sit vt recta f Q ad f E vel vt semicirculus ad quadratum g c: igitur quadrato Q D M L vt iacet manenti, brachio f E, perpendiculo f H æquiponderat dimidium quadrati g c auctum dimidio circuli genitoris f c. Igitur toti parallelogrammo H f D M æquiponderat dimidium quadrati g h, auctum dimidio circuli genitoris, & dimidio quadrati g c. Igitur summa conflata ex istis tribus æquiponderantibus est quinque quadrantes quadrati g h aucti vndenis sextantibus circuli genitoris f c, & imminuti septem nouenis quadrati g c, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Si g b z c ponatur semicycloides parua, & b z c o h circuli quadrans translatus, sicuti in calculo secundo æquiponderantis processimus, ita procedemus in hoc casu: nam solidum cuius sectio parallela plano m g h sit quadratum lateris y o erit solidum quadrati y z auctum solido quadrati o z & imminutum bis solido rectanguli A y z: erit igitur æquale cylindraceo altitudinis g m baseos æquantis circulum genitorem imminutum dimidio quadrati g h, & insuper imminutum vndecim sextantibus quadrati c g. Dimidium verò huius baseos est æquiponderans figuræ g c o h, librâ B h suspensa ex g, perpendiculo g c, brachio g B.

PROPOSITIO XVIII.

Reuocato schemate propositionis decimæ quartæ (*Fig. 40.*) ex recta g T producta abscindatur T e æqualis rectæ g c vel g B, & compleatur parallelogrammum a T e m. Intelligatur circa rectam a D volui figura a z b D & gigni solidum periphericum. Ad planum T b D excitetur perpendicularis A T æqualis rectæ T e, sitque T u ad T A vt circulus ad suæ diametri quadratum.

Ostendendum est quadranti huius solidi totius librâ e b suspensâ

ex T perpendiculo plano A T a, brachio T e, æquiponderans esse æquale cylindraceo altitudinis T u, baseos æquantis quinque quadrantes quadrati g h auctos viginti quinque nouenis quadrati g c, & imminutos vndecim sextantibus circuli genitoris

Parallelogrammo a T h Q, libra h T suspensa ex h perpendiculo h Q, brachio h C æquante rectam b h vel g c, æquiponderat ex supra demonstratis dimidium quadrati h T vel h g. Quadrato h b D Q æquiponderat dimidium ipsius quadrati: ergo rectangulo a D b T æquiponderat dimidium quadrati g h imminutum dimidio quadrati g c. Igitur si brachium h C mutetur in T e æquiponderans parallelogrammo a D b T est deducto priore æquiponderante spatium quod ad ipsum a D b T sit vt recta g h ad g f, hoc est vt semicirculus ad semidiametri quadratũ, vel vt quadratum g h ad rectangulum h g c: sed a D b T æquat semicirculum imminutum quadrato D Q h b: est ergo quadratum g h imminutum semicirculo, & priore æquiponderante: est igitur dimidium quadrati g h auctum dimidio quadrati g c & imminutum semicirculo f c. Ergo solido cylindracco altitudinis T A, baseos a D b T æquiponderat cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis dimidium quadrati g h auctum dimidio quadrati g c, & imminutum semicirculo f c.

Solido cylindraceo altitudinis T A vel d i, baseos a z b T æquiponderat cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis spatium quod figuræ a z b T, quæ est basis cylindracei suspensi, æquiponderat; atqui figuræ a z b T iisdem manentibus æquiponderat per corollarium superioris dimidium circuli f c genitoris, imminutum quadrante quadrati g h & insuper imminutum vndecim vnciis quadrati c g: ergo hæc est basis cylindracei æquiponderantis altitudine T A præditi.

Solido cuius sectio parallela plano A T a sit quadratum rectæ z i pertinentis ad figuram a z b T, æquiponderat per corollarium secundum decimæ sextæ quadrans quadrati quod potest recta g h, auctus quatuor nouenis quadrati g c, & imminutus triente circuli f c.

Ex methodo decimæ quartæ patet æquiponderans solido trium istorum computatorum primo esse æquale æquiponderantibus tribus quorum primum est solidum quadrati z i, secundum est solidum quadrati d z, tertium est solidum bis rectanguli d z i. Præterea patet æquiponderans solido ex iam computatis secundo esse æquale æquiponderantibus solidi quadrati z i & simul solidi rectanguli d z i: sed æquiponderans solido quadrati z i est tertium ex computatis; ergo si ex æquiponderante secundò computato auferatur æquiponderans tertiò computatum, restabit æquiponderans solido rectanguli d z i, videlicet quinque sextantes circuli genitoris f c deducto dimidio quadrati g h & quadraginta nouem trigesimis sextis quadrati c g. Duplum huius baseos est quinque trientes circuli genitoris deducto quadrato g h & quadraginta

nouem decimis octauis quadrati c g. Huic duplo addatur basis æquiponderantis solido quadrati z i supra reperta, conficientur quatuor trientes circuli genitoris deducto dodrante quadrati g h & quadraginta & vna decimis octauis partibus quadrati c g. Atque hæc est basis cylindracei altitudinis T u quod deduci debet de primo ex solidis computatis, vt restet spatium æquiponderans quadranti solidi ex circumductu figuræ a z b D circa rectam D a geniti, nempe cylindraceum altitudinis T u, baseos æquantis quinque quadrantes quadrati g h auctos viginti quinque nouenis quadrati g c, & imminutos vndecim sextantibus circuli genitoris, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

Iisdem manentibus, quadranti eiusdem solidi geniti ex circumductu figuræ a z b D circa rectam D a (*Fig.* 40.) si libra B h suspendatur ex puncto g, perpendiculo plano m g f, brachio g B æquiponderat solidum altitudinis g λ vel T u, baseos æquantis quindecim decimas sextas partes quadrati f a; deductis vndecim sextantibus circuli genitoris, & quadrati f c viginti quinque nouenis partibus.

Ex methodo vsurpata non semel iuxta libræ principia demonstrata in nona & decima secundi tetragonismicorum liquet si vt T e vel g c recta ad a f æqualem semiperipheriæ circuli diametro f c geniti, ita quadrans suspensus peripherici geniti reuolutione figuræ a z b D circa rectam a D, fiat ad quartum spatium quod vocetur G, spatium istud G imminutum solido æquiponderante reperto in propositione proximè superiore esse æquale spatio quod eidem quadranti ęquiponderat librâ B h suspensâ ex g sicut præscripsimus.

Restat vt istud periphericum faciamus notum. Id verò ex decima nona primi ita præstamus. Sit f t c g quadrans circuli genitoris: igitur figuræ b r c t s librâ f c suspensâ ex f perpendiculo f a, brachio f x æquante rectam f g æquiponderat per demonstrata in progressu decimæ octauæ primi, octaua pars circuli genitoris aucta quadroto g c. Quadranti circulari iisdem positis æquiponderat triens quadrati g c auctus ipso quadrante circulari. Rectangulo f g b D æquiponderat dimidium ipsius, hoc est dimidium rectanguli f g h æquantis semicirculum f c; & rectanguli D b h Q siue quadrati g c; ergo rectangulo f g b D æquiponderat quadrans circuli f c auctus dimidio quadrati g c. Igitur toti D b r c f æquiponderat spatium æquans quinque octauas partes circuli f c & vndecim sextantes quadrati g c.

Cùm igitur toti a b r c f per decimam octauam primi colligantur æquiponderare quinque quadrantes circuli f c, si isti æquiponderanti dematur æquiponderans figuræ D b r c f, relinquetur æquiponderans figuræ a z b D, nempe quinque semiquadrantes circuli f c, deductis vndecim sextantibus quadrati g c. Duplum istius est quinque quadrantes circuli f c,

culi f c, deductis vndecim trientibus quadrati c g. Cylindraceum igitur cuius altitudo sit g λ, basis quinque quadrantes circuli f c, deductis vndecim trientibus quadrati c g, est æquale quadranti peripherici propositi.

Si vt f g ad a f ita fiant quinque quadrantes circuli f c deductis vndecim trientibus quadrati c g, ad aliud H; constat ex corollario primo decimæ istud H esse quinque quadrantes quadrati f a deductis vndecim trientibus circuli f c. Sunt ergo spatia G & H vnum & idem: ergo æquiponderans quadranti peripherici circa rectam D a manentem geniti motu figurę a z b D est cylindraceum altitudinis g λ vel T u baseos ęquantis quindecim decimas sextas partes quadrati f a deductis vndecim sextantibus circuli f c, & quadrati g c viginti quinque nouenis, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Si æquiponderans quadranti solidi circa axem f D geniti motu figuræ D b r c f inuenti in decimâ septimâ addatur æquiponderanti in præsenti propositione computato, fiet æquiponderans quæsitum quadranti peripherici circa f a motu totius semicycloideos magnæ, cylindraceum videlicet altitudinis g λ, baseos continentis quinque quadrantes quadrati f a, deductis triginta duabus nouenis quadrati g c. Duplum verò illius æquiponderabit dimidio solidi eiusmodi peripherici plano per f a recto ad planum a f c diuisi; & quadruplum toti solido.

COROLLARIVM II.

Quoniam totum solidum suspensum, est per decimam nonam primi libri æquale cylindraceo altitudinis g λ baseos æquantis denos circulos genitores, æquiponderans verò corollarij proximè superioris est cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos continentis quinque quadrata f a deductis centum viginti octo nouenis quadrati g c, patet solidum suspensum ad solidum æquiponderans ipsi, esse vt bases: igitur vt deni circuli genitores ad quinque quadrata f a imminuta centum viginti octo nouenis quadrati g c, ita est brachium g B ad interuallum quo distat à plano m g c planum per centrum suspensi parallelum eidem plano m g c.

COROLLARIVM III.

Ex vigesima superioris libri apertè constat notum esse æquiponderans solido peripherico circa axem f c genito libræ planæ perpendiculo m g h, vel ei parallelo alio quolibet: cùm non discrepet ab isto reperto in propositione præsenti & in decima sexta superiore.

COROLLARIVM IV.

Porrò ex methodo quam adhibuimus in tractando calculo duorum casuum propositorum, patet etiam via similis quam teneri oportet in aliis.

PROPOSITIO XX.

SIt cycloides magna a c d (*Fig*. 41.) cuius basis a d, circulus genitor a e f o centri g, axis c f: circa quamcunque z y L ordinatim vtrinque applicatam ad axem c f circumuoluatur figura z c L, siue punctum y congruat alterutri punctorum g, f, siue ab iis differat. Huius solidi dimidium abscissum plano q y c ad planum c y z recto consideramus in præsenti.

Ostendendum est notam esse basim cylindracei altitudinis y q vel g c, æquiponderantis dimidio illius solidi librâ f c suspensa ex y perpendiculo plano q y z, brachio æquante rectam c g.

Quoniam ex decima octaua libri superioris figuræ z c p vel c s L secunda quadratrix nota est iisdem positis; secunda verò quadratrix figuræ c p y vel c s y est nota ex methodo corollarij quarti decimæ quartæ propositionis tertij libri: ergo totius figuræ c z y vel c L y nota est secunda quadratrix: igitur ex methodo decimæ nonæ duplum huius erit basis cylindracei altitudinis q y æquiponderantis solidi peripherici dimidio proposito, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

In primo casu, quando videlicet punctum y congruit centro g, per decimam septimam superioris libri quadratrix secunda figuræ c z p est duæ nouenæ quadrati g c: sed figuræ p c y ex corollario quarto decimę quartæ superioris libri respondet quadratrix ęquans quadrantem figurę c e g, hoc est decimam sextam partem circuli genitoris; ergo decima sexta pars circuli genitoris aucta duobus nouenis quadrati c g est secunda quadratrix figuræ c z y: ergo per methodum decimæ nonæ tertij libri cylindraceum altitudinis c g baseos æquantis duplum illius spatij, videlicet octauam partem circuli genitoris auctam quatuor nouenis quadrati g c æquiponderat dimidio solidi quod ad rectæ c y partes z iacet.

COROLLARIVM II.

In secundo casu, quando videlicet punctum y congruit puncto f, per corollarium primum decimæ octauæ superioris libri figuræ c z p quadratrix secunda est quinque sextantes circuli genitoris; sed semicirculi f e c quadratrix secunda æquat quinque octauas circuli genitoris ex methodo corollarij quarti iam laudati in superiore corollario: ergo secunda quadratrix toti a z c f respondens brachio f T æquante rectam f g, perpendiculo f a, est triginta quinque semunciæ circuli genitoris. Igitur ex methodo superioris corollarij duplum huius nempe triginta quinque vnciæ circuli genitoris erit basis æquiponderantis cylindracei altitudinis y q vel g c quod dimidio solidi æquiponderat.

COROLLARIVM III.

Vt quadratum circulo circumscriptum se habet ad circulum, hoc est

vt quadruplū primi termini progressionis perspectę definitæ in corollario primo decimæ propositionis libri superioris ad secundum, vel vt primus ad quadrantem secundi, ita recta y q æqualis rectæ g c, fiat ad rectam y h. Quoniam cylindraceum A altitudinis y h baseos æquantis dimidium circuli genitoris auctum quatuor trientibus quadrati g c est æquale dimidio solidi descripti in primo casu, nempe quando punctum y congruit centro g; si cylindraceum A conuertatur in cylindraceum B æquale ipsi, altitudinis y q, patet vt y q ad y h ita reciprocè esse basim solidi A ad basim solidi B: ergo basis solidi B est octaua pars quadrati f a aucta triente circuli genitoris, vel est octaua pars tertij termini aucta triente secundi: nam basis solidi A est dimidium circuli genitoris auctum quatuor trientibus quadrati g c, vel est dimidum secundi termini auctum quatuor trientibus primi. Suspensum igitur B primi casûs & ipsi æquiponderans repertum in corollario primo se habent vt bases, cùm eadem altitudine y q vel g c sint prædita: ac proinde in primo casu vt octaua pars quadrati f a aucta triente circuli se habet ad octauam partem circuli genitoris auctam quatuor nouenis quadrati g c, ita est suspensum ad æquiponderans. Vel vt octaua pars tertij termini perspectę progressionis aucta triente secundi se habet ad octauam secundi auctam quatuor nouenis primi, ita est suspensum ad æquiponderans.

COROLLARIVM IV.

Similiter cùm in secundo casu suspensum sit cylindraceum A altitudinis y h, baseos ęquantis decem circulos genitores, si mutetur in cylindraceum B altitudinis y q vel g c, istius basis erit quinque quadrantes quadrati f a vel tertij termini. Vt igitur basis solidi B ad basim solidi A repertam in corollario secundo, ita est in isto casu suspensum ad ęquiponderans; est ergo suspensum ad ęquiponderans vt quinque quadrantes quadrati f a ad triginta quinque vncias circuli genitoris: vel vt quinque quadrantes tertij termini ad triginta quinque vncias secundi; vel vt tertius ad septem trientes secundi.

PROPOSITIO XXI.

PAruæ semicycloideos pars superior (*Fig.* 42.) sit b z c g, eius axis g c, basis g b; ex c f producta abscindatur g l æqualis rectæ b g & iungatur recta b l: ad planum b g c excitetur perpendicularis g d æqualis rectæ g c, & centro g intelligatur describi quadrans circularis g d e c: per limbum d e c moueatur recta parallela basi g b describens superficiem cylindraceam; per limbum b z c agatur parallela rectæ g d describens aliam superficiem cylindraceam, vt istis superficiebus cylindraceis & plano b g c t z comprehendatur dicylindraceum ad positionem plani d g b genitum ex quadrante circulari g c e d, & ex figura b z c g. Recta b g bifariam secetur in o, & per

o ducatur o p parallela rectæ g c & æqualis dimidio rectæ g c, intelligatur b q p g esse tota superior cycloides parua genita circulo semidiametri o p, centri o. Intelligatur cylindraceum altitudinis g d baseos æquantis duas simul figuras nempe triangulum b l g, & figuram b q p g.

Ostendendum est ad positionem plani d g c dicylindraceum genitum ex quadrante circulari d g c & ex figura b z c g esse condicta ratione æquale dimidio cylindracei duarum simul basium b l g, b q p g, altitudinis g d: & in eodem ad planum d g c, plano parallelo esse grauitatis centrum singulorum istorum solidorum inter se æqualium.

Per b ducatur b m parallela & æqualis rectæ g c, & figura m n g b subcontrariè describatur figura b z c g. In recta b g sumptum sit quodcunque punctum h & per illud ducta sit h s complens parallelogrammum d g h s; completo parallelogrammo c g b r quod erit sectio cylindri baseos g d e c, & parallelogrammo c g h u, si in plano ſ h u describatur quadrans circularis ſ h u t, erit is sectio cylindri & plani ſ h u: recta h u occurrat limbo b z c in z, & per z ducatur ordinatim applicata z t parallela semidiametro h s; recta u h producta occurrat in q, i, n lineis b q p g, b l, m n g; iungaturque recta h t. Igitur dicylindracei geniti ex quadrante circulari g d e c & ex figura b z g c ad positionem plani d g b, sectio communis cum plano ſ h u est figura ſ h z t comprehensa sub arcu ſ t & sub rectis ſ h, h z, z t; siue est sector ſ h t, vnà cum triangulo h z t, quod est dimidium rectanguli h z t V. Præterea rectangulum h z t V continetur sub z t sinu arcus t u, & sub t V sinu arcûs complementi t s: sed recta h n est per tertiam secundi libri æqualis sinui complementi arcûs ſ t: ergo rectæ n h, z t sunt æquales: ergo rectangulum n h z est æquale rectangulo h z t: ergo dimidium rectanguli n h z est æquale triangulo h z t. Cùm igitur per septimam libri eiusdem secundi rectangulo n h z æquale sit rectangulum altitudinis g d baseos q h, patet dimidium rectanguli altitudinis g d, baseos q h esse æquale triangulo h z t.

Rursus ducta e a ordinatim applicata & parallela semidiametro g d, quoniam ex generatione cycloideos paruæ b z c g, arcui c e vel u t est æqualis recta z a vel g h, tota autem g b est æqualis arcui c e d vel u t s, residua h b erit æqualis residuo arcui ſ t: ergo per demonstrata in progressu tertiæ primi libri rectangulum contentum sub g d & sub recta b h vel h i est duplum sectoris g e d vel h t s: igitur cùm dimidum rectanguli g d, h i & dimidium rectanguli g d, h q sint æqualia sectori h ſ t & triangulo h z t singula singulis, patet dimidium rectanguli altitudinis g d, baseos compositæ ex duabus q h, i h esse æquale figuræ h ſ t z quæ est sectio plani ſ h u ad libitum sumpti cum dicylindraceo genito ex quadrante circulari & ex figura b z c g: ergo per vndecimã quarti tetragonismicorũ istud

dicylindraceum est ad positionem plani d g c condicta ratione æquale dimidio cylindracei altitudinis g d, baseos compositæ ex triangulo b l g, & ex paruæ cycloidis superiore parte b q g : atque adeo planum parallelum plano d g c incedens per grauitatis centrum dicylindracei, incedit quoque per centrum grauitatis cylindracei, & duplum eius quod illi æquiponderat, æquiponderat pariter & isti, libræ perpendiculo plano posito d g c vel quouis parallelo ad illud, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII.

Iisdem manentibus (*Fig.* 42.) ostendendum est si ex b g abscindatur g y æqualis rectæ g c, librâ grammicâ y b suspensâ ex g perpendiculo d g c notum esse data circuli quadratura, æquiponderans cuilibet dicylindracei geniti vt suprà ex figuris b z c g, d g c e portioni sumptæ ad positionem plani d g c. Quando autem sumitur totum dicylindraceum, æquiponderantis duplum esse cylindraceum altitudinis g d vel g c, baseos æquantis octauam partem circuli genitoris diametri f c, auctam spatio quod ad sextantem quadrati b g sit vt dimidium quadrati circulo circumscripti ad ipsum circulum.

Istud patet ex eo quod cylindraceum altitudinis g d baseos æquantis dimidium æquponderantis duabus simul figuris planis b l g, b q g ad positionem rectæ g c sumptis, est per superiorem, istud æquiponderans quæsitum : atqui portioni trianguli l g b notum est æquiponderans, cùm notum sit eiusmodi portionis centrum grauitatis, ipsáque portio sit nota dato tetragonismo circuli ; figuræ b q g æquiponderans quoque notum est ex tertia tertij : ergo notum est æquiponderans portioni dicylindracei propositæ quod erat generaliter ostendendum.

In casu verò totius dicylindracei propositi res ita ad numeros exigitur. Ex b g recta abscindatur g A æqualis ipsi b g : ergo brachio g A perpendiculo g l æquiponderans triangulo l b g est triens ipsius trianguli, vt ex sexta quadraturæ parabolæ Archimedeæ liquet : ergo cùm triangulum b g l sit dimidium quadrati b g istud æquiponderans est sextans quadrati b g. Rursus quoniam per octauam secundi tetragonismicorum si brachium g A mutetur in g y, vt est g A ad g y ita vicissim est æquiponderans brachij g y ad aliud brachij g A ; vt autem g y ad g A ita est (vt patet ex methodo corollarij duodecimæ libri tertij) quadrans quadrati circumscripti circulo ad semicirculum ipsum, vel ita est dimidium quadrati circumscripti ad circulum ; ergo brachio g y, æquiponderans triangulo b l g est spatium quod ad sextantem quadrati b g sit vt circulus ad dimidium circumscripti quadrati.

Rursus quoniam figuræ totius b p g centrum grauitatis est in axe o p æquiponderans illi, brachio g A erit dimidium totius figuræ b q g, hoc est spatium æquale quadrato p o vt ex duodecima primi & ex nona secundi

constat: sed quadratum p o est quarta pars quadrati g c; ergo æquiponderans istud est quarta pars quadrati g c. Igitur si brachium g A mutetur in g y æquiponderans respondens brachio g y erit octaua pars circuli semidiametro g c descripti, ac proinde duplum æquiponderantis quæsitum erit octaua pars circuli genitoris diametri f c, aucta spatio quod ad sextantem quadrati b g sit vt dimidium quadrati circumscripti ad ipsum circulum. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam progressionis primæ perspectæ primus terminus ponitur quadratum g c, secundus verò circulus f c duplus rectanguli c g b, recta c g ad g b erit vt primus terminus ad dimidium secundi, vel vt tertius ad dimidium quarti: sed vt tertius ad dimidiũ quarti ita est semuncia tertij ad quadragesimã octauã partem quarti termini; ergo cum sextans quadrati b g sit semuncia tertij termini, spatium quod ad sextantem quadrati b g sit vt dimidium quadrati circulo circumscripti ad ipsum circulum, erit quadragesima octaua pars quarti termini progressionis cuius primus terminus est quadratum semidiametri circuli, secundus est ipse circulus.

PROPOSITIO XXIII.

SIt (*Fig*. 43.) tota semicycloides parua a b c f, cuius axis f c, basis f a; maneat vt in superiore quadrans circularis d g c, completúsque sit semicirculus f d c.

Ostendendũ est libra grãmica y b suspensa vt suprà, æquiponderãs dicylindraceo genito ad positionem plani d g b ex quadrante circulari f e d g & ex figura b z a f g, esse condicta ratione æquale cylindraceum altitudinis g d, baseos notæ posito tetragonismo circuli. Quando verò totum dicylindraceum sumitur, æquiponderans illi esse æquale cylindraceo altitudinis eiusdem, baseos æquantis dimidium quarti termini progressionis primæ perspectæ iam explicatæ deducta decima sexta parte quadrati f a, & simul septem quadragesimis octauis partibus circuli genitoris diametro f c descripti.

Compleatur parallegrammum f a q g, & ex recta b q abscindatur q r æqualis rectæ a q vel g f; compleatur quoque parallelogrammum d g q o. Igitur libra r b suspensa ex q perpendiculo o q a (cùm a z b q sit eadem atque b f c g sed subcontrariè posita, vt ex octaua secundi libri constat) notum erit ex superiore æquiponderans dicylindraceo genito ex quadrante circulari f e d g & ex figura a z b q: sed notum est etiam æquiponderans dicylindraceo genito ex toto parallelogrammo a q g f & ex quadrante circulari f e d g; ergo per subductionem notum est æquiponderans dicylindraceo genito ex quadrante circulari f e d g, & ex figura a z b g f ad positionem plani d g b. Rursus cùm per octauam nota sit dicylindracei totius pars quæ insistit basi a z b q ad positionem rectæ g q sum-

ptæ si ex dicylindraceo noto cuius basis sit parallelogrammum f a q g vel quælibet eius pars sub parallela rectæ g b, auferatur pars illa, relinquetur nota altera pars baseos a z b g f: ergo cùm pars ista sit nota, & illius æquiponderans brachio q r, notum quoque erit illius æquiponderans brachio g y, vt ex nona & decima secundi tetragonismicorum liquet: ergo generaliter ostendimus quod erat demonstrandum.

In casu verò proposito æquiponderans parti baseos a z b q totius, est per superiorem cylindraceum altitudinis q o vel g d baseos æquantis decimam sextam partem circuli genitoris f c auctam nonagesima sexta parte quarti termini perspecti. Ipsa verò portio baseos a z b q est per septimam æqualis cylindraceo eiusdem altitudinis, baseos æquantis quadrantem quadrati g c, & decimam sextam partem quadrati f a vel tertij termini perspecti. Igitur propter mutationem perpendiculi a q in perpendiculum f g, & brachij q r in g y, prima pars baseos suspensi mutabitur in quadrantem circuli genitoris; altera verò pars mutabitur in decimam sextam partem quarti termini progressionis perspectæ. Ergo æquiponderans portioni baseos a z b q brachio g y est cylindraceum altitudinis g d baseos æquantis quadrantem circuli genitoris & simul decimam sextam partem quarti termini perspectæ progressionis, deductâ decima sexta parte circuli genitoris, & deductâ nonagesima sexta parte quarti termini perspecti. Igitur ratione omnium subductâ, basis cylindracei brachio g y æquiponderantis portioni insistenti super a z b q est quinque nonagesimæ sextæ quarti termini auctæ tribus decimis sextis circuli genitoris.

Rursus cylindraceo altitudinis f a, baseos f e d g, ex methodo tradita in vigesima prima propositione æquiponderat cylindraceum altitudinis d g baseos æquantis octauam partem quarti termini perspecti. Nam si brachium æquet rectam f a æquiponderans erit dimidium ipsius cylindracei, hoc est, erit cylindraceum cuius altitudo f m dimidium rectæ f a, basis quadrans circularis f e d g, hoc est, quadrans secundi termini; si ergo brachium longitudinis f a mutetur in brachium longitudinis g y, æquiponderantis illius basis quadrans secundi termini mutabitur in quadrantem tertij; ergo brachio g y posito, æquiponderans est cylindraceum A altitudinis f m vel m a, baseos quadrantis tertij termini. Quoniam verò vt dimidium rectæ f g vel g y ad dimidium rectæ f a, ita est quadrans tertij termini ad quadrantem quarti, cylindraceum B cuius altitudo sit dimidium rectæ f g, basis quadrans quarti termini perspecti erit æquale cylindraceo A propter leges reciprocationis: sed propter easdem leges cylindraceo B est æquale cylindraceum D altitudinis g f baseos æquantis octauam partem quarti termini perspecti: ergo cylindraceo baseos f e d g altitudinis f a, posito brachio g y, perpendiculo plano d g f, æquiponderat cylindraceum D altitudinis g d vel f g, baseos æquantis octauam partem quarti termini perspecti prout fuit propositum.

Quoniam verò si ex æquiponderante totius cylindracei baseos f e d g

dematur æquiponderans partis insistentis super q a z b restat æquiponderans alteri parti, patet æquiponderans parti quæsitum esse septem nonagesimas sextas quarti termini progressionis perspectæ deductis tribus decimis sextis circuli genitoris, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam æquiponderans in superiore propositione computatum, est cylindraceum altitudinis g d, baseos æquantis decimam sextam partem circuli genitoris auctam nonagesima sexta parte quarti termini perspecti: toti dicylindraceo baseos a b c f confusis in vnum æquiponderantibus demonstratis in ista & in superiore, æquiponderat cylindraceum altitudinis g d baseos æquantis vnciam quarti termini perspecti imminutam octaua parte circuli genitoris

PROPOSITIO XXIV.

Iisdem manentibus (*Fig.* 43.) intelligatur figura f h u l c quæ sit tertia ad positionem rectæ g b post secundam a z c f & primam parallelogrammum cuius latus æquat rectam g y; earum verò hæc sit proprietas vt quæcunque n u parallela rectæ f a ducatur occurrens lineis a z b c, h u l c in z, u, tres rectæ, g y, n z, n u sint proportionales. Sit præterea figura f p c illa quam in superiore inuenimus esse basim cylindracei altitudinis g y, æquiponderantis condicta ratione ad positionem plani d g b dicylindraceo genito ex semicirculo f d c & ex figura a b c f.

Ostendendum est dicylindraceum genitum ex semicirculo f d c & ex figura h u l c f ad positionem plani d g b esse condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis g d baseos figuræ f p c bis sumptæ.

Quoniam enim completo parallelogrammo f x y g & c g y B si intelligatur libræ planæ axis f c sustentaculum x B, & ad positionem rectæ g b aptetur sustentaculo x B dimidium tertij gradûs h u c f, istud dimidium ita aptatum æquiponderat condicta ratione figuræ a z c f vt iacet manenti, ex vigesima octaua quarti tetragonismicorum; (nam vt brachium n D ad dimidium rectæ n z, ita ipsa n z ad dimidium rectæ n u aptatum puncto D) igitur posita eadem altitudine n e parallelogrammo z n e æquiponderat parallelogrammum altitudinis n e baseos æquantis dimidium rectæ n u; ac proinde dicylindraceo genito ex semicirculo f e c & ex cycloide parua a z c f æquiponderat axe f c perpendiculo plano d g c dicylindraceum genitum ex dimidio figuræ h u c f aptato ad sustentaculum x B, & ex eodem semicirculo f e c. Quoniam verò eidem iisdem positis æquiponderat cylindraceum altitudinis g d, baseos f p c pariter aptatæ sustentaculo x B, patet dicylindraceum aptatum, esse æquale cylindraceo aptato: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLL.

COROLLARIVM.

Calculus pro casu duplici computato in superiori propositione patet pro præsenti, cui duplum prioris competit.

PROPOSITIO XXV.

SIt (*Fig.* 44.) quæuis figura b f c a ad positionem rectæ c a insistens super recta b a constituente cum a c augulum rectum b a c: super b a constructum sit quodcunque rectangulum b a u h. Intelligatur figura a b f c per lineam b e d diuisa in duas b e d a, b f c d e, quarum b e d a dicatur prima pars, & secunda b f c d e. Ad positionem rectæ a u ponatur primus gradus parallelogrammum b a u h, secundus figura b e d a, tertius figura b l m a, ita vt tres eorum quælibet dimetientes g o, g e, g l parallelæ ad rectam a u, sint proportionales: ponatur rursus idem primus gradus, secundus figura b c d ., tertius figura b i r a, ita vt tres eorum dimetientes g o, e f, g i sint proportionales: intelligatur denique figura h u r p q ita se habens ad primam & secundam partem, vt sicuti est o g dimetiens primi gradus ad g e dimetientem partis primæ, ita sit f e dimetiens secundæ ad o s dimidium rectæ o p dimetientis figuræ h u r q. Figuram cuius dimetiens f g voco mixtam videlicet ex prima parte & ex secunda: figuram cuius dimetiens g l vocabo tertium gradum primæ partis; figuram dimetientis g i, tertium secundæ: figuram dimetientis o s vocabo *ignotam*, eo quòd ad præsentem demonstrationem non sit necessarium vt cognita sit. Tertium gradum mixtæ, illum dicam qui posito primo b a u h, respondet secundo b f c a.

Ostendendum est tertium gradum mixtum componi ex tertio gradu primæ & secundæ partium, & ex ignota.

Quoniam enim quadratum f g æquale est duobus quadratis f e, e g & bis rectangulo f e g, quadrato autem f e est æquale rectangulum o g i, quadrato e g rectangulum o g l, bis rectangulo f e g rectangulum g o p, patet rectangulum altitudinis g o baseos compositæ ex rectis g i, g l, o p esse æquale quadrato g f; ergo tres rectæ g o, g f & composita ex tribus g i, g l, o p sunt proportionales, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XXVI.

IIsdem manentibus (*Fig.* 44.) ad positionem rectæ d a dicylindraceum genitum ex ignota & ex prima parte est æquale dicylindraceo ex secunda parte & ex tertio gradu primæ: dicylindraceum verò genitum ex ignota & ex secunda est æquale dicylindraceo genito ex prima parte & ex tertio secundæ.

Quoniam vt parallelogrammi b a u h dimetiens g o ad g e dimetientem primæ partis, ita est f e dimetiens secundæ ad o s dimetientem ignotæ; si vt o g ad g e, ita fiat o s ad quartam notatam elemento F; dimetiens e f secundæ partis erit ad quartam F in duplicata ratione rectarum g o, g e: sed recta g o ad g l est in eadem duplicata ratione rectarum g o, g e, cùm tres rectæ g o, g e, g l sint proportionales: ergo vt g o dimetiens parallelogrammi ad g l dimetientem tertij gradûs primæ partis, ita e f dimetiens secundæ partis ad F: ergo dicylindraceum sub mediis videlicet sub tertio primæ partis & sub secunda parte est æquale cylindraceo sub extremis contento, nempe sub parallelogrammo & sub figura dimetientis F. Præterea cùm tres g o, g e, g l sint proportionales tribus e f, o s, F & ternarij vtriusque ratio sit continua, erit vt g o dimetiens parallelogrammi ad g e dimetientem primæ partis, ita o s dimetiens ignotæ ad F: ergo dicylindraceum sub mediis videlicet sub prima parte & sub ignota est æquale cylindraceo contento sub extremis, nempe sub parallelogrammo & sub figura dimetientis F. Atqui eidem cylindraceo ostendimus suprà æquale esse dicylindraceum contentum sub tertio gradu primæ partis & sub secunda parte: ergo istud dicylindraceum sub tertio gradu primæ partis & sub secunda parte contentum est æquale dicylindraceo contento sub prima parte & sub ignota, quod erat primò propositum.

Rursus quoniam vt parallelogrammi b a u h dimetiens g o ad f e dimetientem secundæ partis, ita est g e dimetiens primæ ad o s dimetientem ignotæ, si vt g o ad f e dimetientem secundæ partis ita fiat o s ad quartam notatam elemento G, dimetiens g e secundæ partis erit ad quartam G in duplicata ratione rectarum g o, f e: sed recta g o ad g i est in eadem duplicata ratione, cùm tres rectæ g o, f e, g i sint proportionales: ergo vt g o dimetiens parallelogrammi ad g i dimetientem tertij gradûs secundæ partis, ita g e dimetiens primæ partis ad G. Præterea cùm g o, f e, g i sint proportionales & in eadem ratione sint quoque tres g e, o s, G; erit vt g o dimetiens parallelogrãmi ad f e dimetientẽ secundę partis, ita o s dimetiens ignotæ ad G: ergo dicylindraceum sub mediis videlicet sub secunda parte & sub ignota est æquale cylindraceo sub extremis, nempe sub parallelogrammo & sub figura dimetientis G. Atqui eidem cylindraceo ostendimus paulò antè æquale esse dicylindraceum contentum sub tertio gradu secundæ partis & sub prima parte: ergo istud dicylindraceum sub tertio gradu secundæ partis & sub prima comprehensum est æquale dicylindraceo contento sub secunda parte & sub ignota, quod erat secundo loco propositum.

COROLLARIVM.

Quoniam tertius gradus mixtus componitur ex tertio gradu primæ & secundæ partis & bis ex ignota, patet dicylindraceum sub tertio mixto gradu & sub secundo mixto b f c e esse æquale octo dicylindraceis geni-

tis ex tertio gradu primæ ducto in primam; ex eodem tertio ducto in secundam: item ex tertio gradu secundæ ducto in primam, & ex eodem tertio ducto in secundam; item ex ignota ducta bis in primam, & ex eadem ignota ducta bis in secundam. Cùm igitur per præsentem dicylindraceum ex ignota ducta bis in primam sit dicylindraceum bis ex tertio gradu primæ & ex secunda genitum; dicylindraceum verò ex ignota ducta bis in secundam sit dicylindraceum bis ex tertio gradu secundæ & ex prima genitum, patet octo illa dicylindracea esse dicylindraceum sub prima & sub tertio primæ gradu, dicylindraceum item sub prima & ter sub tertio secundæ; præterea dicylindraceum sub secunda & sub tertio ipsius gradu, & dicylindraceum sub secunda & ter sub tertio gradu primæ. Igitur dicylindraceum sub tertio mixto gradu & sub secundo contentum, est æquale dicylindraceo sub prima & sub eius tertio gradu, dicylindraceo quoque sub prima & ter sub tertio gradu secundæ; dicylindraceo præterea sub secunda & sub tertio ipsius secundæ gradu, dicylindraceo denique sub secunda & ter sub tertio primæ gradu. Vnde patet ignotam euanuisse, nec eam hîc requiri.

PROPOSITIO XXVII.

Reuocetur schema decimæ quartæ (*Fig.* 40.) & in eo figura a b r c f consideretur ad positionem rectæ f a tanquam composita ex duabus partibus quarum prima sit semicirculus f B c vel figura a b r c h, secunda pars sit semicycloides parua a h c f. Intelligatur primus gradus ad positionem rectæ g b esse parallelogrammum E f c lateris f E æquantis rectam g B vel g c: intelligatur parabolicum segmentum f b c cuius basis f c: intelligatur figura p q c f quæ sit tertius gradus secundæ partis a z c f. Intelligatur tertius gradus mixtæ a b c f genitus vt in vigesima quinta præscriptum fuit; concipiatur quoque gigni ignota figura ibidem definita.

Ostendendum est tertium gradum mixtæ ad positionem rectæ g b componi ex parabolico segmento f B c, ex figura p q c f, & ex bis ignota.

Quoniam enim f B c est segmentum parabolicum cuius basis f c æquat diametrum semicirculi f B c, ex tertia tetragonismicorum liquet tertium gradum semicirculi esse parabolicum illud segmentum: igitur ex vigesima quinta patet quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex corollario superioris sequitur dicylindraceum genitum ex mixta & ex tertio ipsius gradu ad positionem plani m g b esse æquale octo spatiis expositis in illo eodem corollario.

PROPOSITIO XXVIII.

QVadrata g a d c, a g f b (*Fig*. 45.) constituant rectangulum b f c d, in quo descriptum sit parabolicum segmentum b g d cuius basis b d, axis a g, tangens f c: ad planum b f c d excitata sit perpendicularis c n æqualis lateri c d: super recta f c ad positionem rectæ g a insistat quæuis figura f m l c. Intelligatur ad positionem plani n c d ex parabola b g h d & ex figura f m c gigni dicylindraceum; libra grammica f c ex g suspensa perpendiculo g m, brachio f g gignatur quadratrix prima g r c & secunda g q c respondentes primariæ figuræ g m l c, ita vt sicut f g brachium ad g i quamcunque portionem rectæ g c, sic sit i l dimetiens figuræ suspensæ parallela perpendiculo g m, ad i r dimetientem primæ quadratricis, ipsaque i r ad i q dimetientem secundæ: brachio verò g c gignantur duæ similiter quadratrices g u f, g t f ita vt sicut brachium g c ad g s, sic sit s x ad s u, & s u ad s t.

Ostendendum est ad positionem plani n c d dicylindraceum genitum ex parabola b p g h d & ex figura f m l c esse condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis c n baseos f t g q c l m x.

Iunctis rectis g d, g b, constat ex methodo vigesimæ quintæ & sextæ propositionis quarti libri tetragonismicorum dicylindraceum genitum ex figura g m l c & ex ceratoide parabolica g h d c, itemque aliud genitum ex figura g m x f & ex ceratoide parabolica g p b f esse condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis c n, baseos g q c, g t f. Patet quoque cylindraceum altitudinis c n, genitum ex parallelogrammo b f c d & ex figura f x m l c diuidi in duo genita & partibus parallelogrammi nempe ex parabola b p g h d, & ex complemento ad parallelogrammum: ergo dicylindraceum genitum ex parabola & ex figura f m c ad positionem plani n c d est condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis c n, baseos f t g q c l m x; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Si f m c ponatur circulus, ex quarto corollario decimæ quartæ tertij libri patet notum esse rectilineum æquale figuræ g q c, datâ circuli quadraturâ; ipsamque totam g q c esse quadrantem figuræ g m c, duasque simul g q c, g t f esse octauam partem circuli geniti diametro f c: ergo in hoc casu tota f t g q c l m x, est semicirculus f m c imminutus quarta parte ipsius; est ergo tres quadrantes semicirculi, vel tres octauæ totius circuli. Dimidium verò illius figuræ est tres decimæ sextæ partes eiusdem circuli.

PROPOSITIO XXIX.

IIsdem manentibus (*Fig. 46.*) figura g m l c sit paruæ cycloideos pars superior, & f g m x z sit eiusdem pars inferior.

Ostendendum est tam figuram g q c l m, quàm z t g m x esse rectilineo noto æqualem posita quadratura circuli: & totam g q c l m esse æqualem septem nouenis quadrati g c: totam verò z t g m x esse æqualē bessi circuli genitoris f c deductis septem nouenis quadrati g c.

Quoniam g m l c est superior pars semicycloideos paruæ, secunda illius quadratrix g q c brachio f g perpendiculo g m erit nota per decimam septimam superioris libri, positâ quadraturâ circuli. Tota verò g q c per eandem propositionem erit duæ nouenæ quadrati g c; sed tota g c l m ex duodecima primi est æqualis quadrato g c: igitur tota g q c l m est septem nouenæ quadrati g c.

Rursus completo parallelogrammo f g n z, quoniam figura m x z n est subcontrariè posita figuræ g c l m ex octauæ secundi corollario, librâ f g suspensâ ex g perpendiculo g m, brachio g c posito etiam ad partes oppositas brachij prioris f g, figuræ m x z n secunda quadratrix erit nota per decimam septimam tertij: sed parallelogrammi g f B n secunda quadratrix est etiam nota per duodecimam tertij tetragonismicorum; ergo per subductionem nota erit quadratrix secunda f g t ad positionem rectæ g m sumpta. Ergo si de quadratrice secunda parallelogrammi g f B n, siue B congruat puncto z siue non, dematur illa secunda, residua fiet secunda quadratrix f t g figuræ f x m g; parallelogrammum verò f g n B est ad f g n z siue ad circulum genitorem, vt recta f g ad g f.

Igitur quando tota z t g m quæritur, secunda quadratrix totius parallelogrammi g f z n est triens circuli genitoris, secunda verò figuræ m x z n est duæ nouenæ partes quadrati g c: ergo secunda f g t z est triens circuli genitoris deductis duabus nouenis quadrati g c. Cùm igitur figura f z x m g sit circulus genitor deducto quadrato g c, erit g t z m duo trientes circuli genitoris deductis septem nouenis quadrati g c: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hinc patet per additionem duas simul z t g m, g q c l m esse æquales bessi circuli genitoris, ideoque dicylindraceum ex parabola tota b g d & ex tota semicycloide parua f c m z esse æquale cylindraceo altitudinis æquantis rectam g c, baseos complectentis bessem circuli genitoris. Dicylindraceum verò ex a g d & ex g m l c cylindraceo altitudinis eiusdem baseos æquantis septem nouenas quadrati g c.

PROPOSITIO XXX.

REducta figura propositionis vigesimæ tertiæ (*Fig. 43.*) ostendendum est dicylindraceum sub secunda parte figuræ mixtæ,

hoc est sub figura f a b c, & sub eius tertio gradu h l c f ad positionem plani d g b genitum esse ad eandem positionem æquale cylindraceo altitudinis g d vel g c, baseos notæ; dato circuli tetragonismo.

Intelligatur solidi geniti circumuolutione figuræ f a z c f circa rectam f c quadrans qui insistit figuræ a z c f: isti quadranti libræ planæ axe f c sustentaculo x B perpendiculo plano d g c æquiponderans est notum per septimam & per decimam tertij libri: ergo per sextam eiusdem libri spatium sesquialterum istius æquiponderantis æquiponderat solido cuius sectiones parallelæ plano d g b sint quadrata lateris n z, g b &c. Igitur per corollarium quartum octauæ propositionis libri eiusdem si spatium eiusmodi sesquialterum conuertatur in cylindraceum cuius altitudo sit recta g d, duplum baseos illius erit quartus gradus, posito ad positionem rectæ g b primo f x B c, secundo f a b c, tertio f h l c. Igitur cùm cylindraceum sub primo gradu & sub quarto sit per vndecimam quarti tetragonismicorum æquale dicylindraceo sub secundo & tertio, patet quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ex corollario primo septimæ propositionis libri superioris habemus æquiponderans parti illi quadrantis propositi quæ insistit super superiore parte b f c g esse cylindraceum altitudinis g d vel g c, baseos æquantis quadratum g b vel quadrantem quadrati f a imminutum duplo quadrati g c: cylindraceum istius sesquialterum retenta eadem altitudine habet pro basi tres octauas quadrati f a imminutas triplo quadrati g c: quartus igitur gradus est tres quadrantes quadrati f a deductis tribus quadratis g c. In isto igitur casu dicylindraceum genitum ex secundo & tertio gradu est æquale cylindraceo altitudinis g d, baseos continentis tres quadrantes quadrati f a imminutos tribus qnadratis g c.

COROLLARIVM II.

Ex corollario primo decimæ propositionis libri eiusdem habemus æquiponderans quadrantis propositi insistentis super tota basi a z c f esse cylindraceum altitudinis g d vel g c, baseos æquantis trientem quarti termini progressionis perspectæ imminutum duobus circulis genitoribus. Cylindraceum istius sesquialterum retentâ eadem altitudine habet pro basi dimidium quarti termini progressionis perspectæ imminutum tribus circulis genitoribus. In isto igitur casu dicylindraceum genitum ex secundo & tertio gradu est æquale cylindraceo altitudinis g d, baseos complectentis quartum terminum progressionis perspectæ imminutum sex circulis genitoribus.

PROPOSITIO XXXI.

REuocato schemate (*Fig.* 40.) propositionis vigesimæ septimæ, ostendendum est dicylindraceum genitum ex figura a b c f, quæ

est magna semicycloides, & ex tertio ipsius gradu p q c f ad positionem plani m g b esse condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis m g, baseos æquantis rectilineum notum, datâ quadraturâ circuli.

Ex corollario vigesimæ quintæ liquet eiusmodi dicylindraceum esse æquale octo spatiis nempe dicylindraceo E genito ex prima parte a b c h & ex tertio ipsius gradu: dicylindraceo insuper F genito ex secunda parte a o h c f & ex eius tertio gradu: præterea ter dicylindraceo G genito ex prima & ex tertio gradu secundæ: denique ter dicylindraceo H genito ex secunda & ex tertio gradu primæ. Atqui E est cylindraceum altitudinis g m vel g c, baseos æquantis rectilineum notum per corollarium vigesimæ octauæ huius libri: F quoque est æquale cylindraceo eiusdem altitudinis, baseos notæ per trigesimam huius: G pariter est æquale cylindraceo eiusdem illius altitudinis, baseos notæ per vigesimam quartam: H denique est æquale cylindraceo eiusdem altitudinis, baseos notæ per vigesimam nonam præsentis libri: ergo totum dicylindraceum ex illis collectum est æquale cylindraceo altitudinis g m, baseos æquantis illorum cylindraceorum iam demonstratorum bases: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ex corollariis vigesimæ quartæ, vigesimæ octauæ, trigesimæ, & vigesimæ nonæ constat pro casu superioris partis b r c g istud dicylindraceum esse æquale cylindraceo altitudinis g m, baseos æquantis decimam sextam partem quarti termini progressionis perspectæ auctam tribus quadrantibus tertij siue quadrati f a, nouem decimis sextis secundi siue circuli genitoris f c, & imminutam besse primi siue quadrati g c. Nam basis cylindracei æqualis spatio E dat tres decimas sextas circuli genitoris: basis cylindracei F dat tres quadrantes quadrati f a imminutos tribus quadratis g c: basis cylindracei G ter sumpta dat decimam sextam partem quarti termini auctam tribus octauis circuli genitoris: basis cylindracei H ter sumpta exhibet septem trientes quadrati g c. Summa ex illis basibus conflata est illa quam protulimus initio corollarij.

COROLLARIVM II.

Ex iisdem illis constat pro casu totius semicycloideos magnæ a b c f istud dicylindraceum esse æquale cylindraceo altitudinis g m, baseos æquantis tres semisses quarti termini imminutos triginta quinque octauis circuli genitoris siue secundi termini. Nam basis cylindracei E dat tres octauas circuli genitoris: basis cylindracei F dat quartum terminum imminutum sex circulis genitoribus: basis cylindracei G ter sumpta dat dimidium quarti termini imminutum tribus quadrantibus circuli genitoris: basis cylindracei H ter sumpta dat duos circulos genitores, quarum basium summa consonat proposito calculo.

COROLLARIVM III.

Quoniam primus gradus ad positionem rectæ g h est parallelogrammum E f c, secundus semicycloides magna a b c f, tertius p q e f, patet quartum esse ęqualem basi collectę ex basibus illorum octo cylindraceorum altitudinis g m: nam vt E f dimetiens primi gradus ad y z dimetientem secundi, ita est y z ad y q dimetientem tertij, & ita erit y q ad dimetientem quarti, sed ita etiam est eadem y q ad basim rectanguli altitudinis E f vel g m quod æquale sit rectangulo q y z: ergo cùm cylindracei iam inuenti sectio parallela plano m g b sit rectangulum æquale rectangulo q y z, patet basim illius esse quartum gradum.

PROPOSITIO XXXII.

Iisdem manentibus vt in decima quarta (*Fig.* 47.) circa rectam f c intelligatur circumuolui semicycloides magna a b c f, & consideretur dimidium illius solidi quod ad partes b abscinditur plano m g c.

Ostendendum est libra B b suspensa ex g perpendiculo plano m g c, brachio B g æquante rectam g c, eiusmodi dimidio vel integro, vel cuilibet eius parti ad positionem plani m g b designatæ æquiponderare cylindraceum altitudinis g m, baseos notæ, datâ circuli quadraturâ, nempe æquantis bessem quarti gradûs in superioris propositionis corollario vltimò collecti.

Quoniam ex corollario superiore habemus quartum gradum, dimidium illius est basis illius cylindracei altitudinis eiusdem g m, quod æquiponderat solido cuius sectio parallela plano m g b est quadratum lateris y z, g b &c. per corollarium quartum octauæ superioris libri: sed cylindraceum altitudinis eiusdem cuius basis sit bes baseos illius est per sextam eiusdem libri æquiponderans quadranti solidi descripti circa rectam f c: ergo cylindraceum altitudinis eiusdem, baseos æquantis trientem quarti gradûs æquiponderat quadranti solidi illius peripherici; ergo dimidio proposito illius solidi peripherici æquiponderat cylindraceum altitudinis g m, baseos æquantis bessem quarti gradûs suprà inuenti, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Æquiponderans igitur portioni ad partes C abscissæ per planum m g b in quo iacet centrum g, est cylindraceum altitudinis m g, baseos æquantis semunciam quarti termini, dimidium tertij, tres octauas secundi deductis quatuor nouenis primi.

Æquiponderans verò toti est cylindraceum altitudinis m g, baseos æquantis quartum terminum perspectæ progressionis imminutum triginta quinque vnciis circuli genitoris, vel secundi termini. Istud patet ex corollariis duobus primo & secundo superioris propositionis.

PROP.

PROPOSITIO XXXIII.

Iisdem manentibus (*Fig.* 47.) portio solidi peripherici circa rectam f c descripti abscindatur per planum m g c & per n y z quoduis ipsi m g b parallelum, nisi cum ipso congruat.

Ostendendum est centrum grauitatis eiusmodi portionis esse notum data quadratura circuli.

Portionis designatæ sectio cum plano c f a sit figura z c y. Per superiorem inueniatur solidum C æquiponderans portioni designatæ, brachio B g perpendiculo plano n y c; Ex corollario tertio decimæ nonæ præsentis libri inueniatur solidum D æquiponderans portioni designatæ librâ c f suspensâ ex g perpendiculo plano n y z, brachio æquante rectam g B. Per decimam propositionem inueniatur solidum E æquale portioni suspensæ. Vt est E ad C ita fiat brachium g B ad rectam y r abscissam ex y c: vt est E ad D ita fiat idem g B ad y q abscissam ex y z, compleatur parallelogrammum q y r p. Dico punctum p esse centrum grauitatis portionis propositæ.

Istud demonstratur vt in vigesima secundâ & vigesima tertia superioris libri; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hoc ipso quod notum est punctum r, patet notum esse centrum grauitatis totius portionis abscissæ per planum n y z vtrinque productum; sicuti in vigesimæ secundæ & vigesimæ tertiæ pari casu monuimus.

PROPOSITIO XXXIV.

Iisdem manentibus (*Fig.* 47.) circa rectam z y parallelam basi f a vel ipsi congruentem descriptum sit solidum motu figuræ c z y; eius dimidium plano n y z abscindatur ad partes c.

Ostendendum est centrum grauitatis eiusmodi solidi esse cognitum.

Per decimam quartam huius libri inueniatur solidum D æquiponderans solido descripto brachio æquante rectam g c, perpendiculo plano n y z. Ex decima nona inueniatur solidum C quod libræ brachio g B perpendiculo n y c æquiponderet solido descripto. Per decimã nonam primi inueniatur solidum E æquale suspenso. Vt est E ad C ita fiat recta g B ad y r abscissam ex rectâ y c; & vt idem E ad D, ita fiat eadem g B ad y q abscissam ex recta y z. Completo parallelogrammo q y r p, dico punctum p esse centrum grauitatis quæsitum.

Istud demonstratur vt superior propositio: ergo &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Patet punctum o esse centrum grauitatis totius solidi peripherici, prout in pari casu propositionis superioris.

PROPOSITIO XXXV.

OCto problematis ab Anonymo propositis solutionem esse hactenus à nobis datam demonstrare.

Primò (*Fig.* 47.) quæritur dimensio spatij z c y. Demonstratur in duodecima primi & in eius corollariis.

Secundò quæritur centrum grauitatis spatij z c y. Inuenitur in corollario tertio nonæ libri præsentis.

Tertiò quæritur solidum circa basim z y. Inuenitur in decima nona primi.

Quartò quæritur solidum circa axem c y. Inuenitur in decima præsentis libri.

Quintò quæritur solidi totius circa basim z y centrum grauitatis. Demonstratur in corollario superioris.

Sextò quæritur centrum grauitatis solidi totius circa axem c y geniti. Demonstratur in corollario trigesimæ tertiæ.

Septimò dimidij solidi circa basim z y diuisi à plano per rectam z y ducto & recto ad c y z planum, quæritur centrum grauitatis. Datur in superiore.

Octauò quæritur centrum grauitatis dimidij solidi circa c y geniti & diuisi plano a y c. Reperitur in trigesima tertia. Ergo &c. quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXVI.

PRoponitur calculus octo problematum pro duplici casu quem Anonymus in primis ad Europæ Geometras literis designauit.

Sit (*Fig.* 48.) a c d cycloides magna respondens circulo genitori diametri c f, eiusque pars superior sit b c o, inferior b o d a, reliqua hîc construantur & ponantur sicuti in vigesima quinta tertij pro simili causâ factum fuit.

Primò quæritur segmentum a c d, itémque segmentum b c o. *Istud constat ex duodecima propositione primi libri.*

Segmentum a c d est triplum secundi termini progressionis perspectæ quam determinauimus initio vltimæ propositionis libri tertij. Segmentum b c o est æquale duplo primi termini & simul dimidio secundi.

Secundò quæritur grauitatis centrum pro figura c z b g, itémque pro figura c b a f. *Istud perficitur per corollarium tertium nonæ propositionis.*

Vt primus terminus auctus quadrante secundi se habet ad decimam sextam partem tertij auctam bis quadrante secundi & imminutam quinque vnciis primi, ita fiat recta g e ad g q abscissam ex g b: vt autem idem primus terminus auctus quadrante secundi ad octauam partem secundi auctam triente primi, ita fiat recta g f ad g y abscissam ex g c. Comple-

to parallelogrammo y g q p dico punctum p esse centrum grauitatis in figura c z b g.

Præterea vt sunt tres semisses secundi termini ad tres quadrantes tertij imminutos quatuor trientibus primi, ita fiat recta f i ad f r: punctum verò t ita secet rectam c f vt tota c f ad f t sit sicut duodenarius ad quinarium. Completo parallelogrammo t f r s, dico punctum s esse centrum grauitatis in figura c b a f.

In figuris autem b c o, a c d centra grauitatis sunt y & t.

Tertiò quæritur solidum genitum circa basim b o circumductu figuræ b c o, itémque aliud circa basim a d circumacta figura a c d. *Istud obtinebitur per decimam nonam primi libri.*

Solidum genitum circa rectam b o est æquale cylindraceo altitudinis f u, baseos æquantis duplum secundi termini auctum sexdecim trientibus primi; vel reciprocè altitudinis f n, baseos æquantis dimidium tertij termini auctum quatuor trientibus secundi. Solidum verò aliud est æquale cylindraceo altitudinis f u, baseos æquantis viginti terminos secundos; vel vicissim altitudinis f n, baseos æquantis quinque terminos tertios.

Quartò quæritur solidum genitum circumductu figuræ c z b g circa rectam c g manentem, & aliud præterea quod generetur ex circũacta figura c b a f circa rectam c f manentem. *Istud habetur ex corollario decimæ.*

Basis cylindracei altitudinis f u æquat in primo casu dimidium tertij termini auctum quadruplo secundi, & imminutum decem trientibus primi; vel reciprocè altitudinis f n cylindraceum habet pro basi octauam partem quarti termini auctam tertio & minutam decem vnciis secundi. In secundo casu basis cylindracei altitudinis f u est sextuplum tertij termini imminutum triginta duobus trientibus primi; vel basis cylindracei altitudinis f n est tres semisses quarti deductis octo trientibus secundi.

Quintò quæritur centrum grauitatis solidi circa b g geniti motu figuræ c z b g, itémque alterius geniti motu figuræ c b a f circa manentem a f. *Istud obtinetur ex corollario primo decimæ sextæ, & ex corollario secundo decimæ nonæ.*

Vt secundus terminus auctus octo trientibus primi ad quadrantem tertij auctum quatuor trientibus secundi & imminutum sexdecim nouenis primi; ita fiat recta g e ad g q abscissam ex g b. Dico punctum q esse centrum grauitatis pro primo casu. Vt autem eiusdem secundi termini decuplum ad quintuplum tertij imminutum centum viginti & octo nouenis primi, ita fiat recta f i ad f r abscissam ex recta f a. Dico punctum r esse centrum grauitatis pro secundo casu.

Sextò quæritur centrum grauitatis solidi circa c g geniti motu figu-

ræ c z b g, itémque alterius geniti motu figuræ c b a f circa manentem c f. *Istud habetur ex corollario tertio decimæ nonæ.*

Vt dimidium tertij termini auctum quadruplo secundi & imminutum decem trientibus primi se habet ad quadrantem tertij auctum quatuor trientibus secundi & imminutum sexdecim nouenis primi, ita fiat recta f g ad g y abscissam ex g c. Dico y esse centrum quæsitum pro primo casu. Vt autem sextuplum tertij imminutum triginta duobus trientibus primi se habet ad quintuplum tertij imminutum centum viginti octo nouenis primi, ita fiat recta f x ad f t abscissam ex f g rectâ. Dico punctum t esse centrum grauitatis pro secundo casu.

Septimò solidum genitum circa rectam b g circumacta figura c z b g intelligatur bifariam secari plano m g b, nec non solidum genitum circa rectam f a circumductu figuræ c b a f, plano n f a. Quæritur centrum grauitatis dimidij solidi in vtroque casu. *Istud patet ex corollariis tertio & quarto vigesimæ.*

Vt octaua pars tertij termini aucta triente secundi se habet ad octauam partem eiusdem secundi, auctam quatuor nouenis primi, ita fiat recta g f ad g y abscissam ex g c. Manente puncto q reperto in solutione quinti compleatur parallelogrammum y g q p; dico punctum p esse centrum grauitatis pro primo casu.

Vt autem quinque quadrantes tertij ad triginta quinque vncias secundi ita fiat recta f x ad f t abscissam ex f g. Manente puncto r reperto in solutione quinti compleatur parallelogrammum t f r s; dico punctum s esse centrum grauitatis pro secundo casu.

Octauò solidum genitum circa rectam c g circumducta figura c z b g intelligatur bifariam secari plano m g c, item solidum genitum circumducta figura c b a f circa manentem c f, secetur bifariam plano n f c. Quæritur centrum grauitatis dimidij solidi in vtroque casu. *Istud habetur ex corollario trigesimæ secundæ.*

Vt decima sexta pars quarti termini aucta dimidio tertij & imminuta quinque vnciis secundi se habet ad semunciam quarti termini auctam dimidio tertij tribúsque octauis secundi, & imminutam quatuor nouenis primi, ita fiat g e ad g q abscissam ex g b. Manente puncto y quod in solutione sexti repertum fuit compleatur parallelogrammum y g q p; dico p esse centrum grauitatis quæsitum in primo casu.

Vt autem dodrans quarti termini imminutus quatuor trientibus secundi se habet ad quartum eundem terminum diminutum triginta quinque vnciis secundi, ita fiat f i recta ad f r abscissam ex f a. Manente puncto t quod in solutione sexti suprà reperimus, compleatur parallelogrammum t f r s; dico punctum s esse centrum grauitatis pro secundo casu. Ergo &c. quod erat propositum.

COROLLARIVM.

In calculo septimi & octaui problematis tam pro paruâ quàm pro magnâ cycloide, liquet basim cylindracei æquantis suspensum solidum eam esse assumptam quæ respondet altitudini fn, eò quòd cylindracea æquiponderantia prodierint eiusdem altitudinis. Patet etiam calculum horum duorum postremorum complecti reliquorum calculos, ac proinde nihil remouisse laboris qui calculatoris tædio in speciem parsurus hos duos tantùm exegerit. Patet denique fructum totius operis suauissimum esse istum calculum, quem ita rotundè per progressionis perspectæ terminos, nostræ ex libra petitæ demonstrationes exhibent, vt haud sciam an rotundiùs id alia via præstetur. Cæterùm sub finem tot calculorum admonendus es, Erudite Lector, quod in præfatione quarti tetragonismicorum, & in scholio primo tertiæ propositionis libri quinti iam pridem scripsimus, lapsum in epilogismis tractandis esse perfacilem & vehementer timendum calculatori etiam exercitatissimo. Hoc verò diligenter attendendum tibi esse si quis fortasse error in nostris numeris detegeretur, vtrum vitium in eorum tractatione subsistat, an etiam ad ipsam grammicam demonstrationem perueniat; si enim ista rectè procedat, stant cætera, inde quippe emendari poterunt numeri, quorum vitium tantùm excusationis habere censuerunt Legum Conditores, vt nunquam in rem iudicatam transire voluerint, si quid perperam computatum probari possit.

SCHOLIVM I.

Præsentem omnium casuum calculum edidimus nona die Ianuarij anni labentis 1659. statim atque prodiit Dettonuillanus sed qui vni tantùm eorum responderet his verbis ex sermone Gallico in Latinum versis. Mihi igitur satis non erit dare tibi problematum calculos, quorum vnus est iste attinens ad casum à me propositum [Centrum grauitatis semisolidi geniti circumductu semicycloideos circa basim, ab ipsa basi distat interuallo rectæ quæ ad diametrum circuli genitoris se habet vt septuplum diametri ad sextuplum circumferentiæ. Ab axe verò distat interuallo rectæ æquantis quadrantem circumferentiæ eiusdem, deductis sexdecim quintis partibus rectæ quæ inter centrum circuli genitoris, & grauitatis centrum semicirculi eiusdem interiacet.] Sed insuper tibi detegam meam pro centris grauitatis methodum generalem, quæ quò vniuersalior est, tantò tibi gratior accidet. *sub finem nostri calculi tunc editi adiecimus quæ sequuntur.*



Calculus centri grauitatis semisolidi circa dimidium baseos geniti reducitur ad terminos Dettonuillanos, quos Veredarius Publicus hac ipsa hebdomada v. Eid. Ian. ineuntis anni 1659. primùm detulit in hanc vrbem.

DISTANTIA CENTRI A BASI.

EX definitione tradita initio libri tertij primus terminus *perspectæ* progressionis ad secundum est sicut diameter circuli ad ipsius peripheriam. Per secundam partem calculi respondentis septimo problemati proposito, semidiameter circuli genitoris ad distantiam quæ est inter basim & centrum illud grauitatis est vt quinque quadrantes tertij termini ad triginta quinque vncias secundi; vel vt quinque quadrantes secundi ad triginta quinque vncias primi: ergo tota diameter circuli genitoris ad illud interuallum est vt quinque semisses secundi termini ad triginta quinque vncias primi; vel vt triginta vnciæ secundi ad triginta quinque vncias primi: vel vt secundus terminus progressionis tricies sumptus ad primum sumptum tricies & quinquies. Cùm igitur si secundus terminus ponatur peripheria circuli, primus sit eiusdem circuli diameter: distantia centri grauitatis à basi erit ad diametrum circuli genitoris vt diameter circuli tricies & quinquies sumpta ad peripheriam circuli eiusdem tricies sumptam, vel in minimis numeris, vt septuplum diametri circuli ad sextuplum peripheriæ circuli eiusdem: quod ad amussim quadrat calculo Dettonuillano.

DISTANTIA CENTRI EIVSDEM AB AXE.

Per secundam partem calculi respondentis quinto problemati proposito, vt est secundi termini decuplum ad tertij quintuplum imminutum centum viginti octo nouenis primi, ita est semidiameter circuli genitoris ad distantiam centri illius ab axe. Si tertius terminus ponatur semiperipheria circuli genitoris, secundus erit semidiameter, primus verò designetur elemento A: interuallum autem inter centrum circuli genitoris, & grauitatis centrum semicirculi eiusdem notetur elemēto B. Cùm ex 18. tertij tetragonismicorum vt circulus ad 4. trientes quadrati quod potest eius semidiameter, ita sit ipsa semidiameter ad B: circulus autem ad quadratum semidiametri suæ sit vt semiperipheria circuli ad eiusdem semidiametrum: erit igitur vt semiperipheria genitoris circuli ad quatuor trientes semidiametri, ita semidiameter ipsa ad quatuor trientes termini A; sed ita etiam est ad B: ergo B est quatuor trientes termini primi A: ergo centum viginti octo nouenæ primi termini A sunt trecentæ octoginta quatuor trigesimæ sextæ, vel triginta duo trientes interualli B. Vt igitur decem semidiametri circuli genitoris ad quinque semiperipherias,

vel ad decem quadrantes peripheriæ imminutos centum viginti octo nouenis primi termini A, vel triginta duobus trientibus interualli B, ita vna semidiameter circuli genitoris ad vnum peripheriæ circularis quadrantem imminutum triginta duabus trigesimis, vel sexdecim decimis quintis interualli B, qui est ipsissimus calculus Dettonuillanus.

Ista porrò tam mirabilis consonantia fecit vt minùs iam metuentes vitium calculi, illum à sua demonstratione diuulsum tandem demus in lucem, contra quàm apud nos constitutum habuimus. Quoties enim calculus adhæret suæ demonstrationis methodo, lubrica illius ratio, si fortè ab ipsa aberrare deprehenditur, non magis imputatur Autori demonstrationis, quàm ipsa Typographi errata.

AD LECTOREM.

CVm exemplar librorum de Cycloide quatuor iam ab initio Octobris miserim ad R. P. Moret in Collegio Societatis nostræ Claramontano degentem, poteris, Lector benigne, apud illum inspicere verum ego vlli fucum faciam aut fecerim hactenus, dum palam profiteor solutionem integram problematum sub initium Iulij ad Europæ Geometras missorum esse à me inuentam, verámque credi saluo tamen examine maturiore aliorum, vel etiam meo. Ausim verò iterum affirmare, quod in præfatione eorum librorum iam semel dixi, me demonstrationum veritatis longè securiorem esse quàm calculi, cuius lapsus venia dignus existimatur, quando per incogitantiam accidit, vt in præfatione quarti libri Tetragonismicorum iam olim monui. Cæterùm ex istis omnibus liquet euanescere omnia quæ contra me à nonnullis paulò feruidiùs iactantur in circulis doctiorum Geometrarum, & per Galliam editis vernaculè libellis sparguntur. Quod dicunt me in priuatis literis mihi gloriabundè arrogasse circuli quadraturam ex nullo dato pendentem, falluntur ipsi, & alios incauti fallunt: relegant literas; inuenient enim stylo admodum titubante id à me scriptum esse; sicuti & nunc quoque scribitur, quamuis non aliam eius timoris causam norim præter generalissimam omnium superiorum sæculorum hallucinationem, quæ apud me maximi ponderis est. Vale, mi Lector, & si demonstrationes ex Archimedea libra petitæ, pertinentes non ad istos solùm casus sexdecim, sed ad quotcunque alios, te quicquam iuuant, benè spera de nostrorum horum librorum editione, simúlque de altero Opusculo circa *motum acceleratum* scripto, vbi exoluo, quæ nuper pollicitus fui. Tolosæ 9. Ianu. 1659.

SCHOLIVM II.

Monendus es nunc, Lector benigne, Veredarium tunc post octiduì iter non detulisse nisi quatuor primas pagellas libri Dettonuillani qui Parisiis cudebatur: ad nos enim transmissæ statim sunt atque è prælo prodierunt, vt in nobis expectatio reliquarum mox cudendarum concitaretur. Ipse Dettonuillaeus initio Appendicis adiectâ die Ianuarij vigesima ad continuationem Historiæ suæ istud confirmat, dum narrat, Kalendis

Ianuariis se ad nos misisse initiū suæ solutionis, vt ibi inspiceremus calculum casûs à se propositi, & inde agnosceremus nostrum circa eundem casum calculi errorem. *Accepimus quidem perlubenter* illud initium *octo post diebus, nempe nono eiusdem mensis, eodémque die calculum in eo expressum contulimus cum nostro illo quem iam ante quintum Nouembris diem anni superioris 1658. per nos ipsi castigaueramus, reperimúsque non sine gaudio mirificam vtriusque concordiam, sicuti illam confestim euulgauimus, euulgatámque agnoscit Dettonuillaus in sua illa Appendice. Quis verò non miretur quod subjicit,* quāuis sexdecim casuū calculus ille à nobis tunc editus, verus deprehenderetur, illius tamen inuentionem referendam fore ad lucem quam [*eodem videlicet temporis momento*] deriuassemus ex transmissis quatuor illis pagellis; *quarum duas priores implet epistola D. de Carcaui quæ tota est in extollendo etiam supra antiquos Geometras primarios Dettonuillæo; tertiam occupat exordium responsionis Dettonuillanæ, & nudus, vt illum proposui in superiore scholio, propositi casûs calculus; quarta denique rem à principiis libræ altè repetens suspensum tenet Lectorem, iubétque reliqua quæ ad sequentes paginas pertinent expectari. Edidimus nos statim quindecim insuper aliorum casuum calculum, quorum duo qui centra grauitatis semisolidi circa axem dant, sunt omnium difficilimi; ille verò qui tradit centrum grauitatis semisolidi circa parallelam basi ductam per medium axem, non minus difficilis est atque primus ille & vnicus ad hunc vsque diem à Dettonuillæo datus, quamuis ad reliquos dandos fidem suam ibidem obligarit. Ista tamen omnia nos vno oculi ictu vidimus scilicet in primo illo Dettonuillæi calculo, non secus (si Geometriæ peritis placet) atque inspectis olim primis quatuor Conicorum Appollonij libris, residuos quatuor qui iniuriâ temporis desunt, omnes perspeximus. Quòd igitur venienti vnico calculo Parisino, actutum obuiam ieris calculorum Tolosanorum vniuersa turma, id (quamuis aliud probationis genus non suppeteret) manifestè ostendit iam antè stetisse illos in procinctu, & expeditos fuisse vt turmatim prodirent, cum primùm iuberentur. Sed numquid pari saltem iure potuisset aliquis ex eius amicis monere tunc Anonymum ne de danda solutione reliquorum casuum solicitus post hæc foret, cùm nostra omnium solutio iam postaret vulgata, & ab ea manasse dici posset, si quid postea eodem de argumento ederetur? Haud verò scio an ista de causa reliquorum casuum parem illi primo calculum, quem luculenter pollicitus fuerat, dare ex tunc noluerit. Hæc quamuis adeo perspicuè probent nostræ causæ æquitatem, voluerunt tamen nostri Amici, ne quid dubij etiam peruicasissimo cuique superesset, vt vniuersum istud de Cycloide opus legitima Iudicis auctoritate, chirographicáque eiusdem tessera tunc obsignari de more curaremus, quod & obtinuerunt decima quinta die Ianuarij præsentis anni 1659. Vnde monendus fuit Typographus vt tot circumductas manuscripto nostro lineas, & D. DE VIGUERIE, Secundarij Prætoris in Senescalliana huius vrbis Curia toties repetitum chirographarium symbolum mirari desineret, nec illa typis repræsentare curaret. Monendus quoque fuit cum ad calculum istum venit (venit autem decima quinta Septembris anni 1659. qua hos versus manuscripto inseruimus) ne in typos referret suos periodum vnam manu amplissimi & doctissimi supremæ huius Curiæ Tolosanæ Senatoris adiectam quinto Nouembris 1658. & eiusdem chirographo obsignatam, quæ testatur se hunc calculum à me sibi oblatum,*

oblatum, muniisse sui chirographi notâ tesserariâ. Tanta scilicet molis fuit literary furti accusationem propellere: Amicis tamen obtemperandum tunc fuit.

SCHOLIVM III.

omitti hoc loco non debent duæ Anonymi epistolæ ad Geometras Europæ Latinè scriptæ; ex illis enim nonnulla clarè intelligentur, quæ historiæ istius interest vt non ignorentur; eà verò quæ sint, monebimus post exscriptas literas.

PRIMÆ LITERÆ ANONYMI.

CVm ab aliquot mensibus quædam circa Cycloidẽ eiusque centra grauitatis meditaremur, in propositiones satis arduas ac difficiles, vt nobis visum est, incidimus, quarum solutionem à præstantissimis toto orbe Geometris supplices postulamus, proposito ipsis præmio, non mercedis gratiâ, quod absit, sed in obsequij nostri, aut potius meriti eorum qui hæc inuenerint, publicum argumentum.

Dato puncto quolibet z (*Fig.* 1.) in quacunque Cycloide a b c d, ex quo ducta sit z y basi a d parallela, quæ axem c f secet in puncto y. Quærimus dimensionem spatij c z y, eiusdémque centrum grauitatis: Solida genita ex circumuolutione dicti spatij c z y, tam circa z y, quam circa c y: & horum solidorum centra grauitatis. Quod si eadem solida plano per axem ducto secentur, & sic fiant vtrinque duo solida, duo scilicet ex solido circa basim z y, & duo ex solido circa axem c y genito: cuiusque horum solidorum quærimus etiam centra grauitatis.

Quia verò quæsitorum demonstratio forsan adeo prolixa euadet, vt vix intra præstitutum tempus exequi satis commodè possit, genio & otio doctissimorum Geometrarum consulentes, ab his tantùm postulamus, vt demonstrent vel more Antiquorum, vel certè per doctrinam Indiuisibilium (hanc enim demonstrandi viam amplectimur) omnia quæ quæsita sunt, data esse. Ita vt facilè ex demonstratis, quælibet puncta quæsita ex datis hypothesibus, inueniri possint.

Et vt apertiùs mentem meam explicem, nec subsit aliquid ambiguum, exemplo rem illustro. Proponatur (*Fig.* 39.) verbi gratiâ parabola g f B cuius axis g f, basis g B, tangens f E; parallela axi B E, inueniendum centrum grauitatis trilinei E B u f. Satisfactum esse problemati censerem, si demonstretur, datum esse centrum grauitatis parabolæ g f B, nec non & centrum grauitatis rectanguli B E f g, & proportionem huius rectanguli cum parabolâ B u f g, ideóque & datum esse centrum grauitatis quæsitum trilinei B E f u. Nam etsi præcisè punctum in quo reperitur centrum grauitatis non exhibeatur, demonstratum tamen est datum esse, cùm ea ex quibus inuenitur data sint; résque eò deducta erit, vt nihil aliud supersit præter calculum, in quo nec vis ingenij, nec peritia artificis requiruntur; ideóque non is à nobis calculus exigitur, cur enim in iis immoraremur? Sed tantummodo petimus demonstrari, res quæ proponuntur datas esse.

Verùm doctissimi Geometræ prorsus necessarium iudicabunt, & ab his postulamus duarum propositionum vel duorum casuum integram constructionem, seu integrum calculum. Primus casus est cum punctum z constituitur in a; secundus cum idem punctum z datur in b, in quod transit parallela g b ducta à puncto g centro circuli genitoris Cycloidis.

Quod si aliquis error calculi in his duobus casibus subrepserit, eum libenter condonamus, & veniam quam ipsi peteremus facilè promerebuntur.

Quisquis superiùs proposita, intra primam diem mensis Octobris anni 1658. soluerit & demonstrauerit magnus erit nobis Apollo. Et primus quidem consequetur valorem quadraginta duplorum aureorum hispanicorum, quos ipsi Hispani *doblones* & Galli *pistolles* vocant: vel certè si mauult ipsos duplos aureos. Secundus verò viginti eiusmodi duplos aureos. Si vnus tantum soluerit, sexaginta solus habebit. Et quia seriò rem agimus dictos sexaginta duplos aureos Illustrissimo D. de Carcaui Regio Consiliario Parisiis commoranti apud celsissimum dominum Ducem de Liencourt deponi curauimus, qui eos exsoluet statim ac demonstrationes quæ ad ipsum mittentur, veræ ac Geometricæ, à viris ab ipso ad id deputatis iudicabuntur. Et cùm Illustrissimum Consiliarum, iam à multis annis virum probum & Matheseos amantissimum agnouerimus, audacter pollicemur, rem sincerè & absque fallaciâ exequendam.

Quod si his circiter tribus elapsis mensibus nullus inueniatur qui quæsita nostra soluerit, non denegabimus quæ ipsi inuenimus; nec aliis inuidebimus vnde maiora iam inuentis nanciscantur; ex quibus forsan apud Posteros gratiam inibimus. *Sequitur descriptio Torricelliana cycloidis, vt à nobis descripta fuit initio primi libri, saltem quantum ad rem attinet.*

ALTERÆ EIVSDEM ANONYMI LITERÆ.

CVm circa ea quæ de Cycloide proposuimus duo orta esse dubia nobis Illustrissimus D. D. de Carcaui significauerit, his statim occurrendum esse duximus, & ita occurrimus.

Prius inde oritur, quod in proponendis nostris de Cycloide problematis hac voce vsi fuerimus, in *quacunque Cycloide*, cùm tamen vnius tantùm speciei Cycloidis definitionem attulerimus. Verùm nihil aliud intelleximus præter solam illam simplicem naturalem ac primariam Cycloidem, cuius ex Torricellio descriptionem dedimus; cùm enim quæ de illa resoluuntur facilè sit ad omnes alias species protrahere, qui nostra problemata de hac sola soluerit, nobis omninò satisfecerit.

Posterius in eo consistit quod à nobis non sit præcisè positum an supponamus datam esse rationem basis Cycloidis a f, cum sua altitudine, seu cum diametro circuli genitoris f c. Sed ipsam datam esse rationem pro concesso vsurpandum arbitrabamur, & vt omnino æquum est, datam esse supponimus.

Nihil ergo iam supereſt obſcuritatis. Vnum tamen reſtare videtur vt doctiſſimos Geometras ad propoſitiones noſtras commodius & libentius inueſtigandas inuitemus: ſcilicet ea omnia remouere quæ à perſpicacitate ingenij, quam ſolam magni facimus, & explorare ac coronare inſtituimus, ſunt aliena, qualia ſunt tam calculus integer multorum caſuum quem poſtulabamus, quàm abſoluta ſolutionum conſcriptio, cùm ea non à viribus ingenij, ſed ab aliis circumſtantiis pendeant. Hoc itaque tantummodo iam inſtituimus, vt ſola problematum difficultas remaneat ſuperanda. Nempe.

Qui publico inſtrumento intra præſtitutum tempus, Illuſtriſſimo domino de Carcauy ſignificauerit, eorum quæ quæſita ſunt demonſtrationem penes ſe habere: & aut ipſammet demonſtrationem quantumuis compendioſam ad ipſum miſerit; aut ſi chartæ mandare nondum per otium licuerit, ſaltem ad confirmandam ſuæ aſſertionis veritatem, casûs quem mox deſignabimus calculum dederit, ſéque paratum eſſe profeſſus fuerit omnia omnino demonſtrare ad ipſius D. de Carcaui nutum, hunc nobis ſatisfeciſſe declaramus, & conſentimus, primum qui hæc fecerit primo, ſecundum ſecundo præmio donandum, ſi ſua ſolutio ab ipſo D. de Carcaui viriſque ad id ſecum adhibitis, cum ipſi viſum fuerit, exhibita, Geometrica ac vera iudicetur, ſaluo ſemper erroris calculo.

Caſus autem cuius ſolius ſufficit calculus ille eſt. Si ſemicyclois a c f circa baſim a f conuertatur, & ſolidum inde genitum ſecetur plano per ipſam a f (quæ iam huius ſolidi axis eſt) ducto, quod quidem ſolidum diuidet in duo ſemiſolida paria. Alterutrius horum ſemiſolidorum centrum grauitatis aſſignari poſtulamus. *Hactenus Anonymi literæ.*

Dies quo binæ iſtæ literæ datæ fuerint nullus annotatus extat; in confeſſo tamen eſt primas miſſas fuiſſe ſub initium Iunij; quod patet ex trium circiter menſium ſpatio ad inueniendam, & in manus Domini de Carcaui ante Kalendas Octobris tradendam ſolutionem, conceſſo ſub finem illarum. Alteræ autem literæ redditæ nobis fuerunt exeunte Iulio, & iam priuſquam redderentur mandaueramus Typographo primum horum librorum, illéque ſuam in eo operam abſoluerat; quapropter mirùm eſſe non debet quod cùm Anonymus centra grauitatis abſolutè polliceri videretur in primis literis, nos librum illum ediderimus, vt ad id quod penes ſe habere non obſcurè innuebat, adiungeremus vnde quadraturam circuli abſolueret.

Præterea ex primis illis literis apertè conſtat ſingula problemata fuiſſe tractanda in duobus illis caſibus, quorum calculum ineunte hoc anno 1659. edidimus; quod aduertimus, ne quis putet hos caſus à nobis eſſe aſſumptos prout animus, & computandi fœlicior exitus tulit. In iiſdem literis Doctiſſimos Geometras iudicaturos aſſerit neceſſariũ fuiſſe vt exigeretur multiplex ille calculus, quem tamen in ſecundis exigere deſtitit vt labori inquirentis Geometræ parceret, præcipuè cum ad inquirendum

paucula hebdomadæ concederentur. Cur autem ita iudicaturos fore Geometras dixerit, cùm causam reticuerit, illam putauit esse obuiam iis præsertim qui in Geometricis diu multúmque versati sunt. Prima huius necessitatis causa hæc mihi quidem videtur esse quod per illum calculum eduntur sexdecim propositiones in re admodum ardua, quibus rotundè & more Archimedeo respondetur, vt ipsarum propositionum contemplatio mirum quantum rapiat Lectorem eruditum, illique stimulos addat ad lustrandum viam, qua eò peruentum fuit. Secunda, quia vnius Autoris calculus ita rotundus facilè potest comparari cum alterius calculo, & ita statim iudicari de eorum concordia vel discordia. Certè nos si Dettonuillæus dedisset calculos illos saltem de centris semisolidi superioris circa basim, & duorum semisolidorum circa axem, perlubenter contulissemus calculos vtriusque abaci, & vel de concordia gauisi fuissemus, vel emendassemus in alterutro discordiæ causam. Tertia, quia calculi illius methodus plurimum lucis affert ad intelligendas ipsas demonstrationes, quibus nititur; illæ verò etiam Archimedeæ, ita aliquando non imperitis imperuiæ sunt, vt lux ista quæ ex praxi soluti problematis oritur, maximè sit omnibus expetenda. Quarta, quia optandum est vt omnes qui inuentioni Geometricæ vacant, exerceant se in isto calculandi genere; ita enim sæpe deprehendunt ipsi sua παροράματα, quibus ij tantùm obnoxij non sunt, qui nihil ardui quærunt. Ipse Archimedes initio librorum de spiralibus moram dilatæ editionis purgat illo errandi timore, cui occurrendum fuerit suo & amicorum examine diuturno. *Ne mireris* (alloquitur suum Dositheum) *si longi temporis interuallo has demonstrationes edimus, hoc enim ea de causa factum est, quod prius cum iis communicare statueramus, qui in artium studiis & disciplinis versati sunt: & in his inuestigandis omnem suam operam posuerunt.* Cæterùm calculus ille ad agnoscendum errorem latitantem miris modis conferre norunt omnes quibus ille familiaris est; diu enim versatur præoculis soluti problematis forma, vt ita numeris accommodetur; quæ autem tamdiu circumspicitur, vix eum teget, si quem habuerit næuum. Adde sæpius numerorum ipsorum repugnantiâ statim indicari latêre ibi hostē mentis, nempe errorem. Quinta deniq; quia dum ita propius inspicitur methodus illa qua soluitur aliquod problema, vel ipsa perpolitur, vel fit generalior, vel viam etiam pandit ad alia inuenienda aliquando longiùs posita, sed quodammodo cognata. Porrò calculi nomine quid intelligam, meliùs explicare non possum quàm exhibendo duas propositiones postremas duorum proximè antecedentium librorum, vbi problematum calculum tracto. Adhibentur quidem numeri, sed ita vt res ipsa verè attingatur; nam aliquando numeri aduocantur, vt in dimensione circuli Archimedea, non vt res quæsita teneatur, sed vt quàm proximè: at verò noster iste calculus is est, qui non accedit tantùm ad id quod inquirit, sed expolitam commodámque tenendi & propiùs inspiciendi ansam offert.

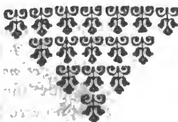
Ad hæc, quod Anonymus veniam ipse vltrò offert errori calculi, quando is non proficiſcitur ex labe demonſtrationis, non modò perurbanum ſe probat, ſed perdoctum in hac arte; neque enim vllus eſt, præter ἀγεωμετρήτους, qui non flocci faciat ſimilia peccata. Nos itaque, ſi quid huius generis latet in tam multiplici & intricato numerorum labyrinto, ignoſci nobis enixè petimus: neque venditamus iſta vt ab omni eiuſmodi vitio pura, ſed vt accuratè olim examinata, & etiam non ſemel caſtigata antè diem quintum Nouembris anni ſuperioris 1658. Ab eo verò tempore aliis intenti curis toties computatos caſus reliquimus vt iacent editi; nec enim quicquam immutauimus præter apertum in problematis ſexti ſecundo calculo, Typographi erratum, de quo pòſt agimus in propoſitione duodecima ſexti libri.

Denique idem Anonymus ſapienter admodum cauet pauculos illos nummulos non offerri à ſe inſtar eſcæ pecuniariæ, qua Geometræ trahantur ad laborem mercenariorum inſtar. Ego quidem ſtatim atque legi huius pecuniolæ ſpem fieri inuentori, ſcripſi ad D. de Carcaui qui pro Anonymo totum iſtud negotium gerebat, à meæ vitæ inſtituto alieniſſimum eſſe auri vel argenti comparandi causâ aliquid aggredi; vacaturum itaque me perquiſitioni problematum, hac tamen præmij pecuniarij conditione procul reiectâ. Quapropter ſi ante initium octobris ſcripſi ad eundem D. de Carcaui à me repertam eſſe ſolutionem omnium problematum, ſed nondum omninò in ſchedas traductam, miſíque calculum caſûs propoſiti ſed (vt ſæpius fit in iis quæ, antequam exſcribantur, in ſola mente contemplamur, ſi multiplicia, longa, & implexa inter ſe ſint) vitioſum, vt ſtatim agnoui, monuique per literas Dominum de Carcauy; id eò tantùm feci, vt conſtaret Anonymo quantum detuliſſem ipſius exhortatoriis literis, & nonnullam ei injicerem ſpem inuentæ ſolutionis problematum, quam efflictim expetere ſe à Geometris ſignificauerat in ſuis primis literis. Quod autem quidam dixêre Anonymum propoſuiſſe quædam iſtorum problematum vt facilia, quædam verò vt difficilia, refellitur primo iſtarum literarum aſpectu, vbi ſine vllo diſcrimine *ſolutionem propoſitarum quæſtionum à præſtantiſſimis toto orbe Geometris ſupplex poſtulat*, eaſque *ſatis arduas ac difficiles ſibi viſas eſſe* pronuntiat. Profectò iniurius fuiſſet *præſtantiſſimis* illis viris, ſi illos habuiſſet vt huius artis Nouitios, quibus facilia proponi ſolent; eorúmque otio non niſi abuti velle viſus fuiſſet.

SCHOLIVM IV.

Anonymus in Hiſtoriâ Cycloideos Gallicâ decimo die menſis Octobris 1658. ita ſcribit. Calculi noſtri viris clariſſimis & doctiſſimis priuatim communicati editionem nondum mandare Typographo è re fore exiſtimaui, vt ſi quis, dum à Domino de Carcaui, & aliis iudicibus examen legitimè inſtituetur, reperiatur ſoluiſſe illa problemata, publicè enuntiem eum inueniſſe ſolutionem illorum, antequam meam euulgarem: ſin autem nullus reperiatur; quod nemo inuenerit, id emittere in lucem publicam non verebor,

adjiciámque prioribus insuper problemata sequentia, quæ de natura cycloideos restabant, & quorum aliqua non minùs mihi difficilia videntur 1. Puncto z (*Fig*. 1.) dato vtcunque in perimetro Cycloideos, inuenire non solùm dimensionem curuæ z c, terminatæ puncto z & vertice c (quod à Domino Vvren iam dissolutum extat) sed præterea centrum grauitatis portionis istius ex perimetro abscissæ. 2. Inuenire dimensionē superficiei descriptę à portione illa rotata tam circa basim, (quod quidem facile est) quàm circa axem: siue illa delatio sit integræ reuolutionis, aut dimidiatæ, aut quadrantalis, aut alterius cuiuslibet designationis. 3. Inuenire grauitatis centrùm istius superficiei &c. quod est omnium difficillimum, & propriè vnicum quod propono. In quibus omnibus problematis pono quadraturam circuli vt datam, sicubi eam dari fuerit necessarium. En quæ supererant inquirenda de natura huius perimetri curuæ, & quorum solutionem secretò apud me reseruaturus sum vsque ad diem postremum mensis Decembris labentis anni 1658. Vt si quis interea temporis repererit veram eorum solutionem, non careat honore suæ inuentioni debito.
Hæc Anonymus Gallicâ linguâ in cartaceo quaternione ex Typographico prælo ad nos tunc statim misso. Quod de dilatæ primorum problematum editionis causa hîc narrat, facessiuit nobis aliquando negotium, cùm per ipsos Anonymi familiarissimos sciremus iudices examinis *illius causâ cogendos non fore; sed hîc assensum cohibemus omnem, ne vel ipsi Anonymo fidem denegemus, vel ipsius familiarium testatissimis literis. Ista verò posteriora problemata erunt potissimum libri consequentis argumentum, vbi ostendemus ex nostra methodo obtineri solutionem posteriorum istorum problematum, etiam illius in quo ille ponit difficultatis maximum; calculumque, quem ille etsi (vt mihi quidem videtur) perdifficilem, omisit dare, exhibebimus eodem prorsus pacto, quo in propositione tertij & quarti libri vltima. Ex eo autem quod calculum illum prætermisit, factum est vt ego de tota ipsius methodo indicare pro ingenioli mei viribus nequiuerim, quod nisi fallor, potuissem comparando vtrumque inter se. Neque existimes, Erudite Lector, istum calculum esse de numero vulgarium & à* viribus ingenij, *vt dixit Anonymus*, non pendentium, *qui Tyroni cuilibet demandari queunt; intricatissimus quippe est, & totum Geometram, atque sæpe ipsius demonstrationis Parentem desiderat.*





DE CYCLOIDE
LIBER QVINTVS.

In quo præcipuè demonstratur methodus generalis pro cuiuslibet lineæ curuæ in rectam æqualem commutatione per spiraceas Archimedeis spiralibus respondentes, & pro eiusdem curuæ centro grauitatis: Item pro dimensione superficiei periphericæ descriptæ motu eiusdem curuæ, & pro grauitatis centro illiusmet superficiei: Descendendo verò ad Cycloideos perimetrum curuam, soluuntur problemata secundò proposita, eorúmque calculus traditur.

PRÆFATIO.

Methodum generalem dum in fronte libri huius præfixam legis, noli existimare, Lector erudite, in prioribus libris illam deesse; perinde enim quadantenus adest, vt Tu ipse ad rem attendens iam, vt puto, perspexisti. Sæpe generalis aliquid præstandi methodus frustrà exigitur, si in vno casu particulari eius executio præstetur. Quis enim generalem conficiendæ ex quercu arcæ methodum postulet à Fabro lignario, posteáquam ab illo didicit qua arte ex abiete compingi debeat? *vniuersale enim à singularibus præcindere* innatum esse menti humanæ Logicorum Scholæ inculcant. Porrò methodus aliquid exequendi, quadrandæ exempli causa figuræ cuiuslibet, potest duobus modis dici generalis; primò quidem vt nullo alio dato, per solius methodi præ-

cepta, quadratura abſolutè prodeat: alter verò modus ſubaudit has voculas, *nonnullis datis*, quæ quidem in ſingulis figuris aliunde quàm ex ipſa methodo obtineri debent. Illo primo modo generalem methodum tradere quadrandæ cuiuſlibet figuræ diuinum eſſe agnoſco potius quàm humanum; poſteriore autem modo id non ſuperat vires ingenij humani. Hæ itaque de Cycloide methodi generales non abſoluunt, nec ad exitum vltimum generaliter perducunt problema; etenim ſi à me quæras vt per methodum generalem meam problemata omnia ſoluta in parua Cycloide, ſoluam pariter in figura cuius ordinatim ad axem applicatæ ſint æquales arcui genitricis ellipſeos, reſpondebo non ita eſſe illam generalem quin aliqua de hac figurâ quæ ex ellipſi prodit, dari priùs debeant; quæ prorſus me latent, nec ab vllo, quem legerim, ſcriptore mihi monſtrantur: imprimis verò modus quadrandi ipſam figuram ſuperiorem, prout vt in ſecundi libri nona pro cycloide fecimus, & iam antea in primo libro feceramus. Adeo quadratura huius partis quæ primo problematum aſpectu occurrit, eſt difficilis, quantumuis nonnemo eam facilem videri in cycloide voluerit, poſtea quam à nobis prodiit in lucem: ſed quid non eſt facile aditu cùm ſemel ad eam via patet explanata? Hæc præfari debui ne ſpecioſo nomine *methodi generalis* vllus decipiatur, aut vanæ aliquid laudis me venari putet. Methodi igitur omnes noſtræ non ſunt primo modo generales; ſed neque ſemper monendus eſt Lector eas eſſe ſecundo illo modo generales. Porrò quæ ſunt generales iſto quodam modo, abſolutè generaliores ſæpe euadunt inuentione cuiuſdã quod in illo priore modo non aderat. Duplex huius rei exemplum quaſi domeſticum mihi nunc occurrit. Demonſtrauit Archimedes trianguli rectilinei quadratricem eſſe æqualem ſpatio illi quod triangulo eidem æquiponderat, indéque elicuit eximia & incomparabili laude quadraturam parabolæ antea irrepertam: nos verò illud ad omnes quadratrices quarumcunque figurarum extendimus in ſeptima propoſitione ſecundi libri tetragoniſmicorum, ratione cuius non inutilis vt ſperamus, acceſſio fiet iſti methodo quadrandi figuras per libram, quam in eum finem adhibere poſt Archimedem deſierant Geometræ quos quidem nouimus, ſed nos illum vſum reſtaurare & ampliorem facere conati ſumus. Alterum exemplum eſto methodus qua ſe ipſum ſuperans Archimedes demonſtrauit per ſpirales lineas, peripheriam circuli eſſe æqualem certæ cuidam rectæ; nos autem hoc in libro generaliſſimam reddimus eam methodum,

pro

pro quibuſcunque lineis curuis. Vtrobique vt extenſio illa fieret, inuenienda fuerunt nonnulla; nam ſi nulla opus fuiſſet noua demonſtratione, id non fuiſſet propoſitionem extendere propriè; ſed monſtrare quouſque ipſa per ſe pertingeret; inuenienda autem fuerunt, vt quæ neceſſaria erant ad concludendum generaliter & non tantùm particulatim, conſtituerentur in aliquo, quod eſſet omnibus commune, & minimè proprium triangulo vel circuli peripheriæ.

Cæterùm de ſpiracea iſta agens mihi præſcriptis iam à meipſo cancellis me cohibebo; ſpiralis & parabolæ miram concordiam quam primus excogitauit & acutè demonſtrauit P. Gregorius à ſancto Vincentio ſub finem libri ſexti, huc transferre non eſt animus, cum apud illum luculenter demonſtrata extet hoc titulo *ſpiralis & parabolæ ſymbolizatio.* Nihil etiam dicam de methodo quam ſubtiliter iniit D. Iſmaël Bullialdus in aureo de lineis ſpiralibus libello, vbi Archimedis demonſtrationes aliis nouis ſtabilit, vt nonnullorum ſcrupulos euellat, qui autoritate Vietæ ducti non ita fidebant hac in re Archimedeis rationibus. Scribam igitur quæ ad rem præſentem illis adjici poſſe iudicaui, & hæc quidem non iniucunda fore ſpero Lectori, præcipuè cùm vt rectè annotauit idem Bullialdus *linearum ſpiralium contemplatio tam ſublimis ac ardua antiquis Geometris viſa ſit, vt Archimedes, qui earum affectiones & proprietates ingenio propè diuino, ac ſubtilitate incomparabili primus demonſtrauit, in ſui admirationem cùm æquales, tum poſteros conuerterit; laudum titulos nullo obliuionis ſitu inducendos meruerit; earúmque inuentori Cononi gloriam palmámque præripuerit.* Accuſatio illa Archimedis expurgata nunc à Viro illo doctiſſimo reuocat mihi in mentem aliam accuſationem factam à Scaligero aduerſus eiuſdem Archimedis æquationem circuli cum rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro eiuſdem circuli, & ſub recta æquante dimidium eiuſdem peripheriæ. Eandem enim æquationem inuenit Gregorius à S. Vincentio per aliam viam l. 3. prop. 89. vt conſtet quam periculoſum ſit quem tota retro antiquitas alicuius ſcientiæ Ducem ſecuta & venerata fuerit, eum ſpecioſo quantumuis nomine impugnare. Vnde Meibonius qui in Euclideis etiam Elementis errata demonſtranda non ita pridem ſuſcepit, quod aliud penſi inopinati pretium ſperare debeat, non video. Longiùs abierim ſi illos his adiunxero qui omnia nunc mouent *ad impugnandum Ariſtoteliſmum, adhortandúmque homines ad aliquam veriſimiliorem, ſanioremque Philoſophiam*; ita enim obloquuntur contra eam quam (vt ipſi norunt)

generales Academiæ propugnant hodie vt suam, vbi fidei Diuinæ contraria non fuerit.

PROPOSITIO PRIMA.

EX duabus in præsenti schemate designatis figuris prima a b c esto triangulum (*Fig. 49.*) comprehensum sub rectis a b, b c, a c; esto parabola a m e b quam tangat recta a c, & cuius axis æquidistet lateri b c : latus b c diuisum sit in quotcunque partes æquales, b i, i g, g h, h c, & ex puncto a eductæ sint rectæ a i, a g, a h occurrentes limbo a e b in m, e, n; per quæ puncta educantur q m, d e, l n æquidistantes lateri b c, & occurrentes rectis a c, a h, a g, a i in t, o, f, r, p, n. Considerentur figuræ quadrilateræ l n i b, r e n p, o m f e, & trilatera a m t; quæ singulæ per limbum parabolæ diuiduntur in duas partes quarum vna est interior figuræ a m e b d, altera exterior. Esto præterea figura secunda a b g c cuius latus a b æquet, maioris perspicuitatis causâ, rectam a b primæ figuræ rectilineæ; linea autem b g, sit quælibet curua æqualis rectæ b c; à puncto c ducta sit recta c a, & curua b g c intelligatur diuisa in totidem partes b i, i g, g h, h c in quot diuisa fuit recta b c; istæ autem partes b i, i g, g h, h c tales sint vt ductis rectis i a, g a, h a, æqualia sint spatia b a i, i a g, g a h, h a c. Recta a b intelligatur diuisa in partes a q, q d, d l, l b æquales partibus a q, q d, d l, l b. Per l, d, q intelligantur descriptæ curuæ l n p, d r e s, q m t similes similiterque positæ curuis b i g, b i g h, b h c. Intelligatur curua a u m e n b incedens per illa omnia puncta, in quotcunque partes diuisæ concipiantur lineæ. Hæc linea vocetur *spiracea* quando b g c non est peripheria circuli, eo pacto quo *cylindraceum* dixi frequentiùs in Elementis solidum prismatoides cuius basis non est circulus. Patet figuris primæ figuræ l n i b, r e p n, o m f e, a m t respondere totidem iisdem literis designatas, & figuras istas diuidi quoque per limbum a e b in duas portiones vnam internam, aliam externam.

Ostendendum est principia Archimedis pro spirali adhibita, probare figuram a e n b d comprehensam sub recta a b necnon sub curuâ a e b spiraceâ, esse trientem totius b a c g, idque verum quoque esse in triangulo a b c respectu segmenti parabolici a u e b.

In prima figura parabolam a m b esse trientem figuræ a b c demonstrauit Archimedes per libræ principia in libri de quadratura parabolæ, & nos in septima secundi illam propositionem extendimus ad alias figuras in quibus linea a f c est quælibet curua, vt in præfatione monuimus.

Quando curua b g c eſt peripheria circuli integra, oſtendit in vigeſima quarta de ſpiralibus figuram a m e b eſſe trientem figuræ a b g c, vtitur autem ad id oſtendendum principio demonſtrato in decima. *Quadrata omnia linearum æqualium maximæ, quadratorum quidem linearum ſe ſe æqualiter excedentium minora eſſe quam tripla; quoniam aſſumptis quibuſdam tripla ſunt: reliquorum autem dempto maximæ quadrato maiora, quàm tripla; quoniam aſſumpta minora ſunt quàm tripla quadrati maximæ. Et propterea ſi ſimiles figuræ deſcribantur ab omnibus; & ab iis, quæ ſe ſe æqualiter excedunt; & ab iis, quæ ſunt æquales maximæ: quæ ab iis deſcribuntur, quæ ſunt æquales maximæ, earum quidem, quæ ab iis, quæ ſe æqualiter excedunt, minores erunt quàm triplæ; reliquarum verò, dempta ea, quæ à maxima deſcribitur, maiores, quàm triplæ: ſimiles namque figuræ eandem inter ſe ſe, quam quadrata proportionem habent.* Cæterùm Archimedes in illa propoſitione vigeſima quarta aſſumit arcum b g c eſſe æqualem toti peripheriæ circulari, ideóque ex eo gigni ſpiralem primæ reuolutionis: ſed ſiue ſit integra peripheria ſiue quam volueris habeat proportionem ad illam integram, eadem eſt vis demonſtrationis.

Vnum faceſſere poſſet negotium, quòd quando linea b g c non eſt circularis, figuræ a l n, a n p non ſint ſimiles; ſed id nihil obſtat quo minus demonſtratio ſuum robur obtineat; quia ſufficit ad eius effectum vt figuræ a l n, a n p ſint æquales, & vt figuræ a i g, a n p, a r e &c. ſint ſimiles; id autem accidit quæcunque ſit curua b g c: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Demonſtrationis progreſſus cùm oſtendat theorema eſſe verum quæcunque ſit curua b g c; patet curuam b g c poſſe eſſe ſpiralem, vel ſpiraceam, ſectionem conicam quamcunque, & vno verbo lineam quamcunque ſiue anguloſa ſit, ſiue ſit συνέχειαν ἔχουσα; etiam ſi illi anguli ſint rectilinei, vel curuilinei, vel quomodocunque mixti. Item ſiue curuæ conuexa ſint ad partes a, ſiue ſint ad oppoſitas.

COROLLARIVM II.

Quando curua b g c eſt arcus circuli, & comparatur cum figura in qua b c ſit recta linea, analogiam earum omnimodam primus deprehendit & demonſtrauit Gregorius à S. Vincentio ſupra laudatus; ea verò analogia vel *ſymbolizatio* reperitur quæcunque linea ſit b g c, in vtráque figura. Quia verò quando b c eſt recta linea, proportiones omnes facillimè determinantur ex quadraturâ parabolæ & aliis circa hanc ſectionem conicam inuentis; vt in cæteris ſimilia determinentur, peti debent ex primâ figura in qua limbus a m e b eſt parabolicus.

COROLLARIVM III.

In figura prima vbi, limbus a m b eſt parabola, ſi compleatur parallelogrammum a b c x, & iungatur diameter b x, ipſa b x tangit parabolam a e b, ſicuti & a c, vt ex trigeſima tertia primi conicorum facilè colligitur: & ita recta a x intercepta inter tangentem b x, & inter a b æqualis

est rectæ b c. Similis proprietas demonstrata est ab Archimede quandò in secundâ figurâ linea b g c est arcus circuli. Sed aduertendum est lineam b c in prima figura vicem gerere duarum quæ in secunda distinguntur, nempe b g c & b M, quarum b g c est curua, b M verò est recta tangens curuam b g c in b. At in primo schemate cùm linea b g c sit recta non potest tangi à recta b M, sed debent necessariò sibi mutuò congruere, dum ad tactum conueniunt. Nos autem postea demonstrabimus in vniuersum si curuam b g c tangat recta b M, & per a ducatur a x æquidistans tangenti b M; rectam quæ in b tangat spiraceam a e b, occurrere ita rectæ a x in puncto x, vt ipsa a x sit æqualis curuæ b g c. Quæ quidem proprietas in spirali demonstrata ab Archimede summæ admirationi fuit omnibus Geometris quotquot vnquam extitere huius theorematis contemplatores. Quod autem noster Gregorius à S. Vincentio dubitabundus innuit, Archimedem deriuasse hanc spiralis proprietatem à parabolica figura in qua linea b c est recta, id probabile non est, cùm Archimedes initio libri de spiralibus ad Dositheum candidè scribat ista de spiralibus theoremata fuisse à Conone inuenta nullis eorum additis demonstrationibus, quas proinde Archimedes perquisierit, & tandem inuenerit, ipsique Cononi apud Posteros omnem fermè gloriam horum theorematum præripuerit. Si itaque vllus foret accusandus, is esset Conon primus spiralis lineæ & eius proprietatum inuentor.

COROLLARIVM IV.

Ista communicatio proprietatum non sistit in planis, sed ad solida etiam pertingit: quapropter sicuti si ex puncto a excitetur perpendicularis a D ad a b c primæ figuræ planum, parallelepipedum altitudinis a D, baseos a b g c est triplum cylindracei eiusdem altitudinis baseos a e b d, ita quæcunque sit linea b c in secundâ figurâ, cylindraceum eiusdem altitudinis a D, baseos a b g c, est triplum cylindracei baseos a e b d. Quod ad alia solida transferri patebit ex sequenti propositione.

PROPOSITIO II.

INtelligatur iisdem manentibus (*Fig. 49.*) ex puncto D educi recta linea quæ immoto puncto D describat superficiem incedendo per lineam b g c, ac proinde describens superficiem quæ si linea b g c sit peripheria circuli, erit *conica*; si alia curua erit *homæoconica*, ita enim appellauimus eam in corollario secundo duodecimæ quarti libri tetragonismicorum; si autem linea b c sit recta, erit *cunealis* superficies, solidum enim abscissum duobus planis se se secantibus ex cylindraceo aliquo, vocauimus in vigesima prima eiusdem quarti libri *cuneatum*. Intelligatur præterea per limbum a e b incedere linea parallela rectæ a D & describere superficiem *cylindraceam* cuius basis sit figura a e b q.

Ostendendum est solidum quod est commune isti cylindraceo baseos a e b q altitudinis a D; & homœoconico baseos a b g c, verticis D, vi analogiæ coni euoluti & expansi esse sextantem cylindracei altitudinis a D, baseos a b g c.

Istud ita ostenditur in prima figura, vbi linea b c est recta. Ex recta a b abscindatur b E ipsi a b æqualis, sitque a b diuisa bifariam in d: erit ergo d e diameter segmenti parabolici a e b, & eius grauitatis centrum erit in recta d e: ergo si libra a E suspendatur ex b perpendiculo b c, brachio b E, æquiponderans segmento a e b d erit æquale dimidio ipsius, cùm vt b E brachium ad b d longitudinem, ita sit suspensum a e b d ad æquiponderans. Sed suspensum est triens figuræ a c g b: ergo dimidium illius, nempe æquiponderans, est sextans figuræ a c g b. Præterea ex vigesima prima quarti tetragonismicorum patet cuneatum solidum abscissum ex cylindraceo baseos a e b d esse æquale cylindraceo altitudinis a D, baseos æquantis quadratarium spatium, siue æquiponderans iam inuentum: ergo in prima figura solidum illud commune homœoconicodescripto per rectam ex D manente incedentem per c g b, & cylindraceo baseos a e b d est æquale cylindraceo altitudinis a D, baseos æquantis sextantem figuræ a b g c. Igitur per analogiam id quoque verum est quæcunque sit linea b g c; quod erat demonstrandum. Hanc porrò analogiam in hoc esse veram si quis sibi demonstrari postulet, suo quidem iure vtetur; neque enim in Geometricis quicquam nisi per vim & à coacto conceditur.

COROLLARIVM.

Quando linea b g c est peripheria integra circuli semidiametro a b descripta, & punctum c congruit puncto b, patet lineam a e b esse spiralem, & superficiem descriptam motu rectæ ex vertice D per limbum b g c esse conicam: igitur in isto casu solidum commune cylindraceo baseos a e b q, & cono, est sexta pars cylindri altitudinis a D, cuius basis sit circulus peripheriæ b g c; & si recta a D ponatur æqualis rectæ a b est octaua pars sphæræ cuius circulus maximus sit idem qui basis coni, semidiametro a b descriptus. Nam hemisphærium incumbens illi circulo est bes cylindri altitudinis a D habentis pro basi eundem circulum, vt ex Archimedeis demonstratis patet; ergo eiusmodi cylindrus continet tres semisses eiusmodi hemisphærij, & tres quadrantes totius sphæræ: ergo cùm sextans trium quadrantium vel sex octauarum, sit octaua pars, liquet solidum commune cylindraceo cuius basis sit spiralis primæ reuolutionis, altitudo a D æqualis semidiametro a b, & cono verticis D, habenti pro basi circulum semidiametri a b, esse octauam partem sphæræ cuius circulus maximus semidiametro a b describatur. Istud problema nobis postea quam edidimus viginti illas propositiones quæ primum huius Operis librum constituunt, proposuit soluendum D. Pascalius veluti suum; ipsumque idem pro suo post aliquot menses in lucem dedit Dettonuil-

læus in epiſtola ad D. de Sluze; quod facit vt diſcrimen inter Dettonuillæum & Paſchalium ecquod ſit non ſatis videam. Porrò ſi altitudo a D æquet ſemidiametrum a b, & A E, E D ſint æquales, Dettonuillæus aſſerit ſolidum iſtud, quod cono & cylindraceo commune eſt, *eſſe ad cylindrum baſeos eiuſdem cum cono, & altitudinis a E, vt omnia ſimul quadrata b l ducta in l a ſunt ad cubum cuius latus ſit quadratum a E; id eſt, ſicut margaritum tertij ordinis ad rectangulum comprehenſum ſub axe & ſub ordinatim applicata ad medium, quam rationem D. de Sluze dedit non in margarito ſolùm tertij ordinis, ſed etiam in aliis reliquorum ordinum quibus conſtanter competit ratio numeri ad numerum.* Ego cuiuſmodi ſint iſta margarita doleo me neſcire, necdum potuiſſe nanciſci librum qui id me doceret; fateórque non potuiſſe me videre an meus huius ſolidi calculus concordet cum eo, quem ex theoremate illo ſuo elicere omiſit Dettonuillæus.

PROPOSITIO III.

Esto a centrum circuli (*Fig.* 50.) ſemidiametro a b deſcripti, eiuſque peripheria ſit b e b, quam tangat in b recta b h, eique æquidiſtet recta a D; eſto primæ reuolutionis ſpiralis b d a; per b ducta ſit recta b s ſecans ſpiralem in d ſupra radium a b ad partes e, & occurrens rectæ a D in s.

Oſtendendum eſt rectam a s eſſe minorem peripheria circuli b e b integra.

Per d & a ducatur recta a d occurrens peripheriæ circuli in e, & per e, d ducantur ordinatim applicatæ e o, d c ad radium a b: ex recta a b abſcindatur a t æqualis rectæ a d. Cùm a d ſubtendens angulum rectum a c d ſit maior quàm a c ſubtendens acutum a d c, erit a t maior quàm a c; per t ducatur t u parallela lateri a s trianguli a ſ b, & occurrens lateri ſ b in u. Quoniam punctum t cadit inter c & b, erit trianguli b c d latus b c, maius latere b t trianguli b t u; ergo cùm ſimilia ſint ipſa triangula, latus c d erit maius latere t u, ac proinde completi parallelogrammi c t u x, latus c x erit minus latere c d. Quoniam igitur rectæ a e, a b ſunt æquales, itemque ex conſtructione a d, a t, erunt quoque æquales d e, b t. Igitur cùm in triangulo ſ a b lateri a s æquidiſtet t u, vt eſt ſ a ad a b, ita u t latus trianguli u t b ſimilis triangulo ſ a b, erit ad t b, & alternando vt a s ad u t vel ad x c, ita a b ad t b, vel a e ad d e. Sed vt a e ad d e ita ex generatione ſpiralis eſt peripheria circuli ad arcum e b; ergo vt peripheria circuli ad arcum e b, ita recta a s ad c x, & alternando vt peripheria tota circuli ad rectam a s, ita arcus e b ad rectam x c. Sed arcus e b eſt maior rectâ x c vt mox oſtendetur: ergo peripheria circuli eſt maior recta a s. Supereſt vt oſtendamus arcum e b eſſe maiorem recta x c. Si iungatur recta e b, arcus e r b erit maior ipsâ rectâ e b; in triangulo autem rectangulo e o b, recta e b ſubtendens angulum rectum eſt maior latere e o, er-

go & multò maior recta d c (cùm vt a e ad a d ita sit in triangulo e a o, latus e o ad d c) ergo arcus e r b est maior quàm recta d c, & multò maior quàm recta x c. Igitur recta a s est minor peripheria circuli, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Iste modus demonstrandi non postulat vt spiralis respondeat toti peripheriæ circuli; sed satis est vt totus arcus cui spiralis respondet sectus sit in e ita vt totus ille arcus sit ad sui portionem e b, sicut est recta a e, ad e d.

COROLLARIVM II.

Præterea idem demonstrandi modus non postulat arcum b r e esse circularem, sed tantùm curuam b r e esse maiorem recta c x, id autem semper erit verum quoties arcus e r b erit maior recta e b (quod ita esse, vt euidens assumunt Geometræ cum Archimede) & quoties insuper recta e b erit maior quam e o, id verò ita est quotiescunque angulus e o b est rectus, vel recto maior.

PROPOSITIO IV.

Iisdem manentibus (*Fig.* 51.) recta f b secet spiralem b i infra rectam a b in puncto i.

Ostendendum est rectam a s esse maiorem peripheriâ circuli integra.

Rectæ a i æqualis abscindatur a t, & per i ducatur i l perpendicularis ad rectam a b: ex recta a b abscindatur a t æqualis rectæ a i, & ducatur t u æquidistans rectæ b h; erit ergo a t maior quam a l, cùm a i subtendens angulum rectum a l i sit maior quam a l. Præterea recta a i occurrat arcui b e circulari in e; quoniam vt illa peripheria circularis cui respondet spiralis ad punctum b per primam reuolutionem à suo initio producta, se habet ad compositam ex eadem peripheria & ex arcu b e secundæ reuolutionis, ita ex spiralis secundæ reuolutionis generatione est a i recta ad radium a e; ergo diuidendo vt se habet arcus circuli primæ reuolutionis ad arcum b e secundæ, ita est radius a e ad e i, ita vt inter a & i iaceat punctum e. Præterea quoniam quotiescunque arcus spiralis primæ reuolutionis secatur per rectam ex b eductam, recta a s est minor quàm arcus circuli pro prima reuolutione assumptus, patet istas secantes non auferre ex recta a D rectas a s quæ ita excrescant prout magis & magis accedunt ad rectam b h tangentem, vt superent omnem datam rectam, cùm neque æquent vnquam arcum assumptum circuli: ergo tangens spiralem secabit rectam a D. Hoc autem posito apertum est curuam b i non cadere inter rectam b h & curuam b e: angulus igitur i b l est acutus, ideoque punctum l cadit inter b & t: ergo cùm recta b h sit, vt mox ostendemus, maior arcu b e, recta autem t u latus trianguli b u t, sit maior latere l i trianguli b i l illi similis, sed habentis latus b l minus latere

b t, vt ostendimus; erit t u maior arcu b e. Quoniam verò æquales sunt a b, a e & a t, a i, erit vt a b vel a e ad b t vel ad e i, ita peripheria circularis primæ reuolutioni respondens ad arcum b e, sed ita etiam ob similitudinem triangulorum s a b, b t u est a s recta ad t u vel ad l x: ergo vt peripheria circularis primæ reuolutionis ad arcum b e secundæ reuolutionis, ita est a s recta ad l x, & alternando vt peripheria circularis ad a s rectam, ita arcus b e ad l x maiorem ipso arcu b e: ergo recta a s est maior peripheria circulari primæ reuolutionis, si quidem verum est quod restat probandum, rectam l i esse maiorem arcu b e.

Per e ducatur tangens e q occurrens tangenti b h in q, & iungatur recta b e, duæ ergo b q, q e ex principio Archimedeo posito initio librorum de Sphæra & cylindro sunt simul maiores arcu b r e. Iungatur recta a q, quæ bifariam ex elementis Euclideis secabit arcum e r b, ac proinde & angulum e a b: ergo per secundam sexti Euclidis, vt h a recta ad a b, ita h q ad q b; sed h a latus trianguli h a b subtendens angulum rectum, est maior quam a b; ergo h q est maior quàm q b, ac proinde & quam e q ipsi b q æqualis: ergo cùm duæ e q, q b sint simul maiores arcu e r b, erit h b maior eodem arcu, ergo l i est maior eodem arcu, quod assumpseramus; igitur recta a s est maior peripheria circulari primæ reuolutionis, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Arcum circuli primæ reuolutionis intelligit Archimedes totam peripheriam circuli; potest tamen vt amplior euadat demonstratio, ita intelligi vt primæ reuolutionis arcus circularis sit ille qui percurritur totus radij motu eo tempore quo radius percurritur totus à puncto describente spiralem lineam: secundæ verò reuolutionis arcus circularis erit ille idem replicatus in consequentia, qui percurratur eodem tempore à radio intera dum punctum describens spiralem percurrit rectam æqualem radio iacentem in directum ipsius radij. Ita verò de tertia, quarta & reliquis reuolutionibus intelligi sic oportet, vt recta quæ percurritur augeatur in singulis reuolutionibus, radij vnius magnitudine. Istud verò ad spiraceas debebit applicari proportione quadam initio indicatâ.

COROLLARIVM II.

Corollarium primum superioris propositionis hîc vt patet locum habet suum. Præterea demonstrandi ratio sicuti in superiore non postulat arcum b r e esse circularem, ita neque hic, sed tantum curuam b r e esse minorem rectâ l x; & rectam t u vel l x æquidistare tangenti b h.

PROPOSITIO V.

Esto (*Fig.* 52.) a centrum ellipseos cuius a b sit semiaxis minor, per b ducta sit b h tangens ellipsim, & ductus sit quicunque radius a e, occurrens tangenti in h.

Ostendendum est arcum b r e esse minorem recta b h.

Quoniam

Quoniam a b eſt ſemiaxis minor, radius a e erit maior quam a b; iungatur recta e b, quæ bifariam ſecetur in z & ducatur radius a z r occurrens tangenti b h in q; ergo ſi iungatur e q tanget ellipſim, vt ex trigeſima ſeptima primi conicorum apertè infertur. Per e ducantur e t, e y parallelæ rectis a b, a z & occurrentes rectæ b h in t & y. Igitur cùm in parallelas a b, e t incidat recta a h, angulo h a b æqualis erit angulus h e t; eademque de cauſa cùm in parallelas e y, a z incidat eadem a h, anguli h e y, h a z erunt æquales: ſed angulus h a z eſt minor angulo h a b; ergo angulus h e y eſt minor angulo h e t: ergo punctum y cadit inter t, & h: ergo recta q h eſt maior recta q y; cúmque e y, z q æquidiſtent in triangulo e b y, ſicut b e ſecatur bifariam in z, ita b y in q: ergo recta q h eſt maior quàm b q.

Rurſus quoniam e z, z b ſunt æquales, & radius a e eſt maior radio a b; in triangulo a z e angulus a z e erit maior angulo a z b trianguli a z b: ergo angulus b z q æqualis angulo a z e ad verticem z poſito eſt maior angulo e z q qui æqualis eſt angulo a z b ad verticem eundem poſito; ergo cùm latera trianguli b z q ſint æqualia lateribus trianguli e z q ſingula ſingulis, & angulus b z q ſit maior angulo e z q, patet rectam b q eſſe maiorem recta e q: ergo b h eſt maior duabus ſimul b q, q e, ac proinde & arcu e r b, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Hinc patet quicunque arcus ſit e r b, ſi recta a e ſit non minor quàm a b, rectam b h eſſe maiorem duabus ſimul e q, b q tangentibus; & ſi ex z biſectione rectæ e b excitetur perpendicularis z a occurrens rectæ b a in a ad curuæ e r b caua (quod accidet quoties angulus a b e fuerit acutus) rectas a e, a b eſſe æquales. Et ſi inter a & b ſumatur quodcunque punctum u, & ducantur rectæ u z, u e, rectam u e eſſe maiorem recta u b. Cùm enim a z ſit perpendicularis ad e b, anguli e z a, a z b erunt æquales: ergo angulus u z e eſt maior angulo u z b; ergo recta u e eſt maior rectâ u b, cùm triangula u z e, u z b habeant idem latus u z, & latera z e, z b æqualia.

COROLLARIVM II.

Si e r b ſit quilibet arcus ſectionis conicæ vel cuiuſcunque alterius curuæ quæ tota ſit caua ad partes z, & b h tangens ſit perpendicularis ad rectam b a, item ſi recta b r per b ducatur ſubtendens arcum b r portionem quamlibet arcus b r e; angulus h b r erit minor angulo h b e, ac proinde perpendicularis ad rectâ b r eam bifariam ſecans occurret rectę a b vltra punctum a, ſecabit enim rectam a z ad curuæ e r b partes a: igitur quæcunque ex puncto a educatur linea ad quodlibet arcûs e r b punctum illa erit maior quam a b: igitur arcus e r b habebit proprietatem quæ requiritur ad hoc vt recta b h ſit maior arcu e r b. Quod ſi angulus h b a non ſit rectus ſed acutus, ſemper ſtabit dicta proprietas.

cepta, quadratura absolutè prodeat: alter verò modus subaudit has voculas, *nonnullis datis*, quæ quidem in singulis figuris aliunde quàm ex ipsa methodo obtineri debent. Illo primo modo generalem methodum tradere quadrandæ cuiuslibet figuræ diuinum esse agnosco potius quàm humanum; posteriore autem modo id non superat vires ingenij humani. Hæ itaque de Cycloide methodi generales non absoluunt, nec ad exitum vltimum generaliter perducunt problema; etenim si à me quæras vt per methodum generalem meam problemata omnia soluta in parua Cycloide, soluam pariter in figura cuius ordinatim ad axem applicatæ sint æquales arcui genitricis ellipseos, respondebo non ita esse illam generalem quin aliqua de hac figurâ quæ ex ellipsi prodit, dari priùs debeant; quæ prorsus me latent, nec ab vllo, quem legerim, scriptore mihi monstrantur: imprimis verò modus quadrandi ipsam figuram superiorem, prout vt in secundi libri nona pro cycloide fecimus, & iam antea in primo libro feceramus. Adeo quadratura huius partis quæ primo problematum aspectu occurrit, est difficilis, quantumuis nonnemo eam facilem videri in cycloide voluerit, postea quam à nobis prodiit in lucem: sed quid non est facile aditu cùm semel ad eam via patet explanata? Hæc præfari debui ne specioso nomine *methodi generalis* vllus decipiatur, aut vanæ aliquid laudis me venari putet. Methodi igitur omnes nostræ non sunt primo modo generales; sed neque semper monendus est Lector eas esse secundo illo modo generales. Porrò quæ sunt generales isto quodam modo, absolutè generaliores sæpe euadunt inuentione cuiusdã quod in illo priore modo non aderat. Duplex huius rei exemplum quasi domesticum mihi nunc occurrit. Demonstrauit Archimedes trianguli rectilinei quadratricem esse æqualem spatio illi quod triangulo eidem æquiponderat, indéque elicuit eximia & incomparabili laude quadraturam parabolæ antea irrepertam: nos verò illud ad omnes quadratrices quarumcunque figurarum extendimus in septima propositione secundi libri tetragonismicorum, ratione cuius non inutilis vt speramus, accessio fiet isti methodo quadrandi figuras per libram, quam in eum finem adhibere post Archimedem desierant Geometræ quos quidem nouimus, sed nos illum vsum restaurare & ampliorem facere conati sumus. Alterum exemplum esto methodus qua se ipsum superans Archimedes demonstrauit per spirales lineas, peripheriam circuli esse æqualem certæ cuidam rectæ; nos autem hoc in libro generalissimam reddimus eam methodum,

pro

pro quibuſcunque lineis curuis. Vtrobique vt extenſio illa fieret, inuenienda fuerunt nonnulla; nam ſi nulla opus fuiſſet noua demonſtratione, id non fuiſſet propoſitionem extendere propriè; ſed monſtrare quouſque ipſa per ſe pertingeret; inuenienda autem fuerunt, vt quæ neceſſaria erant ad concludendum generaliter & non tantùm particulatim, conſtituerentur in aliquo, quod eſſet omnibus commune, & minimè proprium triangulo vel circuli peripheriæ.

Cæterùm de ſpiracea iſta agens mihi præſcriptis iam à meipſo cancellis me cohibebo; ſpiralis & parabolæ miram concordiam quam primus excogitauit & acutè demonſtrauit P. Gregorius à ſanɛto Vincentio ſub finem libri ſexti, huc transferre non eſt animus, cum apud illum luculenter demonſtrata extet hoc titulo *ſpiralis & parabolæ ſymbolizatio.* Nihil etiam dicam de methodo quam ſubtiliter iniit D. Iſmaël Bullialdus in aureo de lineis ſpiralibus libello, vbi Archimedis demonſtrationes aliis nouis ſtabilit, vt nonnullorum ſcrupulos euellat, qui autoritate Vietæ ducti non ita fidebant hac in re Archimedeis rationibus. Scribam igitur quæ ad rem præſentem illis adjici poſſe iudicaui, & hæc quidem non iniucunda fore ſpero Lectori, præcipuè cùm vt rectè annotauit idem Bullialdus *linearum ſpiralium contemplatio tam ſublimis ac ardua antiquis Geometris viſa ſit, vt Archimedes, qui earum affectiones & proprietates ingenio propè diuino, ac ſubtilitate incomparabili primus demonſtrauit, in ſui admirationem cùm æquales, tum poſteros conuerterit; laudum titulos nullo obliuionis ſitu inducendos meruerit; earúmque inuentori Cononi gloriam palmámque præripuerit.* Accuſatio illa Archimedis expurgata nunc à Viro illo doctiſſimo reuocat mihi in mentem aliam accuſationem factam à Scaligero aduerſus eiuſdem Archimedis æquationem circuli cum rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro eiuſdem circuli, & ſub recta æquante dimidium eiuſdem peripheriæ. Eandem enim æquationem inuenit Gregorius à S. Vincentio per aliam viam l. 3. prop. 89. vt conſtet quam periculoſum ſit quem tota retro antiquitas alicuius ſcientiæ Ducem ſecuta & venerata fuerit, eum ſpecioſo quantumuis nomine impugnare. Vnde Meibonius qui in Euclideis etiam Elementis errata demonſtranda non ita pridem ſuſcepit, quod aliud penſi inopinati pretium ſperare debeat, non video. Longiùs abierim ſi illos his adiunxero qui omnia nunc mouent *ad impugnandum Ariſtoteliſmum, adhortandúmque homines ad aliquam veriſimiliorem, ſanioremque Philoſophiam*; ita enim obloquuntur contra eam quam (vt ipſi norunt)

generales Academiæ propugnant hodie vt suam, vbi fidei Diuinæ contraria non fuerit.

PROPOSITIO PRIMA.

EX duabus in præsenti schemate designatis figuris prima a b c esto triangulum (*Fig. 49.*) comprehensum sub rectis a b, b c, a c; esto parabola a m e b quam tangat recta a c, & cuius axis æquidistet lateri b c: latus b c diuisum sit in quotcunque partes æquales, b i, i g, g h, h c, & ex puncto a eductæ sint rectæ a i, a g, a h occurrentes limbo a e b in m, e, n; per quæ puncta educantur q m, d e, l n æquidistantes lateri b c, & occurrentes rectis a c, a h, a g, a i in t, o, f, r, p, n. Considerentur figuræ quadrilateræ l n i b, r e n p, o m f e, & trilatera a m t; quæ singulæ per limbum parabolæ diuiduntur in duas partes quarum vna est interior figuræ a m e b d, altera exterior. Esto præterea figura secunda a b g c cuius latus a b æquet, maioris perspicuitatis causa, rectam a b primæ figuræ rectilineæ; linea autem b g, sit quælibet curua æqualis rectæ b c; à puncto c ducta sit recta c a, & curua b g c intelligatur diuisa in totidem partes b i, i g, g h, h c in quot diuisa fuit recta b c; istæ autem partes b i, i g, g h, h c tales sint vt ductis rectis i a, g a, h a, æqualia sint spatia b a i, i a g, g a h, h a c. Recta a b intelligatur diuisa in partes a q, q d, d l, l b æquales partibus a q, q d, d l, l b. Per l, d, q intelligantur descriptæ curuæ l n p, d r e s, q m t similes similiterque positæ curuis b i g, b i g h, b h c. Intelligatur curua a u m e n b incedens per illa omnia puncta, in quotcunque partes diuisæ concipiantur lineæ. Hæc linea vocetur *spiracea* quando b g c non est peripheria circuli, eo pacto quo *cylindraceum* dixi frequentiùs in Elementis solidum prismatoides cuius basis non est circulus. Patet figuris primæ figuræ l n i b, r e p n, o m f e, a m t respondere totidem iisdem literis designatas, & figuras istas diuidi quoque per limbum a e b in duas portiones vnam internam, aliam externam.

Ostendendum est principia Archimedis pro spirali adhibita, probare figuram a e n b d comprehensam sub recta a b necnon sub curuâ a e b spiraceâ, esse trientem totius b a c g, idque verum quoque esse in triangulo a b c respectu segmenti parabolici a u e b.

In prima figura parabolam a m b esse trientem figuræ a b c demonstrauit Archimedes per libræ principia in libri de quadratura parabolæ, & nos in septima secundi illam propositionem extendimus ad alias figuras in quibus linea a f c est quælibet curua, vt in præfatione monuimus.

Quando curua b g c est peripheria circuli integra, ostendit in vigesima quarta de spiralibus figuram a m e b esse trientem figuræ a b g c, vtitur autem ad id ostendendum principio demonstrato in decima. *Quadrata omnia linearum æqualium maximæ, quadratorum quidem linearum se se æqualiter excedentium minora esse quam tripla; quoniam assumptis quibusdam tripla sunt: reliquorum autem dempto maximæ quadrato maiora, quàm tripla; quoniam assumpta minora sunt quàm tripla quadrati maximæ. Et propterea si similes figuræ describantur ab omnibus; & ab iis, quæ se se æqualiter excedunt; & ab iis, quæ sunt æquales maximæ: quæ ab iis describuntur, quæ sunt æquales maximæ, earum quidem, quæ ab iis, quæ se æqualiter excedunt, minores erunt quàm triplæ; reliquarum verò, dempta ea, quæ à maxima describitur, maiores, quàm triplæ: similes namque figuræ eandem inter se se, quam quadrata proportionem habent.* Cæterùm Archimedes in illa propositione vigesima quarta assumit arcum b g c esse æqualem toti peripheriæ circulari, ideóque ex eo gigni spiralem primæ reuolutionis: sed siue sit integra peripheria siue quam volueris habeat proportionem ad illam integram, eadem est vis demonstrationis.

Vnum facessere posset negotium, quòd quando linea b g c non est circularis, figuræ a l n, a n p non sint similes; sed id nihil obstat quo minus demonstratio suum robur obtineat; quia sufficit ad eius effectum vt figuræ a l n, a n p sint æquales, & vt figuræ a i g, a n p, a r e &c. sint similes; id autem accidit quæcunque sit curua b g c: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Demonstrationis progressus cùm ostendat theorema esse verum quæcunque sit curua b g c; patet curuam b g c posse esse spiralem, vel spiraceam, sectionem conicam quamcunque, & vno verbo lineam quamcunque siue angulosa sit, siue sit συνέχειαν ἔχουσα; etiam si illi anguli sint rectilinei, vel curuilinei, vel quomodocunque mixti. Item siue curuæ conuexa sint ad partes a, siue sint ad opposita.

COROLLARIVM II.

Quando curua b g c est arcus circuli, & comparatur cum figura in qua b c sit recta linea, analogiam earum omnimodam primus deprehendit & demonstrauit Gregorius à S. Vincentio supra laudatus; ea verò analogia vel *symbolizatio* reperitur quæcunque linea sit b g c, in vtráque figura. Quia verò quando b c est recta linea, proportiones omnes facillimè determinantur ex quadraturâ parabolæ & aliis circa hanc sectionem conicam inuentis; vt in cæteris similia determinentur, peti debent ex primâ figura in qua limbus a m e b est parabolicus.

COROLLARIVM III.

In figura prima vbi, limbus a m b est parabola, si compleatur parallelogrammum a b c x, & iungatur diameter b x, ipsa b x tangit parabolam a e b, sicuti & a c, vt ex trigesima tertia primi conicorum facilè colligitur: & ita recta a x intercepta inter tangentem b x, & inter a b æqualis

est rectæ b c. Similis proprietas demonstrata est ab Archimede quando in secundâ figurâ linea b g c est arcus circuli. Sed aduertendum est lineam b c in prima figura vicem gerere duarum quæ in secunda distinguntur, nempe b g c & b M, quarum b g c est curua, b M verò est recta tangens curuam b g c in b. At in primo schemate cùm linea b g c sit recta non potest tangi à recta b M, sed debent necessariò sibi mutuò congruere, dum ad tactum conueniunt. Nos autem postea demonstrabimus in vniuersum si curuam b g c tangat recta b M, & per a ducatur a x æquidistans tangenti b M; rectam quæ in b tangat spiraceam a e b, occurrere ita rectæ a x in puncto x, vt ipsa a x sit æqualis curuæ b g c. Quæ quidem proprietas in spirali demonstrata ab Archimede summæ admirationi fuit omnibus Geometris quotquot vnquam extitere huius theorematis contemplatores. Quod autem noster Gregorius à S. Vincentio dubitabundus innuit, Archimedem deriuasse hanc spiralis proprietatem à parabolica figura in qua linea b c est recta, id probabile non est, cùm Archimedes initio libri de spiralibus ad Dositheum candidè scribat ista de spiralibus theoremata fuisse à Conone inuenta nullis eorum additis demonstrationibus, quas proinde Archimedes perquisierit, & tandem inuenerit, ipsique Cononi apud Posteros omnem fermè gloriam horum theorematum præripuerit. Si itaque vllus foret accusandus, is esset Conon primus spiralis lineæ & eius proprietatum inuentor.

COROLLARIVM IV.

Ista communicatio proprietatum non sistit in planis, sed ad solida etiam pertingit: quapropter sicuti si ex puncto a excitetur perpendicularis a D ad a b c primæ figuræ planum, parallelepipedum altitudinis a D, baseos a b g c est triplum cylindracei eiusdem altitudinis baseos a e b d, ita quæcunque sit linea b c in secundâ figurâ, cylindraceum eiusdem altitudinis a D, baseos a b g c, est triplum cylindracei baseos a e b d. Quod ad alia solida transferri patebit ex sequenti propositione.

PROPOSITIO II.

INtelligatur iisdem manentibus (*Fig.* 49.) ex puncto D educi recta linea quæ immoto puncto D describat superficiem incedendo per lineam b g c, ac proinde describens superficiem quæ si linea b g c sit peripheria circuli, erit *conica*; si alia curua erit *homæoconica*, ita enim appellauimus eam in corollario secundo duodecimæ quarti libri tetragonismicorum; si autem linea b c sit recta, erit *cunealis* superficies, solidum enim abscissum duobus planis se se secantibus ex cylindraceo aliquo, vocauimus in vigesima prima eiusdem quarti libri *cuneatum*. Intelligatur præterea per limbum a e b incedere linea parallela rectæ a D & describere superficiem *cylindraceam* cuius basis sit figura a e b q.

Ostendendum est solidum quod est commune isti cylindraceo baseos a e b q altitudinis a D; & homœoconico baseos a b g c, verticis D, vi analogiæ coni euoluti & expansi esse sextantem cylindracei altitudinis a D, baseos a b g c.

Istud ita ostenditur in prima figura, vbi linea b c est recta. Ex recta a b abscindatur b E ipsi a b æqualis, sitque a b diuisa bifariam in d: erit ergo d e diameter segmenti parabolici a e b, & eius grauitatis centrum erit in recta d e: ergo si libra a E suspendatur ex b perpendiculo b c, brachio b E, æquiponderans segmento a e b d erit æquale dimidio ipsius, cùm vt b E brachium ad b d longitudinem, ita sit suspensum a e b d ad æquiponderans. Sed suspensum est triens figuræ a c g b: ergo dimidium illius, nempe æquiponderans, est sextans figuræ a c g b. Præterea ex vigesima prima quarti tetragonismicorum patet cuneatum solidum abscissum ex cylindraceo baseos a e b d esse æquale cylindraceo altitudinis a D, baseos æquantis quadratarium spatium, siue æquiponderans iam inuentum: ergo in prima figura solidum illud commune homœoconico descripto per rectam ex D manente incedentem per c g b, & cylindraceo baseos a e b d est æquale cylindraceo altitudinis a D, baseos æquantis sextantem figuræ a b g c. Igitur per analogiam id quoque verum est quæcunque sit linea b g c; quod erat demonstrandum. Hanc porrò analogiam in hoc esse veram si quis sibi demonstrari postulet, suo quidem iure vtetur; neque enim in Geometricis quicquam nisi per vim & à coacto conceditur.

COROLLARIVM.

Quando linea b g c est peripheria integra circuli semidiametro a b descripta, & punctum c congruit puncto b, patet lineam a e b esse spiralem, & superficiem descriptam motu rectæ ex vertice D per limbum b g c esse conicam: igitur in isto casu solidum commune cylindraceo baseos a e b q, & cono, est sexta pars cylindri altitudinis a D, cuius basis sit circulus peripheriæ b g c; & si recta a D ponatur æqualis rectæ a b est octaua pars sphæræ cuius circulus maximus sit idem qui basis coni, semidiametro a b descriptus. Nam hemisphærium incumbens illi circulo est bes cylindri altitudinis a D habentis pro basi eundem circulum, vt ex Archimedeis demonstratis patet; ergo eiusmodi cylindrus continet tres semisses eiusmodi hemisphærij, & tres quadrantes totius sphæræ: ergo cùm sextans trium quadrantium vel sex octauarum, sit octaua pars, liquet solidum commune cylindraceo cuius basis sit spiralis primæ reuolutionis, altitudo a D æqualis semidiametro a b, & cono verticis D, habenti pro basi circulum semidiametri a b, esse octauam partem sphæræ cuius circulus maximus semidiametro a b describatur. Istud problema nobis postea quam edidimus viginti illas propositiones quæ primum huius Operis librum constituunt, proposuit soluendum D. Pascalius veluti suum; ipsumque idem pro suo post aliquot menses in lucem dedit Dettonuil-

læus in epiſtola ad D. de Sluze; quod facit vt diſcrimen inter Dettonuillæum & Paſchalium ecquod ſit non ſatis videam. Porrò ſi altitudo a D æquet ſemidiametrum a b, & A E, E D ſint æquales, Dettonuillæus aſſerit ſolidum iſtud, quod cono & cylindraceo commune eſt, *eſſe ad cylindrum baſeos eiuſdem cum cono, & altitudinis a E, vt omnia ſimul quadrata b l ducta in l a ſunt ad cubum cuius latus ſit quadratum a E; id eſt, ſicut margaritum tertij ordinis ad rectangulum comprehenſum ſub axe & ſub ordinatim applicata ad medium, quam rationem D. de Sluze dedit non in margarito ſolùm tertij ordinis, ſed etiam in aliis reliquorum ordinum quibus conſtanter competit ratio numeri ad numerum.* Ego cuiuſmodi ſint iſta margarita doleo me neſcire, necdum potuiſſe nanciſci librum qui id me doceret; fateórque non potuiſſe me videre an meus huius ſolidi calculus concordet cum eo, quem ex theoremate illo ſuo elicere omiſit Dettonuillæus.

PROPOSITIO III.

ESto a centrum circuli (*Fig.* 50.) ſemidiametro a b deſcripti, eiuſque peripheria ſit b e b, quam tangat in b recta b h, eique æquidiſtet recta a D; eſto primæ reuolutionis ſpiralis b d a; per b ducta ſit recta b s ſecans ſpiralem in d ſupra radium a b ad partes e, & occurrens rectæ a D in s.

Oſtendendum eſt rectam a s eſſe minorem peripheria circuli b e b integra.

Per d & a ducatur recta a d occurrens peripheriæ circuli in e, & per e, d ducantur ordinatim applicatæ e o, d c ad radium a b: ex recta a b abſcindatur a t æqualis rectæ a d. Cùm a d ſubtendens angulum rectum a c d ſit maior quàm a c ſubtendens acutum a d c, erit a t maior quàm a c; per t ducatur t u parallela lateri a s trianguli a ſ b, & occurrens lateri ſ b in u. Quoniam punctum t cadit inter c & b, erit trianguli b c d latus b c, maius latere b t trianguli b t u; ergo cùm ſimilia ſint ipſa triangula, latus c d erit maius latere t u, ac proinde completi parallelogrammi c t u x, latus c x erit minus latere c d. Quoniam igitur rectæ a e, a b ſunt æquales, itemque ex conſtructione a d, a t, erunt quoque æquales d e, b t. Igitur cùm in triangulo ſ a b lateri a s æquidiſtet t u, vt eſt ſ a ad a b, ita u t latus trianguli u t b ſimilis triangulo ſ a b, erit ad t b, & alternando vt a s ad u t vel ad x c, ita a b ad t b, vel a e ad d e. Sed vt a e ad d e ita ex generatione ſpiralis eſt peripheria circuli ad arcum e b; ergo vt peripheria circuli ad arcum e b, ita recta a s ad c x, & alternando vt peripheria tota circuli ad rectam a s, ita arcus e b ad rectam x c. Sed arcus e b eſt maior rectâ x c vt mox oſtendetur: ergo peripheria circuli eſt maior recta a s. Supereſt vt oſtendamus arcum e b eſſe maiorem recta x c. Si iungatur recta e b, arcus e r b erit maior ipſâ rectâ e b; in triangulo autem rectangulo e o b, recta e b ſubtendens angulum rectum eſt maior latere e o, er-

go & multò maior recta d c (cùm vt a e ad a d ita sit in triangulo e a o, latus e o ad d c) ergo arcus e r b est maior quàm recta d c, & multò maior quàm recta x c. Igitur recta a s est minor peripheria circuli, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Iste modus demonstrandi non postulat vt spiralis respondeat toti peripheriæ circuli; sed satis est vt totus arcus cui spiralis respondet sectus sit in e ita vt totus ille arcus sit ad sui portionem e b, sicut est recta a e, ad e d.

COROLLARIVM II.

Præterea idem demonstrandi modus non postulat arcum b r e esse circularem, sed tantùm curuam b r e esse maiorem recta c x, id autem semper erit verum quoties arcus e r b erit maior recta e b (quod ita esse, vt euidens assumunt Geometræ cum Archimede) & quoties insuper recta e b erit maior quam e o, id verò ita est quotiescunque angulus e o b est rectus, vel recto maior.

PROPOSITIO IV.

Iisdem manentibus (*Fig.* 51.) recta f b secet spiralem b i infra rectam a b in puncto i.

Ostendendum est rectam a s esse maiorem peripheriâ circuli integra.

Rectæ a i æqualis abscindatur a t, & per i ducatur i l perpendicularis ad rectam a b: ex recta a b abscindatur a t æqualis rectæ a i, & ducatur t u æquidistans rectæ b h; erit ergo a t maior quam a l, cùm a i subtendens angulum rectum a l i sit maior quam a l. Præterea recta a i occurrat arcui b e circulari in e; quoniam vt illa peripheria circularis cui respondet spiralis ad punctum b per primam reuolutionem à suo initio producta, se habet ad compositam ex eadem peripheria & ex arcu b e secundæ reuolutionis, ita ex spiralis secundæ reuolutionis generatione est a i recta ad radium a e; ergo diuidendo vt se habet arcus circuli primæ reuolutionis ad arcum b e secundæ, ita est radius a e ad e i, ita vt inter a & i iaceat punctum e. Præterea quoniam quotiescunque arcus spiralis primæ reuolutionis secatur per rectam ex b eductam, recta a s est minor quàm arcus circuli pro prima reuolutione assumptus, patet istas secantes non auferre ex recta a D rectas a s quæ ita excrescant prout magis & magis accedunt ad rectam b h tangentem, vt superent omnem datam rectam, cùm neque æquent vnquam arcum assumptum circuli: ergo tangens spiralem secabit rectam a D. Hoc autem posito apertum est curuam b i non cadere inter rectam b h & curuam b e: angulus igitur i b l est acutus, ideoque punctum l cadit inter b & t: ergo cùm recta b h sit, vt mox ostendemus, maior arcu b e, recta autem t u latus trianguli b u t, sit maior latere l i trianguli b i l illi similis, sed habentis latus b l minus latere

b t, vt ostendimus; erit t u maior arcu b e. Quoniam verò æquales sunt a b, a e & a t, a i, erit vt a b vel a e ad b t vel ad e i, ita peripheria circularis primæ reuolutioni respondens ad arcum b e, sed ita etiam ob similitudinem triangulorum s a b, b t u est a s recta ad t u vel ad l x: ergo vt peripheria circularis primæ reuolutionis ad arcum b e secundæ reuolutionis, ita est a s recta ad l x, & alternando vt peripheria circularis ad a s rectam, ita arcus b e ad l x maiorem ipso arcu b e: ergo recta a s est maior peripheria circulari primæ reuolutionis, si quidem verum est quod restat probandum, rectam l i esse maiorem arcu b e.

Per e ducatur tangens e q occurrens tangenti b h in q, & iungatur recta b e, duæ ergo b q, q e ex principio Archimedeo posito initio librorum de Sphæra & cylindro sunt simul maiores arcu b r e. Iungatur recta a q, quæ bifariam ex elementis Euclideis secabit arcum e r b, ac proinde & angulum e a b: ergo per secundam sexti Euclidis, vt h a recta ad a b, ita h q ad q b; sed h a latus trianguli h a b subtendens angulum rectum, est maior quam a b; ergo h q est maior quàm q b, ac proinde & quam e q ipsi b q æqualis: ergo cùm duæ e q, q b sint simul maiores arcu e r b, erit h b maior eodem arcu, ergo l i est maior eodem arcu, quod assumpseramus; igitur recta a s est maior peripheria circulari primæ reuolutionis, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Arcum circuli primæ reuolutionis intelligit Archimedes totam peripheriam circuli; potest tamen vt amplior euadat demonstratio, ita intelligi vt primæ reuolutionis arcus circularis sit ille qui percurritur totus radij motu eo tempore quo radius percurritur totus à puncto describente spiralem lineam: secundæ verò reuolutionis arcus circularis erit ille idem replicatus in consequentia, qui percurratur eodem tempore à radio intera dum punctum describens spiralem percurrit rectam æqualem radio iacentem in directum ipsius radij. Ita verò de tertia, quarta & reliquis reuolutionibus intelligi sic oportet, vt recta quæ percurritur augeatur in singulis reuolutionibus, radij vnius magnitudine. Istud verò ad spiraceas debebit applicari proportione quadam initio indicatâ.

COROLLARIVM II.

Corollarium primum superioris propositionis hîc vt patet locum habet suum. Præterea demonstrandi ratio sicuti in superiore non postulat arcum b r e esse circularem, ita neque hîc, sed tantum curuam b r e esse minorem rectâ l x; & rectam t u vel l x æquidistare tangenti b h.

PROPOSITIO V.

ESto (*Fig.* 52.) a centrum ellipseos cuius a b sit semiaxis minor, per b ducta sit b h tangens ellipsim, & ductus sit quicunque radius a e, occurrens tangenti in h.

Ostendendum est arcum b r e esse minorem recta b h.

Quoniam

Quoniam a b est semiaxis minor, radius a e erit maior quam a b; iungatur recta e b, quæ bifariam secetur in z & ducatur radius a z r occurrens tangenti b h in q; ergo si iungatur e q tanget ellipsim, vt ex trigesima septima primi conicorum apertè infertur. Per e ducantur e t, e y parallelæ rectis a b, a z & occurrentes rectæ b h in t & y. Igitur cùm in parallelas a b, e t incidat recta a h, angulo h a b æqualis erit angulus h e t; eademque de causa cùm in parallelas e y, a z incidat eadem a h, anguli h e y, h a z erunt æquales: sed angulus h a z est minor angulo h a b; ergo angulus h e y est minor angulo h e t: ergo punctum y cadit inter t, & h: ergo recta q h est maior recta q y; cúmque e y, z q æquidistent in triangulo e b y, sicut b e secatur bifariam in z, ita b y in q: ergo recta q h est maior quàm b q.

Rursus quoniam e z, z b sunt æquales, & radius a e est maior radio a b; in triangulo a z e angulus a z e erit maior angulo a z b trianguli a z b: ergo angulus b z q æqualis angulo a z e ad verticem z posito est maior angulo e z q qui æqualis est angulo a z b ad verticem eundem posito; ergo cùm latera trianguli b z q sint æqualia lateribus trianguli e z q singula singulis, & angulus b z q sit maior angulo e z q, patet rectam b q esse maiorem recta e q: ergo b h est maior duabus simul b q, q e, ac proinde & arcu e r b, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Hinc patet quicunque arcus sit e r b, si recta a e sit non minor quàm a b, rectam b h esse maiorem duabus simul e q, b q tangentibus; & si ex z bisectione rectæ e b excitetur perpendicularis z a occurrens rectæ b a in a ad curuæ e r b caua (quod accidet quoties angulus a b e fuerit acutus) rectas a e, a b esse æquales. Et si inter a & b sumatur quodcunque punctum u, & ducantur rectæ u z, u e, rectam u e esse maiorem recta u b. Cùm enim a z sit perpendicularis ad e b, anguli e z a, a z b erunt æquales: ergo angulus u z e est maior angulo u z b; ergo recta u e est maior rectâ u b, cùm triangula u z e, u z b habeant idem latus u z, & latera z e, z b æqualia.

COROLLARIVM II.

Si e r b sit quilibet arcus sectionis conicæ vel cuiuscunque alterius curuæ quæ tota sit caua ad partes z, & b h tangens sit perpendicularis ad rectam b a, item si recta b r per b ducatur subtendens arcum b r portionem quamlibet arcus b r e; angulus h b r erit minor angulo h b e, ac proinde perpendicularis ad rectâ b r eam bifariam secans occurret rectę a b vltra punctum a, secabit enim rectam a z ad curuæ e r b partes a: igitur quæcunque ex puncto a educatur linea ad quodlibet arcûs e r b punctum illa erit maior quam a b: igitur arcus e r b habebit proprietatem quæ requiritur ad hoc vt recta b h sit maior arcu e r b. Quod si angulus h b a non sit rectus sed acutus, semper stabit dicta proprietas.

PROPOSITIO VI.

ESto vt in tertia (*Fig.* 50.) arcus circularis e r b, & spiralis d b i; ex puncto b educta sit b V tangens spiralem in b, & occurrens rectæ a s in V.

Ostendendum est rectam a V esse æqualem arcui circulari qui respondet reuolutioni primæ in puncto b terminatæ.

Reuolutionem intelligo non solam ἀποκατάστασιν, sed etiam vt dixi in corollario quartæ, motionem radij & puncti per radium incedentis ab vno eius extremo quousque punctum perueniat ad aliud extremum, atque hæc est prima reuolutio; secunda erit si radio isti addas in directum alterum radium, qui pari ratione à puncto generatore spiralis lineæ moueatur, interéa dum pari quoque latione linea consequenter percurrit parem priori arcum; & ita tertia, quarta, & aliæ reuolutiones intelligi debent, vt propositio euadat generalis.

Esto itaque reuolutionis primæ terminus & meta b, initium a; radius autem cuius motu describitur spiralis est ipse a b, quando primæ reuolutioni respondet tota peripheria circularis; erit verò alius quilibet a f, si primæ reuolutionis arcus sumatur f e r b, ita vt quo tempore punctum generans spiralem incipit moueri à puncto a ad f per radium a f, ipse radius manente a circumferatur per arcum f e b, seruata vtrinque motionis æquabilitate, vt præscripta ab Archimede ratio generationis postulat.

Hoc ita declarato vis demonstrationis ab absurdo petitæ hæc est, si arcus circuli non est æqualis rectæ a V vel est minor, vel maior. Sit primò, si fieri potest, minor, illique sit æqualis recta a s; ergo si ducatur recta b s secabit spiralem in aliquo puncto d ad partes superiores radij a b, vt infrà ostendetur: igitur per tertiam propositionem, cùm recta b s secet spiralem in d supra radium a b; erit a s recta minor arcu circulari qui respondet reuolutioni, quod est absurdum cum eidem arcui ponatur æqualis.

Sit secundò si fieri potest recta a V maior in arcu primæ reuolutionis, sitque a q illi æqualis; iungatur recta b q quæ secabit spiralem infra a b puncto i, vt mox ostendemus; ergo cùm recta i b q spiralem productam secet infra rectam a b, recta a q erit per quartam maior arcu circulari primæ reuolutionis; quod est absurdum cum ei æqualis posita iam sit: non ergo a u recta est maior, neque minor arcu circulari primæ reuolutionis, sed est illi æqualis, modo constet rectam q b secare spiralem in i.

Id verò ostenditur ex tangentis proprietate demonstrata ab Euclide libro 3. propositione 16. *alteram rectam non cadere in locum inter peripheriam & tangentem comprehensum*; quam quidem proprietatem communem esse rectis quæ sectiones conicas tangunt demonstrat Apollonius libri primi Conicorum propositione trigesima secunda. Quoniam igitur recta b h tangit arcum e r b in b, quæcunque alia b q secans angulum a b h ducatur,

ſecabit arcum in y : ergo ſi iungatur radius a y, ſecans ſpiralem in z, punctum z erit inter a & y, quia vt totus primæ reuolutionis arcus ad ſui partem y r b, ita ex generatione ſpiralis eſt radius a y ad ſui partem y z.

Habent igitur hanc proprietatem ſpiralis & circuli peripheria, vt ſi ex puncto b educatur quælibet recta b y ſecans peripheriam in y, & iungatur radius a y, in ipſo radio a y ſit z punctum ſpiralis, & vt recta b z ſecet ita ſpiralem, vt inter a & y pro prima reuolutione iaceat punctum z, in ſecunda verò inter a & z iaceat y. Quòd ſi inter rectas a b, b h ex puncto b duci poſſet aliqua recta quæ non ſecaret arcum b r e, illa non haberet vllam ſibi reſpondentem ex b pariter eductam quæ ſecaret ſpiralem; & ſicuti inter tangentem b h & arcum circuli b e poſſent duci innumeræ rectæ ex puncto tactûs quæ non ſecarent peripheriam circuli, ita inter ſpiralis lineæ tangentem b V & arcum ipſum ſpiralem poſſent ex b agi innumeræ quoque rectæ quæ non ſecarent arcum ſpiralem. Ergo tunc malè ſumeretur recta q b ſecare arcum ſpiralem, cùm ſine numero poſſent duci inter tangentem & ſpiralem quæ non ſecarent ipſam in alio puncto, ſed illi tantum occurrerent in b. Itaque hæc eſt natura ſpiralis vt tangens eius b V imitetur tangentem b h arcûs genitoris in hoc, vt ſicut in locum qui interiacet inter arcum genitorem b r e & tangentem b h poteſt vel non poteſt cadere recta, ita in locum qui eſt inter ſpiralem illi reſpondentem b d z & tangeutem b V poſſit vel non poſſit duci recta ex puncto tactus b. Cùm igitur in locum qui iacet inter circularem arcum & tangentem non poſſit cadere recta, neque poterit cadere in locum qui iacet inter ſpiralem b d z & tangentem b V: ergo recta quæcunque ex b educta præter tangentem b u, ſecat ſpiralem arcui circuli reſpondentem, prout quoque ſecat arcum ipſius circuli; rectè ergo aſſumpſimus rectas b q, b s ex puncto tactûs b eductas, & diuerſas à tangente b V ſecare arcum ſpiralis ex arcu circulari genitæ: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Quæ de ſecunda reuolutione & aliis demonſtrat Archimedes, ſatis perſpicua ſunt ſi demonſtratio præſentis propoſitionis clarè intelligatur; quapropter ea omittimus ampliore elucidatione exponere.

COROLLARIVM II.

Ex demonſtratis hactenus liquet demõſtrationis robur perſiſtere etiam in ſpiraceis dummodo arcûs genitoris e r b tangens habeat proprietatem illam vt in locum interceptum tangente & arcu nulla recta cadat ex puncto tactûs educta; ac proinde vt hoc ipſum conueniat tangenti ſpiraceæ. Secundò corollarium ſecundum tertiæ exigit vt angulus e o b vel d c b non ſit minor recto, ad hoc vt iunctâ e b, angulus a b e ſit acutus: eadẽ verò propoſitio tertia requirit vt recta a d ſit maior rectâ a c, quod neceſſariò euenit ſi angulus a c d non ſit minor recto; ergo cùm nec a c d nec d c b debeant eſſe minores recto, ſecunda iſta conditio eo reducitur vt angulus

a c d ſit rectus. Tertio vt arcus b r e ſit cauus ad partes initij a. Quartò vt recta ex initio a ad arcum genitorem vtcunque educta ſit non minor rectâ a b, id enim exigitur in corollario primo quintæ. Quoties ergo arcûs genitoris quatuor erunt proprietates iam dictæ, prima quidem vt in locum inter tangentem b h & arcum genitorem b r e nulla ex b ducta recta cadat; ſecunda vt angulus a b h ſit rectus, tertia vt arcus e r b ſit cauus ad partes initij a: quarta vt quælibet recta ex a initio ducta ad arcum non ſit minor recta a b, toties demonſtratio præſentis propoſitionis idem demonſtrabit de ſpiracea, quod hic demonſtratum fuit de ſpirali. Vnde patet quàm ampla euadat præſens propoſitio. Hanc ſpiraceam voco continuam.

COROLLARIVM III.

Quoniam in prima propoſitione ponimus ad effectum illius demonſtrationis curuam b r e genitricem ſpiraceæ eſſe cuiuſcunque modi, ad effectum verò præſentis requirimus quatuor iam dictas proprietates in curuâ illâ genitrice, patet iſtud theorema non patére tam latè quam illud. Sunt enim plurimæ curuæ quibus illæ proprietates non competunt, cuiuſmodi ſunt illæ quæ anguloſæ ſunt, id eſt compoſitæ ex multis lineis angulos conſtituentibus; namque ſi ex angulo educas rectas quæ hinc & inde tangant arcus conuenientes in angulum, illæ rectæ non iacebunt neceſſariò in directum; angulum verò a b h poſſe non eſſe rectum patet ex eo quod in ſpiraceæ generatione poſſit initium eius poni in quolibet puncto, ac proinde extra perpendicularem excitatam ex puncto b ad tangentem b h. Nos igitur in ſequentibus non ſumemus punctum a, ſiue initium ſpiraceæ niſi in perpendiculari ad tangentem b h, arcum verò b r e oſtendemus συνέχειαν ἔχειν, id eſt continuo tractu & ſine angulis vno ductu deſcribi; & ad partes initij a eſſe cauum: id verò oſtendemus in arcu circulari, elliptico, hyperbolico, parabolicò & etiam ſpiraceo continuo; vt inde habeamus arcubus iſtis reſpondere rectam æqualem interceptam inter perpendicularem excitatam ex initio ſpiraceæ ad radium ab ipſo initio a ad finem b ſpiralis primæ reuolutionis, & inter ipſius ſpiraceæ tangentem ex fine b eductam. Circularem verò arcum adnumerauimus quia illi non ſolum reſpondet ſpiralis initium habens in centro, ſed etiam ſpiracea initium habens in quolibet puncto ſumpto in radio qui à centro ad finem b ſpiraceæ primæ reuolutionis educitur. Porrò cum figuram angulis nullis aſperam diximus, animus non fuit excludere ab huius vocis ſignificatu peripheriam circuli, quamuis enim à quibuſdam (vt in prolegomenis tetragoniſmicorum librorum notauimus) maximè anguloſa figura dicatur, id tamen mente magis quàm reipſa verum eſt, nam licet circuli ambitus ſit reuera ille in quem deſinunt figuræ inſcriptæ vel circumſcriptæ πολυγωνόταται: deſinunt tamen, nec circulo πολυγωνότητα communicant.

PROPOSITIO VII.

IN schemate quintæ propositionis (*Fig.* 52.) arcus e r b esto circularis, quem in b tangat recta b h, ex puncto b educta sit b u perpendicularis ad rectam b h; & ex puncto z bifariam secante rectam e b excitata sit perpendicularis z s ad ipsam e b, occurrens rectæ a b in a.

Ostendendum est si inter a & b sumatur quodcunque punctum u, & iunctâ rectâ u e ponatur ipsum u initium spiraceæ u d b respondentis arcui e r b iuxta methodum primæ propositionis, quam in b tangat recta b f, occurrens in f rectæ u g ad b a rectam perpendiculariter excitatæ ex u puncto, rectam u f esse æqualem arcui circulari b r e.

Quoniam recta z a est perpendicularis ad e b subtendentem arcum e r b, patet ex elementis Euclidis rectam r a transire per centrum, ex iisdem verò patet rectam b a transire pariter per centrum, ergo a est centrum circuli, & arcus e z b est cauus ad partes puncti a, & rectæ a e, a b sunt æquales. Prætereа tangens b h habet proprietatem requisitam in corollario superioris vt in eiusdem propositionis progressu monstratum est. Ex corollario autem secundo quintæ patet omnem rectam ex u eductam ad arcum e z b esse maiorem recta u b. Igitur per superioris propositionis corollarium secundum recta u f est æqualis arcui e r b, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Initium spiraceæ posuimus in puncto inter a & b iacente, exclusimúsque ipsum a, quia si initium ponatur in a, gignetur spiralis linea respondens toti arcui designato e r b. Quando autem arcus e r b non erit circularis, poterit assumi punctum a vel etiam quodlibet aliud inter a & b iacens, dummodo quatuor in corollario sextæ requisita reperiantur in curuâ e r b.

PROPOSITIO VIII.

IN schemate eodem, arcus e r b esto ellipticus vel hyperbolicus vel parabolicus, quem in b tangat recta b h; ex puncto b educta sit b u perpendicularis ad b h: ex z bisectione rectæ b e excitata sit z s perpendicularis ad ipsam b e, occurrens rectæ a b in a.

Ostendendum est si in recta a b sumatur quodcunque punctum u extra b positum, & iunctâ rectâ u e ponatur ipsum u initium spiraceæ u d b respondentis arcui e r b iuxta leges generationis ipsius datas in prima propositione, ipsámque spiraceam tangat in b recta b f occurrens in f rectæ u g ad rectam h b parallelæ, rectam u f esse æqualem arcui elliptico vel hyperbolico, vel parabolico b r e.

Quoniam angulus h b a est rectus, & recta b e iacet inter rectas a b, b h, patet angulum a b e esse acutum, ac proinde punctum a iacere ad arcûs e r b partes cauas, rectásque a e, a b esse æquales. Præterea tangens b h habet proprietatem requisitam in corollario vltimo sextæ, vt in eiusdem propositionis progressu ostendimus. Ex corollario autem secundo quintæ patet omnem rectam ex u (etiam cum congruit puncto a) eductam esse non minorem recta u b. Igitur per corollarium secundum eiusdem sextæ recta u f est æqualis arcui e r b, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

IN eodem schemate arcus e r b esto spiralis vel spiraceus continuus, quem in b tangat recta b h; ex puncto b educta sit b u perpendicularis ad b h: ex z bisectione rectæ b e excitata sit z s perpendicularis ad ipsam b e, occurrens rectæ a b in a.

Ostendendum est si in recta a b sumatur quodcunque punctum u extra b positum, & iunctâ rectâ u e ponatur ipsum u initium spiraceæ u d b respondentis arcui e r b iuxta leges datas initio primæ, ipsámque spiraceam modo genitam tangat in b recta b f occurrens in f rectæ u g ad rectam b h parallelæ, rectam u f esse æqualem arcui e r b lineæ spiralis vel spiraceæ continuæ.

Istud iisdem verbis ostenditur quibus superior; hoc tantùm assumitur ex monstratis sub finem sextæ, si ex arcu b r e qui habeat tangentem prædictam proprietate requisita in corollario secundo eiusdem sextæ, gignatur spiralis vel spiracea, istam spiralem vel spiraceam habere eiusdem proprietatis tangentem in puncto b. Nam arcum b r e esse cauum ad partes rectæ b z ponimus, cùm ponamus esse continuum & sine angulis, idque etiam habeat spiralis & spiracea continua ex arcu vnde generata primùm fuit: ergo cùm segmentum e r b, & triangulum isosceles e a b habeant eandem basim b e, & ad illius partes oppositas iaceant, patet punctum a esse ad cauas partes arcûs e r b: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quamuis quatuor ista tantùm curuarum genera ad rectas reduxerimus nulla tamen alia excipi curua debet: nam angulosæ & non continuæ, componuntur ex non angulosis; ergo angulosarum dimensio nota est si sumatur per partes. Cæterùm tangens spiralem & spiraceam monstrata est in decursu sextæ habere illam proprietatem sine qua nulla prorsus foret demonstratio Archimedis, quam in propositione decima octaua adhibet, & quam nos eodem quidem sensu sed diuersis verbis attulimus in illa sexta propositione. Quòd si quis exigeret eius rei demonstrationem paulo ampliorem, ei satisfieri posset, sed non sine aliquot propositionibus quas breuitatis causa prætermittimus: qua etiam de causâ similem

aliam proprietatem ex generante arcu propagatam in generatam ſpiralem vel ſpiraceam quam ſub finem præſentis propoſitionis attulimus, accuratiùs demonſtrare neglexìmus.

COROLLARIVM II.

Dettonuillæus epiſtola ſcripta ad Anonymum & edita in eodem volumine vnà cum tribus aliis, primâ ad D. de Carcauy, alterâ ad D. de Huggens, tertia ad D. de Sulze, oſtendit mira ingenij ſubtilitate, Archimedeo veterúmque omnium ſtylo, *ſi ſit parabola cuius axis æquet dimidium peripheriæ circularis, ordinatim verò applicata æquet radium circuli eiuſdem, arcum parabolæ iſtius incluſum inter axem & ordinatim applicatam eſſe æqualem primæ reuolutionis ſpirali deſcriptæ in eodem circulo*, intelligendo primam reuolutionem, vt eam explicuit Archimedes iuxta annotata à nobis in primo corollario quartæ propoſitionis. Nos verò æquo Lectori æſtimandum relinquimus quanta ex hactenus demonſtratis acceſſio fiat huic Dettonuillæi inuento; quando quidem & arcui parabolico, & ſpirali aſſignamus ſuam rectam æqualem, ea prorſus methodo qua Archimedes peripheriæ circuli æqualem rectam deſignauit in decima quarta propoſitione ſpiralium; nec tantùm arcubus parabolicis vel ſpiralibus, ſed hyperbolicis etiam atque ellipticis, & quibuſcunque aliis curuis, quod ante nos nullus præſtitit quantum quidem ex libris quos viderimus editis affirmare licet. Idem Dettonuillæus initio illius epiſtolæ ait *ſuam demonſtrationem eſſe integram, exactéque abſolutam*; *eóque magis placére poſſe Anonymo, quòd vnica in hoc genere ſit, cùm nulla adhuc producta in lucem extet, quæ Antiquorum methodo duas diuerſi generis lineas conferat.* Iſtud ego non ſatis intelligo; nam Archimedes circuli perimetrum cum recta linea quæ diuerſæ planè naturæ eſt, iam olim contulit in libello de ſpiralibus, vti modo diximus.

COROLLARIVM III.

In ſchemate primæ propoſitionis explicandum vnum reſtat quod ſcripſit Gregorius à S. Vincentio ſub finem propoſitionis ſecundæ libelli de ſymbolizatione *iure merito ſpiralem, dici euolutam ſiue expanſam parabolam.* Si enim in figura primæ propoſitionis prima intelligas circulum euolui in rectas, ita vt integra peripheria b c b æquet rectam b c, & integra peripheria q t q æquet rectam q t, atque ità de aliis, patet circulum ſemidiametro a b deſcriptum euolui & expandi in triangulum a b c; ſimilique de cauſa ſpiralem figuram a m b d euolui expandique in parabolicum ſegmentum a e b d. Econtrariò pariter dicere poſſis triangulum rectilineum a b c cuius latus b c æquet peripheriam circuli ſemidiametro a b deſcripti circumuolui & contrahi in circulum, ſegmentumque a e b d parabolicum in figuram a c b d conuolui. Ne tamen inde inferas vel lineam a m e b parabolicam eſſe æqualem lineæ a m e b ſpirali; vel circulum expanſum eſſe æqualem conuoluto: non enim aſſeritur iſta circuli vtriuſque æqualitas, ſed rationum ſimilitudo atque analogia in plurimis. Præterea aliud monere debemus vt hallucinationis omnis anſa præcidatur, eundem Grego-

rium à S. Vincentio in calce propopositionis vigesimæ tertiæ mentionem facere cuiusdam spiralis ellipticæ quam ostendit esse trientem ellipseos, sicuti spiralis circularis est triens circuli : illa tamen spiralis linea alterius longè diuersæ est generationis ab ea quam in prima huius libelli tradidimus ; licet enim Gregoriana & nostra figura spiracea respondentes eidem ellipsi in hoc conueniant quod singulæ sint triens ellipseos, discrepant tamen plurimum, nam recta, quæ in termino tangit lineam spiraceam, nostram, ex perpendiculari excitatâ à spiraceæ initio ad rectam connectentem puncta initij & termini, abscindit portionem æqualem peripheriæ siue perimetro ellipseos, at verò tangens spiralem ellipticam lineam Gregorianam, non abscindit nisi rectam æqualem dimidio peripheriæ circuli, cuius diameter æquet axem longiorem ellipseos. Diuersissimæ igitur sunt istæ lineæ, verúmque adeo est, neminem Autorum qui quidem à nobis perlecti sunt, inuenisse rectam æqualem perimetro ellipseos, vel cuiuis parti eiusdem perimetri.

COROLLARIVM IV.

Dum P. Athanasius Kircherius Musurgiæ suæ mirificæ tom. 2. pag. 282. quem edidit Romæ anno 1650. tradit methodum describendæ spiralis lineæ ex peripheriæ circuli portionibus certa quadam arte dispositis, manifestum est eum non agere de spirali Archimedea, sed de quadam conuoluta linea quæ reflectendæ voci aptissima sit. Etenim si Archimedea spiralis componeretur ex illis peripheriæ portionibus, nota esset methodus inueniendi tangentem spiralis, vi cuius quadratura absoluta circuli prodiret, vt ex hactenus demonstratis liquet. At verò p. 303. & 304. vbi habetur istud ipsum quod Dettonuillæus proposuit theorema *de æqualitate perimetrorum parabolæ & spiralis*, apertum est eum designare Archimedeam: sed optaui iam pridem vt illius demonstrationem apposuisset integram; nam quod scribit, *illam dependere ex diuersis motibus*, *queis vtraque similiter & æqualiter describitur* non satis est ad cogendum Geometram, nec ad hoc vt quæ desunt demonstrationi, inde colligantur facilè. Ad hos etiam motus sed obiter recurrit P. Mersennus in libro Hydraulicorum, vt testatur Dettonuillæus ipse, qui *hac per motus illos demonstrandi ratione non omnino conuinci intellectum*, admonet. Quoniam verò hunc Musurgiæ tomum præ oculis nunc habeo, his subdere lubet nescire me, cur Doctissimus ille Autor pag. 280. vbi tradidit modum *describendæ parabolæ vnico ductu fili*; addiderit modum inueniendi focum O, cùm in ipsius schemate focus sit iam datus vel assumptus, ipsum nempe punctum L cui affigi filum methodus iubet. Ista enim methodus non describit nisi eam parabolæ partem quæ vltrà focum ad partes verticis iacet; ita verò describit, vt figat filum in eo puncto quod parabolæ focus erit. Filum enim ponitur duplum sagittæ B L quæ iacet inter verticem B & punctum L cui nectitur filum, ponitur verò æquale ordinatim applicatæ L G ad axem B L; ergo cùm vt B L ad L G ordinatim applicatam, ita sit ipsa L G ad latus rectum, vt ex vndecima

decima primi conicorum liquet; erit B L quarta pars lateris recti, ac proinde punctum L erit focus parabolæ, vt demonstratum est à Vitellone.

PROPOSITIO X.

Ostendere ex analogia conorum euoluti & conuoluti, proportionem eandem colligi coni ad cylindrum eiusdem baseos & altitudinis, quæ alia methodo inuenta ab Antiquis extat, nempe trientis ad assem. Proportionem verò superficiei coni recti ab basim eandem quoque erui cum ea quam Archimedes demonstrauit propositione 15. libri quinti de sphæra & cylindro, videlicet lateris trianguli per axem ad semidiametrum baseos.

In secunda propositione (*Fig.* 49.) monuimus sicuti triangulum a b c conuoluitur in circulum a b c, ita cylindraceum prisma altitudinis a D, baseos triangularis a b c conuolui in cylindrum altitudinis eiusdem baseos circularis a b c: & ita pariter homœoconicum cuius eadem sit altitudo a D, basis triangularis a b c, vertex D, conuolui in conum cuius idem sit vertex D, basis circularis a b c. Antiqui igitur inuenerunt conum esse trientem cylindri eiusdem baseos & altitudinis, quod nos etiam nostra methodo demonstrauimus in quarti libri tetragonismicorum corollario quinto propositionis decimæ octauæ. Id verò etiam seruatur in cono euoluto & conuoluto; nam homœoconicum est triens prismatis vt in illo loco tetragonismicorum ostendimus, ergo cùm homœoconicum sit conus expansus & euolutus, illa proprietas competit cono in vtroque statu, quod erat primum ex demonstrandis.

Rursus ex vertice D educantur rectæ D c, D b; patet coni recti explicati & euoluti superficiem esse triangulum d c b. Cùm igitur recta D a sit ad planum a b c perpendicularis, erit angulus D a b rectus; cúmque angulus c b a ponatur quoque rectus, erit angulus c b D rectus; ergo triangula c b a, c b D eadem basi c b prædita sunt vt altitudines b a, b D: ergo superficies recti expansi est ad basim a b c vt recta D b ad a b. Atqui in cono conuoluto recta D b est latus trianguli per axem a D, & recta a b est semidiameter baseos circularis: ergo superficies coni expansi ad basim, est vt latus trianguli per axem recti coni conuoluti, ad semidiametrum baseos, quod erat alterum ex demonstandis.

PROPOSITIO XI.

Esto planum quodcunque b a c (*Fig.* 53.) in quo b a, a c secent se ad rectos angulos; ex a excitata ad planum sit perpendicularis x a. In plano x a c intelligatur quæcunque figura a x z c c insistens rectæ a c ad positionem rectæ a x, cuius limbus x z e sit quælibet linea curua vel recta, vel mixta quomodocunque. Hæc figura vocetur ge-

neratrix. Intelligatur in plano b a c *supposito* (ita enim vocetur) intra parallelas b a, c d describi quæcunque linea b h o recta vel curua vt paulò antè, eius verò proprietas hæc sit vt rectæ b a parallelis non occurrat nisi in vno puncto. Ad positionem plani x a b intelligatur figura c e x a transferri in cylindraceam superficiem E o b l insistentem lineæ b h o, descriptam motu rectæ æquidistantis perpendiculari a x; modus autem transferendi sit ille ipse quem in decima quinta secundi libri exposuimus, ita vt rectæ a x, b l sint in eodem plano x a b l, sintque a x, a l æquales, & ducto quouis alio z g h ad planum x a b parallelo, dimetientes z g, h m sint æquales; ista figura vocetur *generata*. Sit in eodem supposito plano alia quæuis linea b q r ita se habens ad b h o vt quæcunque q h, s t rectæ b a æquidistantes ducantur, portio q s sit maior portione h t, idque perpetua lege seruetur, vel certè sit minor, dummodo stata lege sit minor quomodocunque ducantur ad rectam b a parallelæ q h, s t: lineæ verò b q r insistat figura altera pari pacto generata.

Ostendendum est generatarum superficierum illam esse maiorem quæ maiori basi insistit, minorem verò quæ minori.

Quoniam enim altitudines h m, t u sunt æquales altitudinibus quæ insistunt punctis s, q, eáque æqualitas dimetientium perpetua lege obseruatur ad positionem plani x a b; necesse est vt illa superficies sit maior, quæ maiori basi superstat, illa minor quæ minori. Hoc enim ex se euidens est, basis namque magis perpetua leue extensa, posita pari altitudine dimetientium sibi æquidistanter respondentium, maius spatium gignit; hoc verò si euidens non est, vix quicquam aliud est. Ne tamen tyrannidem vllam exercere velle in ingenia videamur, reponatur inter postulata; tale enim est istud theorema, vt saltem illum locum ei negare non debeamus: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Iisdem manentibus (*Fig.* 53.) ex recta c a abscindatur quælibet a A, & compleatur parallelogrammum a A B b.

Ostendendum est si maneant superficies generatæ vt suprà, & sustententur plano b a c vt sunt ad illud erectæ, æquiponderans figuræ erectæ super basi maiore esse maius æquiponderante figuræ erectæ super minore, si planum b a c intelligatur suspendi libræ axe b a, sustentaculo A B.

Quoniam enim illæ superficies ita ponuntur esse inter se, vt quæcunque s t axi b a parallela ducatur, dimetientes incidentes punctis t, s sint æquales, & vna superficierum sit per superiorem constanti lege maior

alia, necesse est vt cùm ipsæ magnitudines sint maiores, earum maior maioris sit ponderis, cùm in reliquis ad pondus facientibus non vincatur à minore superficie, eo quòd in pari ab axe interuallo æquales ponantur habere altitudines, siue perpendiculares ad planum b a c. Istud euidens mihi est; sed ponatur, si placet Lectori, inter postulata: ergo &c. quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

In sexta primi tetragonismicorum ostendimus superficies illas esse æquales cuicunque lineæ insistant, quæ ad positionem rectæ cuiuslibet a b sint condicta ratione æquales: quod videtur repugnare superiori & præsenti propositioni; volumus enim inter figuras generatas *eam esse maiorem quæ maiori limbo insistit, licet ad positionem certæ cuiusdam rectæ sint æquales. Respondemus nihil ista secum pugnare. In illo enim libro agimus de figuris quæ in eadem sunt superficie plana, hic verò de superficiebus diuersis insistentibus eidem plano. Quod si concipias illas superficies quæ insistunt inclinari in planum b a c ad positionem plani x a b & illi congruere, tunc ita inclinatæ superficies erunt æquales per illam sextam, quamuis erectæ sint inæquales vt hîc ostendimus.*

PROPOSITIO XIII.

Iisdem manentibus (*Fig.* 54.) sit linea b t h o recta, vel composita ex rectis: figuræ a c e x quadratrix figura sit a f e c, quæ generetur librâ grammica a c suspensâ ex a, perpendiculo a x, brachio quocunque a A, ita vt sicut est A a brachium ad quamcunque rectæ a c portionem a g, ita g z dimetiens suspensæ parallela rectæ a x se habeat ad g f dimetientem quadratricis. Hæc quadratrix intelligatur transferri & commutari modo supra præscripto in generatam quæ insistat compositæ b t h o.

Ostendendum est libræ axe b a, sustentaculo B A, æquiponderans generatæ figuræ o n m u l b t h esse translatam figuram n y i b t h o: ac proinde quadratricem figuræ suspensæ translatæ esse ipsam quadratricem pariter translatam.

Istud demonstratur ex septima secundi tetragonismicorum in hunc modum. Linea b t h o composita sit ex quotcunque rectis b t, t h, h o: recta b t vel est parallela rectæ a c, vel eam secat. Si est parallela patet figuram u t b l generatam, esse similem & æqualem generatrici, itemque quadratricem b i t esse similem & æqualem generatrici a p r: ergo si t b, a r æquidistant translata b i t est quadratrix generatæ t u l b. Si t b secat rectam c a, sectionis punctum sit s; secet autem rectam A B in E: patet itaque rectam t b ad r a esse vt rectam b s ad a s, vel b E ad A a: ergo vt A a ad a r, ita erit b E ad b t; sed vt A a brachium ad a r, ita est r D ad r p, hoc est, t u perpendicularis basi t b ad t i: ergo vt b E brachium libræ grammicæ E t, ad longitudinem b t, ita est suspensæ u t b l dimetiens.

ut ad t i dimetientem figuræ t i b: ergo per ſeptimam ſecundi tetragoniſmicorum figura t i b eſt quadratrix figuræ generatæ t u l b, ſiue recta t b ſecet rectam c a ſupra rectam b a ad partes c, ſiue infra. Eadem verò ſeruatur demonſtrandi methodus pro aliis quotcunque rectis t h, h o: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIV.

IIſdem (*Fig.* 55.) manentibus figura b u t l h m o ſit curua, & ſit baſis generatæ ex genitrice c e z x a vt in ſuperioribus, ſiue caua arcûs illius ſint ad partes rectæ a c, ſiue non ſint; ſiue ex parte ſint, & ex parte non ſint,

Oſtendendum eſt generatam figuram illi inſiſtentem procreatam ex generatrice c e z x a habere pro quadratrice generatam aliam figuram illi inſiſtentem procreatam ex quadratrice a p f e c.

Iſtud oſtenditur Geometrarum veterum more, ſicuti & ſeptima ſecundi tetragoniſmicorum. Generata ex quadratrice a p f e c inſiſtens curuæ b u t l h m c ſit æqualis ſpatio E; ſpatium æquiponderans ſit F. Si igitur ſpatium F quod æquiponderat generatę ex generatrice c e z x a, non eſt æquale ſpatio E, erit vel eo minus vel maius. Sit primò ſi fieri poteſt minus, & duo ſimul F, H æquent totum E. Aſſumo duo genera rectarum primum eſt ſubtendentium, quæ videlicet ſubtendunt quotcunque arcus æquales in quos curua diuiſa fuerit, quales in ſchemate ſunt b t, t h, h o; alterum tangentium quæ eoſdem arcus in extremis punctis tangunt, ita vt arcus quilibet b u t ſubtendatur rectâ b t quæ eſt baſis trianguli b i t; duæ autem b i, i t tangant arcum in punctis extremis b, t, vel certè non ſecent niſi in punctis b, t, cadantque ad arcûs b u t conuexa. Ex Archimedeo aſſumpto liquet ſubtenſam b t eſſe minorem arcu b u t; duas verò ſimul tangentes b i, i t eſſe maiores eodem arcu b u t. Igitur ex demonſtratis in ſuperiore, figura c e f p a tranſlata in omnes ſubtenſas dabit quadratricem generatæ ex c e z x a inſiſtentis ſuper iiſdem ſubtenſis: eodemque pacto tranſlata in omnes tangentes exhibebit quadratricem generatæ ex c e z x a inſiſtentis ſuper ipſis tangentibus. Prætereà ex vndecima quadratrix inſiſtens tangentibus erit maior quadratrice inſiſtente ſubtenſis, & generata ex c e z x a inſiſtens tangentibus erit quoque maior, generata inſiſtente ſubtenſis. Tertiò ex propoſitione duodecima quadratrix generatæ inſiſtentis tangentibus erit maior quadratrice inſiſtente arcubus, & quadratrix inſiſtens ſubtenſis erit minor quadratrice inſiſtente arcubus. Quartò ſi arcus vnius diuiſionis diuidantur iterum bifariam & ſinguli ſubtendantur ſuis rectis, & ambiantur ſuis tangentibus, aſſumimus cum Archimede & aliis omnes ſimul ſubtenſas poſterioris diuiſionis eſſe maiores omnibus ſimul ſubtenſis prioribus: eademque ratione omnes ſimul tangentes poſteriores eſſe minores omnibus diuiſionis anterioris. Vnde ſequitur quadratricem c e f a tranſlatam in omnes poſteriores

subtensas, esse maiorem quadratrice translatâ in prioris diuisionis subtensas: similique pacto quadratricem translatam in posterioris diuisionis tangentes esse maiorem quadratrice translata in tangentes prioris diuisionis. Quintò denique ponimus cum iisdem in tot arcus posse diuidi curuam, vt E genita ex c e f a translata in ipsos arcus & illis insistens excedat quidem quadratricem insistentem subtensis, sed excessu qui minor sit spatio H. Pari pacto vt eadem E sit quidem minor quadratrice insistente tangentibus, sed differentia possit esse minor qualibet data, multiplicatis in infinitum diuisionibus arcuum.

Hoc ita constituto ostenditur spatium F non esse minus spatio E. Diuidi intelligatur in tot arcus vt excessus sit minor quàm H: ergo quadratrix insistens illis subtensis erit maior quàm F, quod est absurdum cùm per vndecimam a c e f translata in lineam maiorem sit maior translatâ in minorem; composita autem linea ex arcubus est maior compositâ ex subtensis: non igitur spatium F est minus spatio E vel quadratrice c e f a translata in arcus.

Secundò si fieri potest, spatium F esto maius spatio E, & excessus sit H, ita vt duo simul E, H æquent totum F. Intelligatur in tot arcus diuidi curua vt excessus quo quadratrix c e f a translata in tangentes superat eandem translatam in arcus, sit minor quàm magnitudo H. Igitur ista quadratrix est minor spatio F, siue quadratrice c e f a translatâ in arcus, quod est absurdum, cùm per vndecimam a c e f translata in lineam maiorem sit maior translatâ in minorem: composita autem linea ex tangentibus est maior compositâ ex arcubus: non igitur spatium E vel quadratrix c e f a translata in arcus, est minor æquiponderante spatio F: sed neque est maior vt ostendimus: ergo quadratrix c e f a translata in lineam curuam b u t l h m o est æqualis spatio quod æquiponderat generatæ ex figura c e z x a insistenti super curua, quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

In istis quatuor propositionibus notari diligenter debet planum a c e poni rectum ad planum suppositum b a c, & rectam c e perpendicularem ad planum b a c, ad hoc vt (quod vis demonstrandi exigit) rectæ translatæ in puncta b, t & alia eiusmodi sint perpendiculares ad planum suppositum; ac proinde & ad rectas b t, b i ex definitione tertia vndecimi Elementorum Euclideorum.

PROPOSITIO XV.

Iisdem manentibus curuæ b u t l h m o intelligatur recta b s æqualis, & diuisa in tot partes æquales b d, d q, q s quot sunt aut intelligi possunt arcus b t, t h, h o æquales; ad rectam b s excitentur ex punctis d, q, s rectæ d L, q M, s z æquales perpendicularibus translatis r p, g f, c e figuræ c e f p a (eadem verò est ratio de quacunque alia translatâ) & illæ omnes terminentur linea z M L b.

Ostendendum est figuram b s z M L expansam esse æqualem figuræ translatæ in arcum b u t l h m o generatæ ex figura quacunque genitrice c e f p a.

Istud ostenditur methodo superioris; nam omnes subtensæ designatæ constant rectam b P minorem ipsa b s, & omnes tangentes designatæ constant rectam b R maiorem recta b s; igitur b P diuidatur in portiones æquales subtensis b t, t h, h o & ex illis excitentur perpendiculares æquales ipsis d L, q M, s z, fiatque b P basis figuræ expansæ respondentis illis quæ rectis b t, t h, h o insistunt, ita vt illa quæ rectæ b t insistit competat illi primæ portioni rectæ b P, quæ ex recta b P abscissa, est æqualis ipsi b t, & ita in aliis fieri intelligatur. Simili pacto intelligatur b R diuidi ex ordine in partes æquales singulis tangentibus, & figuræ quæ tangentibus b i, i t &c. insistũt, intelligantur transferri in partes baseos b R sibi ex ordine respondentes. Patet figuram insistentem minori b P esse minorem figura insistente arcubus; & figuram insistentem maiori b R esse maiorem figura insistente arcubus. Patet inquam quia quando bases b P, b R sunt inæquales & illis insistunt figuræ b G C R, b V I P ita constitutæ vt perpendiculares C R, I P sint æquales, & si ad libitum agatur V G parallela basi occurrens in V limbo insistentis super minore b P; in G verò limbo insistentis super maiore b R; ductis perpedicularibus V N, G T ad bases b P, b R recta b N sit minor recta b T; ostenditur facillimè figuram maioris baseos esse maiorem figurâ minoris.

Hoc autem constituto modus demonstradi est simillimus; ostenditur enim figura insistens arcubus neque maior, neque minor esse figura insistente basi b s; ergo est æqualis, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Iisdem manentibus (*Fig.* 55.) sit a c e x quadratum, sintque a A, a c æquales.

Ostendendum est lineam a p f e esse rectam, nempe diametrum parallelogrammi a c e x. Expansam verò z M L b s ita esse constitutam vt si iungatur recta L t, vel M h, vel z o, & ita de aliis, iaceant in directum ambæ l t, t r; M h, h g; z o, o c; & idem euenire in aliis quibuscunque.

Rectam a e esse diametrum parallelogrammi a c e x patet ex methodo duodecimæ tertij libri tetragonismicorum; nam vt A a vel a c brachiũ ad longitudinẽ a g, ita ex generatione quadratricis est g z vel c e ad g f: sed si a e sit recta complens triangulum a c e, vt est a c ad a g, ita erit c e latus trianguli ad rectam per g parallelam ipsi c e, vt ex Elementis Euclideis patet; ergo quadratrix linea a f e, est in hoc casu diameter parallelogrammi a c e x. Quoniam verò rectæ d b, b t ponuntur æquales, & perpendicularis r p ponitur æqualis ei quæ insistit puncto t, eidem verò po-

nitur æqualis dL; ergo rectæ d L, r p sunt æquales inter se. Quoniam verò triangula a r p, a c e sunt similia, & latera a c, ce istius ponuntur æqualia, erunt quoque illius latera a r, r p æqualia; ergo recta d L æqualis rectæ r p, erit quoque æqualis rectæ a r: ergo cùm d L, a r æquidistent & sint æquales, si iungatur L r æquidistabit basi d a, sed eidem ex constructione æquidistat r t: ergo rectæ L r congruit recta r t; ergo rectæ L t, t r iacent in directum; idem verò eodem pacto ostenditur in aliis: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam trianguli a c e quadratrix per duodecimam tertij tetragonismicorum est ceratoides parabolica a c e ρ λ comprehensa sub arcu parabolæ a λ φ e (quam tangit recta a c, & cuius axis est a x) & sub rectis a c, c e; liquet ex demonstratis huius quadratricis mixtæ quadratricem mixtam esse ceratoidem parabolicam translatam. Quod si tertia quadratrix mixta quæreretur, transferri deberet tertia inuenta in quadrato a x e c, & ita procedi posset ad quartam, quintam & reliquas in eodem ordine quadratrices, quarum omnium quadratura habetur ex quadragesima quarta sequente.

DEFINITIONES.

Figuram genitam ex quadrato c e x a & translatam in arcum b u t l h m o appello *parallelogrammum mixtum*, & quamlibet eius portionem parallelogrammum e c g z translatam appello eodem nomine. Quadratricem a c e f pari methodo translatam voco quadratricem figuram *mixti parallelogrammi*, vel breuius *quadratricem mixtam*, vel etiam *superficiem vngularem aut cuneatam*. Figuram verò z M L b s in quam expanditur, *quadratricem expansam* nomino.

PROPOSITIO XVII.

Iisdem manentibus (*Fig.* 55.) si vt est parallelogrammum mixtum ad quadratricem mixtam ita fiat brachium A a ad rectam a D abscissam ex a c, & per O agatur planum parallelum plano x a b, itemque aliud per perpendicularis a x bisectionem quod æquidistet plano supposito b a c.

Ostendendum est grauitatis centrum parallelogrammi mixti esse in recta quæ est communis sectio duorum istorum planorum iam ductorum: grauitatis verò centrum curuæ lineæ quæ est latus parallelogrammi suspensi esse in recta O X parallelà ad rectam a b, & in eo eius puncto in quod cadit perpendicularis demissa ex grauitatis centro parallelogrammi mixti.

Quoniam ex decima quinta propositione, parallelogrammi mixti quadratrix est illa figura quam quadratricem mixtam appellamus, patet

lege libræ reciproca vt est suspensum, nempe parallelogrammum, ad quadratricem illi respondentem, ita esse brachium A a, ad rectam a O. Igitur planum per O ductum æquidistanter perpendiculo plano x a b transit per grauitatis centrum parallelogrammi mixti; atqui planum plano supposito parallelum transit per grauitatis centrum superficiei: id enim ostenditur simili methodo qua à Commandino & aliis monstratur centrum grauitatis cylindri vel cylindracei cuiuslibet esse in plano distante æquo interuallo vtrinque à basibus oppositis eiusdem: ergo &c. quod erat vnum ex demonstrandis.

Rursus sicut in cylindro & cylindraceo quouis omnes sectiones basi parallelæ sunt similes & æquales, vt demonstratum extat apud Serenum pro cylindro, & ratio eadem conuincit pro quibuslibet cylindraceis, ita manifestum est omnes parallelogrammi mixti sectiones esse æquales similes & parallelas basi eiusdem parallelogrammi. Item sicut in cylindro & cylindraceo recta axi parallela incedens per grauitatis centrum baseos incedere ostenditur per sectionum æqualium, similium, & parallelarum centra, ita hic recta parallela axi a x incedens per grauitatis centrum parallelogrammi mixti, incedit quoque per grauitatis centrum baseos; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Si circa axem a c manentem intelligatur circumuolui linea curua b u t h m o donec ad partes oppositas congruat plano b a c, & relinquere ad easdem partes sui vestigium, patet centrum grauitatis eiusmodi lineæ curuę ita duplicatę esse in puncto O. Quod etiam de parallelogrmmo mixto pari ratione duplicati intelligi debet; nempe centrum eius esse in perpendiculari ad planum suppositum excitata ex puncto O, eiusque distantiam ab eodem puncto O esse ęqualem dimidio rectę a x vel a c.

PROPOSITIO XVIII.

Iisdem manentibus (*Fig. 56.*) iungatur recta c x diameter altera quadrati vel cuiuslibet alterius rectanguli e c a x, & ex A c producta abscindatur recta c q æqualis rectæ a c, vt triangulum c f x a sit quadratrix figura rectanguli c e x a, prout ex duodecima tertij libri liquet. Eiusmodi quadratrix c f x a intelligatur transferri iuxta methodum vndecimæ in curuam b t h o. Recta g h æquidistet rectæ b a, & incedat per grauitatis centrum curuæ b t h o.

Ostendendum est sicut est quadratrix mixta brachij q c ad quadratricem mixtam brachij a A, ita esse rectam c g ad rectam g a.

Istud apertum est ex septima secundi tetragonismicorum, & ex superiore. Nam ex ista habemus si planum parallelum plano x a b incedens per centrum grauitatis parallelogrammi mixti, faciat in supposito plano, sectionem g h, quę ex Elementis Euclideis ęquidistabit rectę a b, in eiusmodi

modi recta g h esse grauitatis centrum curuę b t h o; ex illa verò habemus vt est quadratrix mixta brachij a A ad parallelogrammum mixtum, ita esse rectam a g ad A a vel q c; & vt mixtum illud parallelogrammum ad quadratricem brachij q c, ita esse eandem q c ad c g: ergo ex æquo vt est quadratrix mixta brachij a A ad quadratricem mixtam brachij c q, ita est recta a g ad g c; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ex nonâ secundi tetragonismicorum patet duas simul quadratrices mixtas esse æquales parallelogrammo mixto. Quòd si libræ brachium non sumeretur æquale rectæ a c, sed inæquale vt a T; & ipsi a T æquale c D; vt est recta c a ad a T, ita esse patet duas simul quadratrices illis respondentes ad parallelogrammum mixtum.

COROLLARIVM II.

Intelligatur eidem curuæ insistere parallelogrammum mixtum respondens parallelogrammo rectilineo e c a x ad positionem plani x a b, & c e a triangulum transferri simili pacto in curuam b h o, eiusque dimetientem respondentem curuæ puncto cuilibet h esse rectam P h æqualem & parallelam rectæ g i. Intelligatur præterea triangulum aliud a b B erigi super planum b a c & ad illud stare rectum; angulúsque b a B sit æqualis angulo c a e: deinde triangulũ a b B ita erectum intelligatur transferri in curuam b h o ad positionem plani x a c, eiúsque dimetiens respondens puncto h sit h N æqualis & parallela rectæ l M. Intelligatur denique brachio A a perpendiculo a b gigni quadratrix trianguli a b B translati in curuam b t h: brachio verò a n latere quadrati A a n E, gigni quadratrix trianguli a c e translati in curuam b t h. Ex demonstrata methodo ostendentur duæ istæ quadratrices translatæ esse vna & eadem. Quoniam l a, l M sunt æquales, itemque l M, h N, patet rectas l a, h N esse æquales; eadémque de causa rectas a g, h P. Quoniam igitur ex generatione quadratricis vt a A brachium æquale brachio a n ad longitudinem a g, ita est h N vel l a ad λ h dimetientem quadratricis secundæ mixtæ respondentis triangulo b a B translato; rectangulum contentum sub a A & sub h λ erit æquale rectangulo sub mediis a g, h N: sed recta h N est æqualis rectæ l a vel h g: ergo rectangulum contentum sub a A & h λ rectis est æquale rectangulo a g h vel a l h. Rursus quoniam vt n a brachium ad a l longitudinem, ita est h P vel a g ad dimetientem quadratricis respondentis triangulo c a e translato; ergo rectangulum sub extremis erit æquale rectangulo sub mediis, hoc est rectangulo l a g: sed eidem l a g æquale ostendimus rectangulum contentum sub h λ & sub a A vel a n; ergo rectangulum sub a n & sub dimetiente illius quadratricis est æquale rectangulo sub a n vel a A & sub h λ contento. Ergo triangulorum translatorum in curuam b h o quadratrix est vna & eadem, si quadratrices gignantur brachiis præscriptis. Vnde patet proprietatem in vigesima tertij libri de-

monstratam habere locum in istis triangulorum ita translatorum quadratricibus.

PROPOSITIO XIX.

Iisdem manentibus (*Fig.* 56.) in plano x a b intelligatur descripta curua b f m ita respondens curuæ b h o vt si in recta b a sumatur quodcunque punctum l, & per l ducantur h l, l f parallelæ rectis a c, a x, occurrentes limbis b t o, b f m in h, & f; ipsæ l h, l f sint inter se æquales. Per m ducatur m y parallela rectæ a x, & constructo quadrato A a n E, b n librâ suspensâ ex a perpendiculo a x, brachio a n, figuræ b f m quadratrix b p l ita respondeat, vt sicut est brachium a n ad a l quamcunque portionem rectæ a b, ita sit f l dimetiens figuræ b f m y ad l p dimetientem quadratricis b p l.

Ostendendum est ex figurâ b f m y generatrice, ad positionem plani x a c generari in superficie cylindracea insistente super curuâ b t h o, figuram eandem quæ ex translatione trianguli a c e ad positionem plani x a b: ac proinde quadratricem b p l translatam, esse quadratricem quadratricis mixtæ, positâ rectâ a A axe libræ planæ, perpendiculo plano x a A, sustentaculo n E.

Quoniam perpendicularis insistens puncto h est æqualis rectæ g i, ipsa verò g i rectæ g a, perpendicularis insistens puncto h erit æqualis rectæ h l, ac proinde & rectæ l f: ergo figura b f m y translata generat quadratricem mixtam, quod erat primò demonstrandum. Alterum verò ex his sequitur posita veritate propositionis decimæ quartæ: ergo &c. quod erat demonstradum.

COROLLARIVM I.

Si curua b h o intelligatur vna cum plano o h b a circumuolui circa axem b a, superficies peripherica quam describet, talis (vt patet) est vt si secetur plano ad planum x a c parallelo ducto per l quodlibet punctum rectæ a b, eius sectio sit peripheria circuli descripti semidiametro l f, centro l. Cùm igitur peripheriæ inter se sint vt semidiametri, planum parallelum plano x a c ductum per centrum quadratricis mixtæ, transibit vt patet per centrum periphericæ superficiei: si igitur vt quadratrix mixta ad quadratricem b p l translatam, ita fiat brachium n a ad rectam a l, in plano f l h erit grauitatis centrum tam quadratricis mixtæ, quàm periphericæ superficiei.

COROLLARIVM II.

Quoniam quadratrix mixta genita brachio A a, perpendiculo a b, repræsentat superficiem periphericam genitam circa axem b a motu arcûs b h o: id est, ad positionem rectæ a c, secantur proportionaliter quadratrix illa mixta & superficies peripherica; & quoniam in circuli quadrante ista quadratrix mixta est inuolucrum cunei primi noti vel vngulæ, re-

& Gregorius à S. Vincentio libri noni propositione septuagesima sexta contendit *in omnibus superficiem Vngularem conuenire cum sphaericâ*; quod vtique generale est pro omnibus quadratricibus mixtis, vt iam annotauimus; illæ enim perinde sunt vngulares comparatæ ad suum cylindraceum à quo abscinduntur per planum ad basim cylindracei ipsius inclinatum.

PROPOSITIO XX.

ESto b h c a (*Fig.* 57.) quadrans circularis, ex quo genita sit paruæ semicycloideos pars superior c r p a, habens basim ap, axem ac: arcui b h c insistat parallelogrammum mixtum e c h b l m, eiusque quadratrix mixta b i e c h.

Ostendendum est istam quadratricem esse æqualem figuræ c r p a, ita vt si sumatur quodlibet parallelogrammum m h c e, & per h ducatur h r parallela basi b a, occurrens limbo c r p in r, & per r ducatur r s parallela rectæ a c, occurrens basi in s, quadratrix i h c e sit æqualis figuræ a c r s; & quadratrix b i h, figuræ r s p.

Istud patet ex corollario decimæ quintæ secundi libri; ibi enim ostendimus ex triangulo rectangulo a c e translato gigni superficiē b i e c h cunei primi noti: atqui illa superficies est quadratrix mixta ex definitionibus decimæ sextæ: superficiei autem isti esse æqualem semicycloidem superiorem liquet ex secundi libri octaua, id quoque generaliter constat ex decima sexta præsentis libri: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam decima sexta præsentis libri modò laudata id generaliter demonstrat quæcunque curua sit basis rectanguli mixti, & quadratricis ipsius, patet circa istud nihil affirmari incautè, quamuis res sit plena periculi, vt monuimus in illius octauæ corollario. Ex nona verò eiusdem apertum est completo rectangulo r h z s, portionem b i h æqualem esse rectangulo a b z, & portionem i h c e rectangulo b a z.

PROPOSITIO XXI.

IIsdem manentibus (*Fig.* 57.) peripheriæ b c u semicirculari insistat parallelogrammum mixtum b l e f d u c; sit a n dupla secundi termini progressionis subadiunctæ, quam initio tertij libri definiuimus.

Ostendendum est punctum n esse grauitatis centrum peripheriæ b c u, siue quod idem est ex decima septimâ, planum per n incedens parallelum plano x a b transire per grauitatis centrum parallelogrammi mixti b i e f d u c. Rectam verò a c ad a n esse, vt arcum c h b ad radium c a.

Quoniam quadratrix b i c u, vel bis figura a c r p per nonam secundi, vel duodecimam primi, est æqualis duplo radij a c vel a A, suspensum autem parallelogrammum mixtum b l m e f d u c, est vt ex tertia primi li-

quet, æquale circulo, semidiametro a c descripto: igitur suspensum ad æquiponderans est vt terminus secundus progressionis perspectæ ad duplum termini primi. Rursus ex lege reciproca libræ vt est suspensum ad æquiponderans, ita est libræ brachium A a ad longitudinem a n; ergo cum a A radius sit primus subadiunctæ progressionis, erit recta a n dupla secundi termini eiusdem subadiunctæ, quod erat demonstrandum primo loco.

Alterum verò ita ostenditur; quoniam c a est primus terminus subadiunctæ progressionis, & a n est bis secundus; vt autem primus subadiunctæ ad bis secundum, ita est secundus adiunctæ (vt ex earum definitione patet initio tertij traditâ) ad bis primum, ita quoque erit dimidium adiunctæ ad primum. Atqui secundus adiunctæ est peripheria b c u; ergo dimidium illius erit b h c quadrans totius circularis: ergo vt c a recta ad a n, ita c h b quadrans peripheriæ descriptæ centro a, semidiametro a c, se habet ad rectam c a; tres ergo lineæ c h a, c a, a n sunt proportionales, & vt c h b ad c a, ita est c a ad a n, quod demonstrandum supererat.

COROLLARIVM I.

Si vt latus quadrati ad diametrum eiusdem, ita fiat recta a n dupla secundi subadiunctæ termini ad a o, ex methodo præsentis ostendetur punctum o esse grauitatis centrum curuæ h c r, posito quod c a ad a g sit potestate vt binarius ad vnitatem. Atque hac methodo inuenientur centra grauitatis quorumcunque arcuum, eorumque distantia à puncto a definietur per secundum terminum subadiunctæ progressionis, vel per rectam illi secundo termino proportionalem in ratione cognitâ.

COROLLARIVM II.

Subtilissimum Guldini nostri inuentum, quod omnes suspiciunt & sequuntur, hic præteriri non debet, vt ex eo & confirmemus nostras demonstrationes, & inueniamus centra grauitatis pro sectoribus circuli methodo diuersa ab ea quam in elementis nostris tradidimus, & qua vsi sumus in calculo problematum Anonymi edito sub ipsum huius anni 1659. initium. Esto igitur n centrum grauitatis arcûs b c u semicirculi, vel etiam cuiuscunque alterius peripheriæ h c R subtensæ recta h R ad radium a c ordinatim vtrinque applicatâ. Ostendit ille primus si vt ternarius ad binarium ita fiat recta a n ad a g, punctum g esse centrum sectoris comprehensi sub illo arcu, & sub semidiametris a h, a R. Inde verò patet ex grauitatis centro n arcûs circularis cuiuscunque haberi centrum grauitatis circuli sectoris eidem arcui respondentis; si enim vt ternarius ad binarium, ita fiat n a ad a g; erit g centrum sectoris Hinc etiam ostenditur consonantia nostrarum & Guldinianarum demonstrationum: nam si n sit grauitatis centrũ peripheriç totius b c u; cùm a n sit bis terminus secundus subadiunctę progressionis, vel sex trientes termini eiusdem secundi; vt ternarius ad binarium, ita erunt sex trientes, ad quatuor trientes: ergo centri grauitatis pro semicirculo distantia à centro a est quatuor trientes

secundi termini subadiunctæ, quos illi attribuimus in illo calculo: ergo nunc demonstrata consonant & principiis nostris in illo calculo adhibitis, & demonstratis Guldinianis.

COROLLARIVM III.

Cùm per methodum à nobis demonstratam ex hoc Guldini inuento habeatur planum parallelum plano x a b incedens per centrum parallelogrammi mixti b l m e f d u e, & inuento isto plano habeatur quadratrix mixta, ipsáque quadratrix mixta sit æqualis figuræ c r p a; ex inuento illo Guldini per demonstrata nostra perueniemus ad quadraturam figuræ c r p a, quam in duodecima primi libri editi anno superiore statim post quàm Anonymus proposuit sua problemata, demonstrauimus esse æqualem quadrato radij c a, poteritque idem Guldinus dici primus inuentor huius quadraturæ, si is dici iure debeat primus inuenisse aliquid, qui excogitauit id vnde alij postea illud intulerunt, aut viderunt posse inferri, quamuis aliunde illud ipsum iam inuenissent. Sed hoc quis dicat nisi qui profusior esse velit in Anteriores Scriptores, & parcior in Posteros occurrens limbo o d r in puncto d: compleatur parallelogrammum l h d t, l h g a.

PROPOSITIO XXII.

Reuocato schemate propositionis decimæ octauæ (*Fig.* 58.) arcus b h o sit quadrans peripheriæ circuli semidiametro a e, vel a o, vel a b descripti & motu illius circa manentem b a descripta sit superficies sphærica. Esto a o d r superior pars semicycloideos paruæ respondens quadranti circulari b h o a, eius basis a r bifariam secta esto in m, & ex m excitata ad basim perpendicularis m y æqualis dimidio radij a o; sitque a y s r pars superior cycloideos paruæ genitæ circulo cuius centrum m, semidiameter m y. In recta b a sumptum sit quodlibet punctum l, & per illud ductum planum f l h secans superficiem sphæricam in duas partes externam, & internã adiacentem centro a: per h ducta sit h d parallela rectæ b a, occurrens limbo o d r, in puncto d, : compleatur parallelogrammum l h d t, l h g a.

Ostendendum est vt quadratum radij a e ad spatium t f r cognitum, per nonam libri secundi, ita esse radium a n vel a b ad rectam qua centrum grauitatis, respondens externæ parti eiusdem sphæricæ superficiei, distat à centro a. Et vt idem quadratum ad figuram a t s rectilineo noto æqualem, ita esse radium eundem ad rectam qua centrum partis internæ distat a centro a. Demúmque centrum grauitatis respondens toti superficiei hemisphæricæ bifariam secare radium b a; Quod si respondeat superficiei illi internæ quæ est inter radium a o & parallelam ipsi, incedentem per bisectionem radij a b, bifariam quoque secare portionem illam radij a b.

Ex centro a in plano x a b descriptus sit quadrans circularis b f x a, & eius quadratrix b p x a, respondens brachio a n, vt in decima nona superiore præscripsimus. Ista itaque quadratrix translata ad positionem plani x a o in superficiem cylindricam insistentem arcui b h o, erit quadratrix quadratricis mixtæ insistentis eidem arcui b h o, vt ibidem ostendimus: ac proinde, vt quadratrix mixta (siue figura a o d r vel tota pro toto arcu, vel ex parte sumpta, pro partibus arcûs, ita vt arcui b h respondeat d r t, & arcui h o conueniat figura o d t a) se habet ad suam quadratricem, ita erit radius a n ad distantiam centri quæsiti. Superest igitur vt ostendamus figuram b p l translatam, esse æqualem figuræ f t r, & figuram l p x a figuræ a y f t; ideóque totam b p x a, toti a y f r; ipsámque a y f r esse æqualem dimidio quadrati a b vel a n.

Completo parallelogrammo a c q A, intelligatur figura a i q r subcontraria figuræ o d r a, vt in primæ propositionis secundi libri schemate: igitur ex septima secundi, rectangulo i t d æquale est rectangulum contentum sub radio & sub t s: sed rectæ l h æqualis est d t, rectæ verò h g vel l a æqualis est t i ex tertia secundi: ergo rectangulum sub radio a n & sub t s, est æquale rectangulo a l f: sed vt n a brachium ad a l, ita est l f ad l p ex generatione quadratricis b p x a; ergo rectangulo a l f æquale est rectangulum sub radio a n & sub recta l p: ergo rectæ l p, t s sunt æquales; ac proinde quadratrix b p x a translata expanditur in figuram a y f r, & portio b l p æqualis est figuræ t f r; portioque l p x a figuræ a y f t. Quoniam verò ex duodecima primi figura m y f r est æqualis quadrato m y, quod est quadrans quadrati a b; tota a y r m erit æqualis dimidio quadrati a b; ergo vt o d r a siue quadratum a b, ad a y r m siue ad dimidium sui, ita radius b a ad sui dimidium, in quo proinde est grauitatis centrum pro tota superficie hemisphærica. Similiter quoniam quando l bifariam secat rectam b a, punctum t congruit puncto m, spatium a f t vel a y m erit quadrans quadrati b a; vt ergo quadratum b a ad sui quadrantem, ita est recta b a ad interuallum centri à puncto a: ergo cùm l a ponatur esse duo quadrantes rectæ b a, & distantia illa ostensa iam sit esse quadrans, bifariam secatur à centro grauitatis. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Cùm Guldinus ostenderit centrum totius hemisphæricæ esse in bisectione radij; inde confirmari nostram methodum liquet. Ita pariter cùm in tetragonismicorum elementorũ tertio libro ostenderimus centra grauitatis solidorum comprehensorum superficie sphærica; inde eruemus centra grauitatis superficierum ad sphæram attinentium, nihil discrepantia ab inuentis modò: vel etiam ex istis extrahemus vicissim illa. Nam Dettonuillæus in Opusculo Gallico *de solidis circularibus* assumit extendi posse theorema Guldini ad solida, ita vt solidum genitum circumductu sectoris circuli circa rectam ex centro, habeat centrum grauitatis distans

à centro sphæræ interuallo quod ad interuallum centri superficiei descriptæ motu illius, arcûs sit vt ternarius ad quaternarium, quæ est ratio quam habet in cono distantia centri grauitatis à vertice, ad distantiam grauitatis centri baseos ab eodem vertice. Quod rectè congruit demonstratis: nam totius hemisphærij centrum ita diuidit radium, vt sicut 8. ad 3. ita sit radius ad distantiam centri sphæræ à centro hemisphærij: ergo cùm distantia centri superficiei sit ad istam vt quaternarius ad ternarium; distantia centri superficiei hemisphæricæ erit ad radium vt 4. ad 8. vel vt 1. ad 2. Hæc ipsa concordia elucescit in aliis exemplis, vt calculatori rem experienti patebit. Sed illa extensio in sectoribus ellipseos vel hyperbolæ non habet locum.

PROPOSITIO XXIII.

Iisdem manentibus vt in vigesima (*Fig.* 57.) superficies cylindrica duplicis cunei, vel vt alij loquuntur vngulæ sphæricæ, quarum vna b i e u insistat peripheriæ b h c R u, supra planum suppositum b a c, altera eidem peripheriæ insistat ad partes oppositas, habet centrum grauitatis in puncto n, ita vt n a recta æquet dimidium arcûs b h c. Si autem non consideretur nisi vnicus cuneus superior, illius centrum est in perpendiculari ad planum b a c excitatá ex puncto n, distatque à puncto n, rectâ æquante dimidium eiusdem rectæ an, vel quadrantem arcûs b h c.

Completo parallelogrammo a p B A, intelligatur semicycloides parua A a p t genita circulo cuius diameter sit a A, ita vt a p basis æquet semiperipheriam totius circuli genitoris. Ducta sit quæcunque h i perpendicularis ad planum suppositum occurrens in limbo b i e semicunei b i e c h: per h ducta sit recta h r parallela rectæ b a occurrens limbo c r p in r; per r ducta sit r s parallela rectæ c a occurrens lineis a p, A t p, A B in s, t, q. Intelligatur b D A a parabola cuius axis A a, vertex A, ordinatim applicata a b; per h ducatur h z æquidistans axi a A, occurrens lineis b D A, AF in D, E: igitur per tertiam tertij tetragonismicorũ tres rectæ E z, z h, z D sunt proportionales. Quoniam verò per vndecimam tertij libri superioris tres rectæ q s, s r, vel h i & s t sunt proportionales; sunt autem æquales h z, r s, item q s, E z: ergo rectæ s t, z D sunt æquales: ergo si parabola b D A a z intelligatur ad positionem plani x a c transferri in superficiem cunei, & insistere arcui b h c ita vt translata sit b H e c h, expandetur in figuram A a p t, vt ex decima quinta patet; eritque portio b H h æqualis portioni s p t, & portio reliqua h H e c reliquæ portioni a s t A, totáque proinde a H e c h, toti a s p t A.

Quoniam igitur vt E z vel brachium A a ad z h, vel ad a g, ita h i æqualis rectæ g y ad h H; & ita est g y dimetiens trianguli rectilinei a c e parallela lateri e c ad P g dimetientem quadratricis; erit ergo b H e c h

quadratrix translata genita ex triangulo e c a, generatore superficiei cunealis b i e c h: ergo per decimam quartam semicunealis figuræ b i e c h quadratrix est b H e c h libræ planæ axe b a, sustentaculo A F. Cùm igitur, vt patet ex vndecimæ tertij libri calculis, figura A a f p t æqualis sit quadranti circulari b h c a, vt est suspensum b i e c h, hoc est quadratum a b vel primus terminus perspectæ progressionis, ad b h c a quadrantem secundi termini, ita erit brachium A a, siue primus terminus adiunctæ progressionis, ad quadrantem secundi adiunctæ: quapropter quia secundus adiunctæ æquat arcum b c u, quadrans illius erit dimidium arcûs b h c; sed ita etiam est A a ad a n: ergo recta a n æquat dimidium peripheriæ b h c; quod erat primum ex demonstrandis: nam cunei geminati centrum grauitatis esse in plano b a c & in recta a c, res est manifestior quàm vt probatione egeat.

Rursus si eadem superficies semicunealis b i e c h intelligatur manens vt iacet, suspendi plano b a c cadente perpendiculariter ad horizontem, ita vt recta c e æquidistet eidem horizonti; sustentaculum verò distet à plano b a c ad partes oppositas superficiei suspensæ interuallo æquante radium a A, patet isti superficiei æquiponderare idem spatium quod eidem expansæ in rectam a p æquiponderat axe a p, sustentaculo A B. Atqui ex quæsito secundo vigesimæ quintæ libri tertij, vt est primus terminus perspectæ ad octauam partem secundi, ita est recta A a vel primus terminus adiunctæ ad centri quæsiti distantiam à plano b a c: ergo centri quæsiti distantia à plano b a c est octaua pars secundi termini adiunctæ progressionis, qui cùm sit arcus b c h, eiusmodi distantia erit quadrans arcûs b h c, quod secundò erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex methodo tradita liquet pari pacto inueniri centrum grauitatis geminatæ portionis b i h, vel i h c e: neque tantùm geminatæ sed etiam simplicis. Cæterùm hoc habent superior & præsens propositio vt proximè & directè exequantur rem propositam; nec illam petant ex altero centro grauitatis priùs inuento. Recta verò a n est dupla distantiæ centri à plano supposito b a c non tantùm in isto casu, sed in omni alio vt ex decima quarta primi libri colligi potest.

SCHOLIVM.

Anno proximè elapso postquam vulgauimus nostras de Cycloide viginti propositiones, res tulit vt D. Pascalius Parisiis ad nos statim miserit aliquot sua Problemata quorum solutionem à nobis flagitabat vt probare posset num sua & nostra ratio demonstrandi in idem conspirarent. Eorum vna, quod ad præsentem propositionem attinet proponebatur istis verbis dati trianguli cylindrici centrum grauitatis reperire, *intelligendo per trianguli cylindrici latera, sectiones superficiei cylindricæ cum planis communes; id verò nihil est aliud quàm postulare centrum grauitatis superficiei cunealis vel integrè vel ex parte sumptæ. Respondimus si centrum eiusmodi nobis detur, repensuros nos esse absolutam circuli quadraturam, nihilque de laude quàm centri*

illius

illius Inuentor mereretur, detractum iri. Ad hac ille, responsum sua manu dedit optando vt quam facile ipse exhibiturus esset eiusmodi centrum, tam facile nos quadraturam inde promeremus. Cum centri inuentionem auidi expectaremus, accepimus ab eodem literas quibus fatetur suum istud problema non procedere nisi ex data circuli quadratura; quod narramus tantùm vt inde constet centra ista nobis iam tunc fuisse cognita: in D. verò Pascalio nihil propterea reprehensione dignum agnoscimus. Norunt enim omnes, quotquot inuentioni rerum reconditarum vacant, in inuentis, cum primùm ex abditis eruũtur semper residere aliquid quod postea accuratioris examinis limâ ipse Inuentor pro iure suo radat. Istud porrò problema & cætera quæ tunc ad nos D. Pascalius pro suis misit, ineunte postea Nouembri Anonymus (is nunc Dettonullæum se fuisse, scripto profitetur gallicè libro) vt sua etiam adiecit ad prima mense Iunio data, vt ita totius Europæ Geometras secundis quæstionibus distineret. Quæ est causa vt ex illo tempore discrimen quidem inter nomina illa agnouerimus, sed inter Dettonuillæum & Pascalium Geometras quodnam esset non ita bene viderimus. Excidit modo nobis vnum quod antequam longiùs abeamus retractari debet: neque enim omnia problemata ad nos tunc missa, euulgauit postea Dettonuillæus; vnicum excepit quod ipsi facilius fortasse visum propterea fuit, quod eius solutionem nobis notam esse calculo vnius casûs ipsi exhibito probauerimus: nam suis in literis difficile id esse priùs affirmauerat. Istud verò ita se habebat inuenire centrum grauitatis in sectore sphæræ dato. *Initio quidem sectorem intelleximus illum quem Archimedes initio librorum de sphæra & Cylindro appellat τομέα σφαιρικόν, qui est portio quam coni recti habentis verticem in centro sphæræ, superficies abscindit ex ipsâ sphæra; statimque rescripsimus illud non videri difficile, satisque constare ex Archimedeis & aliorum inuentis. Post hac docuit nos ille ista* secto-ris *voce à se intelligi portionem sphæræ interceptam inter duo plana per centrum ducta & secantia se ad angulos non rectos. Noster porrò ille calculus ita se habebat.*

Sint (*Fig. 59.*) a c b, a d b semicirculi magni sphæræ centro e prędite: per polos eiusmodi circulorum transeat circulus maior, eiusque arcus interceptus semicirculis a c b, a d b sit d f c graduum centum viginti: idem arcus d f c bifariam sectus esto in f, & iungatur recta e f. Vt est quaternarius ad ternarium ita fiat quadratum e c ad e h: vt autem 9. ad 16. ita recta e g ex e f abscissa, sit ad e h. Dico punctum g esse grauitatis centrum sectoris a m d b c h.

Addidimus in eadem responsione si figura proposita a c b d intelligatur secari plano i l m parallelo ad planum e c d, constare nobis methodum inueniendi grauitatis centrum partium seorsum sumptarum, datâ circuli quadraturâ: idque nobis videri difficilius problemate proposito.

Posita extensione Guldiniani illius principij cuius meminimus in corollario vigesimæ secundæ propositionis, patet si vt ternarius ad quaternarium ita fiat e g recta ad e n punctum n esse grauitatis centrum superficiei sphæricæ a l c b d m.

PROPOSITIO XXIV.

EX centro a (*Fig.* 60.) descriptus sit quadrans circularis d u t a, & ex radio t a intelligatur abscissa recta a b æqualis arcui d u t, vt sit basis paruæ semicycloideos superioris b c d a habentis generatorem circulum centri a, & diametri d a l. Completo parallelogrammo b a l g intelligatur b f l a figura ex sinibus versis definita in decimæ tertiæ secundi corollario secundo, & vsurpata in vndecima libri tertij. Esto g p q l figura subcontraria figuræ b c d a iuxta explicationem primæ secundi libri.

Ostendendum est figuram b f l g esse figuram ex sinibus versis respondentem semicycloideos paruæ parti superiori g p q l.

Quoniam rectę c e, i q parallelæ ad rectam d a sunt per tertiam primi æquales sinibus z u, a z, & quadrata rectarum z u, a z sunt æqualia quadrato a u vel a l, erunt quadrata rectarum e c, i q æqualia simul quadrato a l vel e i: sed quadratum c e est ex decimâ tertiâ secundi libri æquale rectangulo i e f, quadratum verò ei est æquale rectangulis i e f, e i f; ergo quadratum i q est æquale rectangulo e i f; & tres rectę e i, i q, i f sunt proportionales, ergo figura b f l g respectu figuræ g p q l est illa quam ex sinibus versis appellauimus in corollario secundo decimæ tertiæ secundi, prout erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXV.

IIsdem positis ex puncto e vtcunque sumpto in basi b a (*Fig.* 60.) intelligatur excitari recta e x perpendicularis ad planum b a d, æqualis radio a t, & completo parallelogrammo d a e B, ex centro e interuallo rectæ e x vel e B, intelligatur descriptus quadrans circularis B s x e; ex puncto c intelligatur erigi recta c s parallela rectæ e x occurrens peripheriæ B s x in s, & compleatur parallelogrammum B s r e. Idem verò intelligatur factum in singulis punctis rectæ b a, vt inde existant duo solida quorum vnum sit quadrans cylindri cuius axis b a, basis similis æqualis & similiter posita circulo centri e, semidiametri e B vel e x: alterum verò solidum sit illud cuius sectio est parallelogrammum e c s r in cylindri quadrante inclusum.

Ostendendum est libræ planæ axe b a, perpendiculo plano x e b, sustentaculo l g, æquiponderans solido illi incluso ad positionem plani x e i, esse cognitum datâ quadraturâ circuli.

Quoniam tres rectæ e i, e c, e f sunt proportionales, vt est e i ad dimidium rectæ e c, ita erit tota e c, ad dimidium rectæ e f; ergo si dimidium rectæ e f aptetur puncto i ad positionem rectæ a l: æquiponderans rectæ e c, librâ grammicâ i e suspensâ ex e, perpendiculo e x, brachio e i, erit di-

midium rectę e f aptatum puncto i; ergo parallelogrammo e c f r vt iacet manenti æquiponderans erit rectangulum contentum sub dimidio rectæ e f, & sub recta c s. Quoniam verò quadrans circularis e B f x est similis & æqualis quadranti circulari a d u t, & rectæ e c, a y sunt æquales, erunt quoque c s, y u vel a z æquales; sed y u, i q sunt, vt in superiore ostendimus, æquales: ergo rectæ q i, c s sunt æquales, & rectangulum sub q i & sub dimidio rectæ e f comprehensum, si aptetur puncto i, ad positionem plani x e B æquiponderat rectangulo e c f r: ac proinde ex vigesima octaua quarti tetragonismicorum solidum aptatum sustentaculo g l, cuius sectio est rectangulum contentum sub recta q i & sub dimidio rectæ e f, æquiponderat solido cuius sectio est parallelogrammum e c f r.

Restat vt ostendamus solidum cuius sectio est parallelogrammú comprehensum sub recta q i & sub recta e f, esse parallelepipedo cognito æquale, supposita quadratura circuli: id verò ita ostenditur. Cylindraceum altitudinis e x vel e i baseos g i l q p est notum, cùm basis g i l q p quadretur per nonam secundi libri: cùm ergo cylindraceum istud diuidatur in duo dicylindracea quorum vnum ad positionem plani x e i gignitur ex figura g i l q p & ex figura sinuum b f l i g, quæ ipsi respondet; alterum ex eadem figura g i l q p & ex figura b f l a e: si ex cylindraceo altitudinis e x, baseos g i l q p cognito, auferatur dicylindraceum genitum ex figura g i l q p & ex figura b f l i g, relinquetur dicylindraceum genitum ex figura b f l a e & ex figura g i l q p, cuius dimidium quærimus.

Intelligatur figura g i l m p ita descripta, vt sicut est recta e i ad i q, ita sit recta i f ad i m; ac proinde ita vt quatuor rectæ e i, i q, i f, i m sint continuè proportionales. Figuram istam dimetientis i m appellauimus in corollario secundo propositionis octauæ libri tertij, *quartum gradum*; figuram dimetientis f i, *tertium*; figuram dimetientis q i *secundum*; & parallelogrammum altitudinis i e *primum*. Intelligatur circa manentem g l circumuolui figura g p q l, & consideretur solidi ita geniti quadrans insistens basi g p q l. Intelligatur quoque dicylindraceum genitum ad positionem plani x e B ex ipsa figura g p q l, ita vt eius sectio in eodem plano x e c posita, sit quadratum F i q G insistens super latere q i. Æquiponderans solidi peripherici quadranti axe g l, perpendiculo plano F i g, sustentaculo b a inuentum est in tertio libro, & computatum pro tota figura g l q p extat in quæsito septimo propositionis vigesimæ quintæ tertij libri, pro partibus verò obtinetur ex decima nona propositione eiusdem tertij, positâ circuli quadraturâ. Quoniam verò ex sexta tertij tres semisses æquiponderantis quadranti peripherici sunt æquiponderans dicylindraceo sectionis quadratæ F i q G, patet notum esse æquiponderans dicylindraceo isti. Demum verò quia ex corollario quarto octauæ tertij si istud æquiponderans reducatur ad cylindraceum altitudinis e x, basis est dimidium quarti gradûs, patet triplum cylindracei æquiponderantis qua-

dranti illi, & habentis altitudinem e x; habere pro basi quartum gradum.

Quoniam igitur notus est quartus gradus, & cylindraceum sectionis c i m est æquale dicylindraceo sectionis q i f, sicuti & ipsæ sectiones sunt æquales, nam c i m comprehenditur sub prima & quarta quatuor proportionalium, & q i f sub secunda & tertia: ergo cylindraceum altitudinis i e cuius basis sit quartus gradus iam inuentus æquat dicylindraceum sectionis q i f quæsitum: igitur cylindraceum altitudinis i e, cuius basis sit quartus gradus modo repertus æquat dicylindraceum cuius sectio est rectangulum contentum sub recta q i & sub recta i f, & est cognitum, datâ quadraturâ circuli. Igitur si istud dematur de cylindraceo altitudinis e i, baseos æquantis trientem quadrati a l, relinquetur cylindraceum quæsitum: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVI.

Ostendendum est iisdem manentibus (*Fig. 60.*) dicylindraceo sectionis c f r e integro, id est cuius basis sit integra figura b c d a, æquiponderans axe b a perpendiculo plano x e b, sustentaculo g l esse æquale cylindraceo altitudinis e x vel a d, cuius basis æqualis sit sextanti quadrati a d vel a l, vel e x; sunt enim ex constructione istæ omnes rectæ inter se æquales.

Quoniam ex parte secunda decimæ nonæ propositionis tertij libri dimidio conoidis circa manentem g l geniti motu figuræ g p q l i æquiponderans axe g l, perpendiculo plano P i g, sustentaculo b a, est cylindraceum altitudinis e x, baseos æquantis quatuor nouenas quadrati a d, quadranti eiusdem conoidis insistenti super basi g p q l æquiponderabit cylindraceum altitudinis e x vel a d, baseos æquantis duas nouenas quadrati d a: ergo cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis trientem quadrati a l vel a d, est æquale spatio quod æquiponderat solido sectionis quadratæ F i q G insistenti super tota figura g p q l; ergo dimidium quarti gradûs g i l m p est ex superioris præscripto ille idem triens quadrati a l: ergo dicylindraceum genitum ex figura g p q l & ex portione g i l f b, est æquale cylindraceo altitudinis e x, baseos æquantis bessem quadrati d a.

Quoniam igitur cylindraceum baseos g p q l i, altitudinis e x, est æquale (vt ex nona secundi liquet) cylindraceo altitudinis a d, baseos æquantis quadratum a d vel e i; si ex isto dematur cylindraceum æquale dicylindraceo genito ex figuris p q l g, b f l g, residuum fiet cylindraceum altitudinis a l, baseos æquantis trientem quadrati a d; igitur ex superioris demonstratione patet, dicylindraceum genitum ex figuris g p q l i, b f l a c esse æquale cylindraceo altitudinis a d, baseos æquantis trientem quadrati a d, & istius dimidium nempe cylindraceum altitudinis e x, baseos æquantis sextantem quadrati a d, æquale esse spatio quod æqui-

ponderat solido sectionis c f r c, axe b a, perpendiculo plano x c b, sustentaculo g l, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ex corollario quintę tertij patet æquiponderans solido cuius sectio sit triangulum c f c, quod comprehenditur sub parallelogrammi c c f r, lateribus c c, c s & sub eiusdem parallelogrammi diametro c s, esse bessem æquiponderantis solido cuius sectio est ipsum parallelogrammum: igitur solido sectionis triangularis c c s æquiponderans est cylindraceum altitudinis c x, baseos æquantis nouenam partem quadrati a d.

COROLLARIVM II.

Si in plano d u t a generetur quadratrix a T d y respondens ita quadranti circulari d u t a, vt libra grammicâ l d suspensâ ex a perpendiculo a t, brachio a l, sicut l a ad a y quamcunque portionem rectæ a d, ita y u, parallela perpendiculo a t & dimetiens quadrantis d u t a, sit ad y T dimetientem quadratricis, patet ad positionem plani P a b notum esse dicylindraceum genitum ex quadratrice a T d & ex figura d c b a; nempe cylindraceum altitudinis a d vel a l, baseos æquantis sextantem quadrati a d. Pro aliis verò casibus (vt si non sumeretur nisi dicylindraceum genitum ex partibus d c y, d T y) inueniri oporteret per præcedentem, spatium æquiponderans portioni cylindri insistenti super basi c c d a, & inde deducendum spatium æquiponderans portioni cylindri eiusdem insistenti super parallelogrammo c y a c, quod est inuentu facillimum ex vigesimæ sextæ quarti tetragonismicorum methodo.

PROPOSITIO XXVII.

Maneat (*Fig. 61.*) vt in superiore figura d c b a, & quadrans circularis d u t a, parallelogrammúmque a l g b. Esto d m n limbus partis superioris semicycloideos magnæ, ita vt ad positionem rectæ a b dimetientes m c, y u sint æquales, vt in prima primi libri ostendimus. Intelligatur ex centro a excitari ad planum b a d perpendicularis a p, æqualis radio a d vel a t. Ad positionem plani p a b intelligatur dicylindraceum genitum ex figuris b c d a, d u t a vel d m n b c.

Ostendendum est libræ planæ axe b a, perpendiculo plano p a b, sustentaculo l g, æquiponderans isti dicylindraceo esse cognitum, si, vbi opus fuerit, cognita sit quadratura circuli.

Quoniam quadratum y m continet ex Euclidis elementis bis rectangulum m c y, & semel quadrata m c, c y; si habeantur æquiponderantia solidis quorum sectiones parallelæ plano p a b sunt quadrata m y, m c, c y, & ex æquiponderante solido quadrati m y auferantur æquiponderantia solidorum quorum sectiones sunt quadrata m c, c y, relinquetur (vt patet) duplum æquiponderantis solido, cuius sectio est rectangulum m c y,

vel u y c. Vt est quadratum circulo circumscriptum ad ipsum circulum, ita ponatur recta a p ad a r.

Peripherico igitur genito motu figuræ d m n a circa rectam a d, libræ planę axe b a, sustentaculo l g, ęquiponderans, per decimam sextam quarti & per corollarium tertium decimę nonę eiusdem libri, est cylindraceum altitudinis a r, baseos ęquantis quadrantem quadrati ab, auctum triente circuli genitoris semidiametro d a descripti, & imminutum quatuor nouenis quadrati a d: ergo per demonstrata in decima nona primi, si loco peripherici ponatur dicylindraceum cuius sectio est quadratum m y, ęquiponderans erit eiusdem baseos, sed altitudinis a p vel a d.

Similiter peripherico genito motu figurę d c b a circa rectam a d, ex corollario vndecimę tertij & ex corollario tertio decimę nonę, ęquiponderat iisdem positis cylindraceum altitudinis a r, baseos ęquantis quadrantem quadrati a b, imminutum quadrante quadrati a d: ergo si loco peripherici ponatur dicylindraceum, cuius sectio est quadratum m y, basis erit eadem, sed altitudo a p, vel a d.

Præterea quoniam dicylindraceum genitum ex figura d u t a, ad positionem plani p a t est *homœosphæricum* definitum in corollario tertio decimę quartę quarti tetragonismicorum, planum parallelum plano p a t, incedens per grauitatis centrum, ita diuidit rectam d a in y, vt sicut octonarius ad ternarium, ita sit d a vel a l ad a y, vt ibidem ostendimus: ex decima verò octaua eiusdem libri constat eiusmodi homœosphęricum esse bessem parallelepipedi, cuius basis sit quadratum a c vel a d, & altitudo ęqualis ipsi a t. Vt igitur l a recta ad a y rectam, hoc est vt octonarius ad ternarium, ita est suspensum homœosphęricum, vel duo trientes parallelepipedi iam dicti, ad quadrantem eiusdem parallelepipedi: ergo ęquiponderans eiusmodi homœosphęrico est parallelepipedum altitudinis a d, baseos ęquantis quadrantem quadrati a t vel a d.

Duo igitur ęquiponderantia dicylindraceis, quorum sectiones sunt quadrata c y, y u vel c m, conflant simul quadrantem quadrati a b. Quoniam verò dicylindraceo, cuius sectio est quadratum y m, ęquiponderans inuentum est suprà, si ex illo auferatur conflatum ex duobus postremis iam collectum, residuum fiet duplum ęquiponderantis dicylindraceo cuius sectio est rectangulum m c y vel c y u, nempe cylindraceum altitudinis a d, baseos æquantis trientem circuli semidiametro a d geniti imminutum quatuor nouenis quadrati a d. Igitur æquiponderans dicylindraceo genito ex figuris d m n a, d u t a, est cylindraceum altitudinis d a vel a p, baseos æquantis sextantem circuli semidiametro a d descripti, imminutum duabus nouenis quadrati a d : ergo si, vbi opus fuerit, cognita sit quadratura circuli, notum quoque erit istud æquiponderans, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Methodus nostra est generalis, si attentè res inspiciatur, cùm proposi-

tiones quibus illa nititur, vel ex elementis nostris vel ex præsenti Opere desumptæ, sint generales.

PROPOSITIO XXVIII.

Reuocato schemate propositionis vigesimæ sextæ (*Fig. 60.*) ostendendum est æquiponderans figuræ solidæ, cuius sectio parallela plano x e B est sector circularis e f x, esse cylindraceum altitudinis x e vel a d, baseos æquantis excessum quo basis cylindracei reperti in superiore, excedit basim cylindracei reperti in propositionis proximè ante superiorem demonstratæ corollario: ac proinde æquiponderans toti solido esse cylindraceum altitudinis e x vel d a, baseos æquantis sextantem circuli genitoris semidiametro a d descripti, imminutum tribus partibus nouenis, vel vno triente quadrati d a.

Propositio patet; nam figura c f x e est sectio dicylindracei geniti ex quadrante circulari d u t a & ex figura d c b a ad positionem plani x e b; isti verò dicylindraceo inuenimus in superiore propositione æquiponderans; in vigesimę sextę autem corollario reperimus æquiponderans solido cuius sectio est triangulum e c s: ergo per subductionem relinquitur æquiponderans solido cuius sectio est sector e f x, librę planę axe a b, perpendiculo plano x e b, sustentaculo l g: in casu autem assumpto calculus patet ex numerorum collatione: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIX.

Iisdem manentibus (*Fig. 62.*) ex recta b a abscissæ sint æquales b e, a g, & ex g excitata sit perpendicularis g q ad planum b a d, æqualis rectæ e x, vel a d; per g ducta sit g f o æquidistans rectæ a d, & occurrens rectæ D d in o, limbo b c d in f: centro g per o, q descriptus sit quadrans circularis o m q g, & per f ducta sit ordinatim applicata f m, completóque parallelogrammo g f m p, ducta sit eius diameter g m.

Ostendendum est sectorem inferiorem g o m esse æqualem sectori superiori f e x, ita vt arcus f x, o m sint æquales.

Istud patet, nam eo modo quo ostendimus arcum f x ęqualem arcui u t vel rectę b e, ostendemus arcum q m esse ęqualem arcui i t vel rectę b g: ergo cùm tota b a sit ęqualis arcui o m q, & pars b g sit ęqualis parti q m, residua o m erit ęqualis parti g a vel b e, cui cùm ęqualis sit arcus f x, patet arcum o m esse ęqualem arcui f x, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hinc apertè liquet solidum sectionis g o m esse ipsum sectionis f e x, sed subcontrariè positū; vnde sequitur, quod ęquiponderat solido sectionis f e x posito librę axe e g, perpendiculo plano x e g, ęquiponderare quoque solido sectionis o g m posito librę axe g o perpēdiculo plano o g a. E con-

trario autem quod æquiponderat solido sectionis o g m, libræ axe c g, perpendiculo plano x c g, æquiponderare solido sectionis f e x, libræ planæ axe B e, perpendiculo plano B e g. Patet quoque licet totum subcontrarium sit æquale toti solido primario cuius sectio est f e x; si tamen portio solidi subcontrarij posita inter plana plano B e x æquidistanter ducta per rectas b D, g o, sumatur, eiusmodi æqualitatem non seruari amplius; sed portionem subcontrarij esse illam primarij quæ iacet inter plana parallela ducta per rectas e c, a d.

DEFINITIONES.

SOlidum sectionis f e x vocetur *scalarium*; ita enim illud gallicè appellauit Dettonuillæus, à scalarum cochleatim structarum similitudine nonnulla. Solidum, cuius sectio est o g m, vocetur *scalarium subcontrarium* scalarij primarij & absolutè dicti; ex centro a excitetur ad planum d a t perpendicularis a h æqualis ipsi a t, & centro a per d, h describatur quadrans circularis d z h a, qui vocetur *scalarij basis*; radius a d vocetur *primus*, radius a h, *postremus*. Intelligatur ex scalarij centro grauitatis demitti perpendicularis in basim, & cadere in punctum E, ex quo demittantur in radios a d, a h perpendiculares E A, E F. Vocetur E A *distantia à radio primo*, & E F *distantia à radio postremo*.

PROPOSITIO XXX.

REuocato (*Fig. 60.*) schemate propositionis vigesimæ octauæ, scalario subcontrario ad positionem plani x e c æquiponderat axe a b, perpendiculo plano x e a, sustentaculo l g, cylindraceum altitudinis a b, baseos æquantis trientem quadrati a d deducto æquiponderante scalarij primarij reperto in propositione vigesima octaua.

Quoniam quadrans circularis x e B s est sectio cylindracei, cuius altitudo est b a, basis verò est a d R P quadrans circularis illi æqualis, & similiter positus centro a descriptus; æquiponderans autem basi, librâ grammicâ l d suspensâ ex a perpendiculo a P, est per decimam octauam tertij tetragonismicorum, æquale trienti quadrati a d; æquiponderans cylindraceo altitudinis b a erit, per vigesimam quintam quarti libri tetragonismicorum, æquale cylindraceo altitudinis b a, baseos æquantis trientem quadrati a d. Igitur si inde auferatur æquiponderans scalarij cuius sectio est x e s, residuum fiet æquiponderans scalario subcontrario, quale erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Si non sumatur nisi cylindri portio intercepta inter plana x e B, P a d, æquiponderans illi, (vt ex methodo patet) erit cylindraceum altitudinis a e, baseos æquantis trientem quadrati a b.

COROLL.

COROLLARIVM II.

Ex corollario vigesimæ nonæ liquet æquiponderans hîc repertum, esse æquiponderans scalario, libræ planæ axe a d, perpendiculo plano d a t, sustentaculo distante interuallo rectæ a P, vel a d. Præterea æquiponderans repertum in vigesima octaua est cylindraceum altitudinis a P baseos æquantis sextantem circuli semidiametro a d geniti, imminutum tertia parte quadrati a d: cylindraceum verò altitudinis a b æquantis dimidium termini secundi progressionis adiunctæ, & baseos æquantis trientem quadrati a d, vel primi termini perspectæ progressionis, est per reciprocationis leges æquale cylindraceo altitudinis a d, baseos æquantis sextantem secundi termini perspectæ progressionis, qui est semicirculus semidiametro a d descriptus. Nam vt altitudo, siue primus adiunctæ, ad altitudinem, siue ad dimidium secundi adiunctæ; ita basis, siue triens primi perspectæ, ad basim, siue ad sextantem secundi perspectæ. Igitur æquiponderans scalario libræ planæ axe a d, perpendiculo plano d a t, sustentaculo distante distantiâ rectæ a P, est cylindraceum altitudinis a d, baseos æquantis tertiam partem quadrati a d.

PROPOSITIO XXXI.

Reuocetur schema propositionis vigesimæ primæ & vigesimæ secundæ quarti libri superioris (*Fig.* 42.)

Ostendendum est scalarium, cuius sectio parallela plano d g c est sector f h t, esse æquale dimidio cylindracei altitudinis g d vel gc, baseos blg: centrum verò grauitatis illius distare à scalarij basi g d e c, triente rectæ g b.

In illa propositione vigesima prima cùm ostenderimus ad positionem plani d g c solidum, cuius sectio est sector f h t, hoc est scalarium ita iam appellatum, esse æquale dimidio cylindracei vel prismatis, cuius basis est triangulum b g l, altitudo g d; patet scalarium esse æquale dimidio eiusmodi solidi, siue quadranti solidi cuius altitudo g d, basis quadratum g b. Centrum verò grauitatis esse in plano f h n ita diuidente rectam b g, vt g h sit triens totius g b, patet ex sexta quadraturæ parabolæ Archimedeæ: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Methodus præsens extenditur ad quamlibet portionem scalarij, vt ex illa vigesima prima liquet, abscissam plano parallelo ad basim d g c. Præterea quoniam g b est æqualis arcui c e d ex constructione, erit g h triens peripheriæ c e d, & vncia totius peripheriæ circuli geniti semidiametro g c. In aliis verò casibus illa distantia facilè ostendetur, cùm non oporteat inueniri nisi rectam parallelam rectæ g f, incedentem per centrum grauitatis trapezij l i h g, abscissi ex vna parte, vel trianguli b i h abscissi ex aliâ per planum f h n vtcunque ductum æquidistanter basi scalarij.

COROLLARIVM II.

Quadratum g b eſt quadrans tertij termini progreſſionis perſpectæ; primus enim eſt quadratum radij g c, ſecundus eſt ipſe circulus radio g c deſcriptus, ſiue rectangulum ſub radio & ſub-dupla rectæ g b, hoc eſt, ſub recta æquante ſemiperipheriam eiuſdem circuli; illius ergo rectæ quadratum erit tertius terminus perſpectæ, ac proinde quadratum g b erit quadrans tertij perſpectæ; & ſolidum altiudinis g d, baſeos æquantis decimam ſextam partem tertij termini perſpectæ progreſſionis, erit æquale ſcalario integro.

PROPOSITIO XXXII.

REducto (*Fig. 62.*) ſchemate vigeſimæ nonæ, recta A E, quæ eſt diſtantia à primo radio baſeos ſcalarij, eſt ſexdecim trientes tertij termini progreſſionis ſubadiunctæ. Diſtantia verò E F ab extremo ſcalarij radio eſt octo trientes ſecundi termini ſubadiunctæ, deductis ſexdecim trientibus tertij termini ſubadiunctæ. Diſtantia denique centri eiuſdem à baſi ſcalarij eſt ſextans ſecundi termini ſubadiunctæ progreſſionis.

Ex rectis d a, h a abſcindantur a H, a G ipſis æquales. Igitur quoniam libræ planæ axe a d, perpendiculo plano d a t, ſuſtentaculo G m parallelo ad axem ipſum, æquiponderans ſcalario ſuſpenſo eſt per trigeſimæ corollarium ſecundum æquale cylidraceo altitudinis a h vel a d, baſeos æquantis trientem quadrati a d; ipſum autem ſcalarium ſuſpenſum, eſt per corollarium ſecundum trigeſimæ primæ, æquale cylindraceo eiuſdem altitudinis, baſeos æquantis decimam ſextam partem tertij termini perſpectæ progreſſionis; vt eſt ſuſpenſum ad æquiponderans, vel vt baſis cylindracei æqualis ſuſpenſo ad baſim cylindracei æqualis æquiponderanti (ſunt enim ambo eiuſdem altitudinis) ita recta G a ad a F vel A E: ergo vt decima ſexta pars tertij termini perſpectæ progreſſionis ad trientem primi, ita G a primus ſubadiunctæ ad ſexdecim trientes tertij termini ſubadiunctæ. Eſt ergo recta a F vel A E æqualis trientibus ſexdecim tertij termini ſubadiunctæ, quod erat vnum ex demonſtrandis.

Rurſus quoniam libræ planæ axe a t, perpendiculo plano h a t, ſuſtentaculo H N parallelo ad axem, æquiponderans ſcalario ſuſpenſo eſt, per vigeſimam octauam, æquale cylindraceo altitudinis a h, baſeos æquantis ſextantem ſecundi termini perſpectæ progreſſionis, imminutum triente primi termini; ipſum autem ſcalarium ſuſpenſum eſt æquale cylindraceo eiuſdem altitudinis, baſeos æquantis decimam ſextam partem tertij termini perſpectæ; vt eſt baſis iſtius ad baſim illius, ita erit recta H a ad a A, vel ad E F; ergo vt decima ſexta pars tertij termini perſpectæ ad ſextantem ſecundi eiuſdem perſpectæ, imminutum triente primi, ita eſt a H primus ſubadiunctæ ad a A, hoc eſt ad ſexdecim ſextantes, vel ad octo trientes ſecundi ſubadiunctæ, imminutos ſexdecim trientibus tertij

ergo recta F E est octo trientes secundi termini subadiunctę, deductis sexdecim trientibus tertij termini, quod erat secundò demonstrandum. Tertia verò propositionis pars constat ex corollario primo trigesimæ primæ: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quoties suspensum diuiditur in duas partes æquales, & eodem axe brachióque inuenitur illis singulis suum æquiponderans, toties centri vnius ab axe, addita distantiæ centri alterius, conflant duplam distantiæ, qua ab eodem axe dissitum est centrum totius; id verò in præsenti calculo ita se habet. Nam cylindrus est altitudinis a d, baseos æquantis octantem tertij termini perspectę; æquiponderans verò illi est, per corollarium secundum trigesimæ, cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis sextantem secundi termini perspectæ. Vt igitur octans tertij perspectæ ad sextantem secundi eiusdem perspectæ; ita, axe b a, perpendiculo plano h a t, sustentaculo H N, brachium, siue primus terminus subadiunctæ, ad octo sextantes, vel quatuor trientes secundi subadiunctæ progressionis, siue ad distantiam grauitatis centri competentis cylindraceo baseos d z h a, altitudinis b a. Duę autem distantię A E, E F ęquant, vt ex calculo patet, octò trientes secundi termini subadiunctę: ergo in hoc rectè quadrat calculus illi proprietati initio huius corollarij positę.

COROLLARIVM II.

Quoniam duodecuplum decimæ sextæ partis est dodrans, vel duodecim decimæ sextæ partes; duodecuplum verò trientis est quadruplum assis, vel duodecim trientes: vt est decima sexta pars tertij termini perspectæ progressionis ad trientem primi termini; ita erit dodrans, vel tres quadrantes tertij termini, ad quadruplum primi: sed vt decima sexta pars tertij illius ad trientem primi; ita ostendimus esse radium G a vel a h ad A E distantiam primi radij: ergo vt tres quadrantes tertij termini perspectæ, ad quadruplum primi; ita est radius a d ad A E distantiam primi radij. Sed quadrans tertij termini perspectæ est æqualis quadrato rectæ a b vel peripheriæ d i t, vt ostendimus in corollario secundo trigesimæ primæ: ergo vt est triplum quadrati peripheriæ d i t, ad quadruplum quadrati a d; ita est radius a d ad distantiam A E. Dettonuillæus in epistola edita ad D. de Sluze agens de hoc scalario scripsit vt triplum quadrati peripheriæ d i t ad quadruplum quadrati a d, ita esse ipsum radium a d ad distantiam A E. Perspicis calculorum consonantiam omnimodam, ex quo mirum quantum confirmatur nostra methodus, imprimis verò calculus secundæ partis propositionis decimæ nonæ tertij libri quo vsi sumus in vigesima sexta, itémque calculus alter decimæ sextæ propositionis libri quarti, & calculus corollarij vndecimæ tertij, quos adhibuimus in vigesima septima superiore. Porrò calculus decimæ sextæ quarti exhibet æquiponderans dimidij solidi circa semiaxem superiorem geniti, libræ planæ axe posito ipso cycloideos magnæ axe, & distantia su-

stentaculi æquante radium. Inde verò per methodum in præsenti propositione vsurpatam, & sæpius aliàs in calculo sexdecim casuum, obtinetur distantia centri grauitatis ab axe pro dimidio solido genito circa semiaxem superiorem. Eius tamen calculum vitiosum esse scripsit Autor Historiæ cycloideos, in sua appendicula cuius mentionem iam fecimus sub calcem libri prioris, & ampliorem adhuc facturi sumus in propositione duodecima sequentis libri. Si vitiosus est, non certe ex hoc capite; sed neque, vti speramus, ex methodi labe aliqua occulta; sin autem ex computandi ἀπροσεξία, veniam huius errati non semel sponte sua ipse obtulit in suis ad Europæ Geometras literis, quas sub extremum librum quartum curauimus referri. Patet autem ex demonstratis in nouem istis postremis de scalario propositionibus, pari methodo posse assignari centrum grauitatis pro quolibet segmento scalari, abscisso per planum basi parallelum.

PROPOSITIO XXXIII.

SInt (*Fig. 63.*) quatuor quæcunque lineæ rectæ b, c, d, a quarum tres b, c, d sint proportionales; inter quartam a & primam b media proportionalis sit f; media verò inter eandem quartam a & tertiam d sit g.

Ostendendum est vt se habet recta b ad c, ita esse rectam f ad g. Item vt se habet recta c ad f, ita esse rectam g ad a; ac proinde rectangulum sub extremis c, a esse æquale rectangulo sub mediis f, g.

Quoniam enim tres rectæ b, c, d sunt proportionales, & rectangulum sub rectis a, b comprehensum ad rectangulum sub rectis a & d contentum est vt basis b ad basim d; ipsis autem rectangulis a b, a d æqualia sunt quadrata rectarum f, g; ergo vt recta b ad d, ita est quadratum f ad g: sed vt b recta ad d, ita per 20. sexti Euclidis in corollario, est quadratum b ad c; ergo vt quadratum b ad c, ita quadratum f, ad g; ergo vt recta b ad c, ita recta f ad g, quod erat vnum ex demonstrandis.

Rursus quoniam quadratum quod potest recta a, ad rectangulum comprehensum sub rectis a, b, se habet vt basis a ad basim b, sunt enim eiusdem altitudinis a: rectangulum autem sub rectis a, d contentum ad rectangulum sub b, d rectis se habet pariter vt basis a ad b, cùm eorum eadem sit altitudo d; ergo vt quadratum a ad rectangulum a b, hoc est ad quadratum f, ita se habet rectangulum a d, siue quadratum g, ad rectangulum b d, siue ad quadratum c; ergo vt quadratum a ad f, ita quadratum g ad c; ergo vt recta a ad f, ita recta g ad c; & alternando vt a ad g, ita f ad c; & inuertendo vt c ad f, ita g ad a; ac proinde rectangulum sub rectis c, a, est æquale rectangulo sub rectis f, g; quod erat alterum ex demonstrandis.

COROLLARIVM I.

Quod si tres rectæ b, c, d non sint proportionales; inueniatur media

h inter b & i; & aequo vt h recta ad c, ita fiat recta g ad i. Patet ex demonstratis vt est recta b ad c, ita esse rectam f ad i; & vt est recta c ad f, ita esse rectam i ad a.

Quoniam enim ex ante demonstratis vt est recta b ad h, ita est recta f ad g, & vt est recta h ad c, ita ponitur recta g ad i; ergo ex aequo vt est recta b ad c, ita est recta f ad i. Item quoniam vt est recta c ad h, ita est recta i ad g, & vt h recta ad f, ita est g recta ad a; ergo ex aequo vt est c ad f, ita est i ad a.

COROLLARIVM II.

Quod si quatuor rectae a, f, g, c sint proportionales, vt sicut est a ad b, ita sit g ad c; ostendetur tres rectas b, c, d esse proportionales. Nam rectangulum sub extremis a, c est aequale rectangulo sub mediis f, g. Rursus quoniam per lemma propositionis trigesimae primae decimi Euclidis, vt est recta f ad g, ita est quadratum rectae f ad rectangulum f g, hoc est ad rectangulum a c; & vt est g ad f ita est quadratum g ad rectangulum g f, hoc est ad rectangulum a c; ergo tria spatia quadratum f, rectangulum f g, quadratum g sunt proportionalia; ergo cum quadratis f, g aequalia sint rectangula a b, a d, tria rectangula a b, a c, a d sunt proportionalia, & eiusdem altitudinis a, ergo bases b, c, d sunt proportionales, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXIV.

ESto (*Fig. 64.*) quadratum i B t n, & parallelogrammum rectangulum i c d n; descriptus esto circulus z D E d c centro c, diametro z d; recta i c producta occurrat peripheriae in D: libra z d suspensa ex c perpendiculo c D, brachio c z, descripta intelligatur quadratrix c u d respondens quadranti circulari D E d c, ita vt sicut brachium z c ad c p quamlibet portionem radij c d, ita E p ordinatim ad diametrum z d applicata se habeat ad p u dimetientem quadratricis. Compleatur parallelogrammum z c i o, & describatur parabola i r t, cuius axis i B, vertex i, tangens o i, ac proinde ordinatim applicata B t. Recta E p producta occurrat lineis i n, i r t, B t, in punctis q, r, s.

Ostendendum est, rectam p u, esse aequalem sinui recto r H arcus q H sumpti in circulo q H s, diametri q s.

Rectae o i, i q, q r sunt proportionales per duodecimam tertij tetragonismicorum; praeterea ex tertia tertij tetragonismicorum media inter rectam f q & r s est ordinatim applicata p E; media autem inter f q, q r est, vt iam ostendimus, recta q i. Habemus ergo quatuor rectas primam f r, secundam H r, tertiam q r, quartam q s vel o i; media autem inter quartam q s & primam f r est E p, & media inter eandem quartam & tertiam q r est q i; ergo per superiorem, rectangulum sub r

H & sub o i est æquale rectangulo sub i q & sub p E comprehenso, hoc est, rectangulo c p E, nam c p, i q sunt æquales: sed rectangulo c p E est æquale rectangulum sub z c, & sub p u, cùm ex generatione quadratricis vt brachium z c ad c p, ita sit p E ad p u, rectangulumque sub extremis z c, p u sit æquale rectangulo c p E sub mediis; ergo rectangulum contentum sub rectis z c, p u est æquale rectangulo contento sub rectis q s vel z c & sub r H: ergo rectæ p u, r H sunt æquales, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXV.

Iisdem manentibus (*Fig.* 64.) ostendendum est arcum q H esse similem arcui duplo arcûs D E.

Radius z c bifariam secetur in A, & compleatur parallelogrammum A c i a; arcus D R sit duplus arcûs D E. Quoniam c p est æqualis sinui arcûs D E, rectangulum comprehensum sub sinu verso arcûs D R, & sub a i, erit æquale quadrato c p, vt demonstrat Clauius propositione quarta libelli sinuum: ergo rectangulum sub o i & sub dimidio sinus versi respondentis arcui D R, erit æquale quadrato c p: sed quadrato c p vel i q æquale est rectangulum contentum sub o i & sub q r: ergo q r est dimidium sinûs versi arcûs D R. Cùm igitur semicirculi z D d, q H s habeant diametros z d, q s in ratione dupla, sinus versus arcûs D R erit duplus sinûs versi competentis arcui simili sumpto in peripheria q H t; sed q r sinus versus arcûs q H est duplus sinûs versi attinentis ad arcum D R; ergo arcus q H est similis arcui D R, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVI.

Esto (*Fig.* 65.) semicycloides magna c d a b, cuius basis b c, axis b a æqualis diametro circuli genitoris b q a; ex c b producta abscindatur b z dupla ipsius a b, & fiat parabola a b z h cuius axis a b, ordinatim applicata b z, & latus rectum est rectæ a b quadruplum.

Ostendendum est quadratricem mixtam definitam sub finem decimæ sextæ propositionis, respondentem parallelogrammo mixto altitudinis æquantis rectam b a, librá grammica u b a suspensa ex b perpendiculo b c, brachio b u æquante rectam b a, esse æqualem figuræ parabolicæ a h z b, ita vt ducta quacunque d g parallela basi c b occurrente lineis a d c, a b, a h z in d, g, h, & per d, h actis d t, h r perpendicularibus ad c z, quadratrix respondens parallelogrammo mixto insistenti super arcu c d sit figura h z r, & reliqua a h r b respondeat parallelogrammo mixto quod insistit super curua d a.

Arcum a d esse æqualem rectæ g h, sumo ex inuentis Recentiorum Geometrarum, inter quos D. Vvren primus dicitur inuenisse integrum

arcum a d c esse duplum axis a b. De veritate autem huius assumpti nullus dubitare possum ex quo huius rei demonstrationem more antiquorum à Geometra celeberrimi nominis Tolosano subtilissimè elaboratam legi. Eo autem ita sumpto, cætera patent ex methodo simillima propositionis vigesimæ: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Si compleatur parallelogrammum c b u l, ex Archimedeis de parabolę quadratura demonstratis patet parabolicæ figuræ a h z b, axe b z, sustentaculo u l æquiponderare rectanguli a b z quatuor decimas quintas, hoc est, quadrati a b octo decimas quintas, cùm recta b z sit dupla rectæ b a. Duplum igitur huius æquiponderantis erunt sexdecim decimæ quintæ partes quadrati a b. Ipsa autem figura a h z b est vt patet, duo trientes rectanguli a b z, vel quatuor trientes quadrati b a. Quòd si b g bifariam secetur in g, patet rectam b z ad g h esse potestate vt binarium ad vnitatem, siue vt rectam a b ad a g. Igitur portio a b r n est quinque trientes rectanguli a g h comprehensi sub semidiametro circuli genitoris a q b & sub recta g h quæ ad a b est potestate vt binarius ad vnitatem: & quæ ad semidiametrum circuli genitoris est potestate vt 8. ad 1.

PROPOSITIO XXXVII.

ESto vt in trigesima quarta, (*Fig. 64.*) b g i a pars superior semicycloideos paruæ cuius circulus generator sit i x o, diametro i o descriptus; tota verò semicycloides parua sit z b i o; completo parallelogrammo o i c z; ex c z abscindatur c d æqualis ipsi c z, & descripta concipiatur pars superior i h d c semicycloideos paruæ, cuius circulus genitor z D d descriptus sit diametro z d. Libra z d suspensâ ex c, perpendiculo c D, brachio z c, intelligatur ita generari quadratrix c u d, vt sicut brachium z c ad c p, quamlibet portionem rectæ c d, sic E p ordinatim applicata ad generatoris diametrum z d, se habeat ad u p dimetientem quadratricis c u d p. Ista quadratrix intelligatur ad positionem rectæ i c transferri in curuam i h d illique insistere ad partes c, & ita insistens esse figura i F d h, cuius hæc est proprietas vt quæcunque u p parallela rectæ c i ducatur occurrens limbo c u in u; rectæ i d in p; curuæ i F in F, & curuæ i h in h, dimetientes u p, F h sint æquales. Intelligatur denique semicirculus o x i similiter transferri in curuam z b i, vt z M i o sit semicycloides magna, cuius circulus genitor o x i.

Ostendendum est quæcunque y g ducatur parallela rectæ i c, secans rectam o i in y, occurrens limbo z b i in g; limbo z M i in M; si per g ducatur recta g h parallela rectæ o i, occurrens rectæ i c,

in l; limbo i h d in h: et per h ducatur h q æquidiſtans rectæ y g, occurrens limbo i F d in F: rectam M F connectentem puncta M & F eſſe parallelam rectæ o i.

Intelligatur figura i n t B vt in trigeſima quinta: ergo recta h F vel p u eſt æqualis rectæ r H, ſiue ſinui recto arcûs q H ſimilis arcui D R, & ſumpti in circulo diametri q s vel o i, hoc eſt in circulo o x i. Præterea ex prima ſecundi libri propoſitione, recta i f eſt æqualis arcui D E, & eadem recta i f eſt æqualis arcui i m. Quoniam igitur peripheriæ ſunt vt diametri, tota i x o peripheria erit æqualis toti D E d; ergo vt D E ad quadrantem D E d peripheriæ circuli maioris, ita i m ad ſemiperipheriam i m x circuli minoris: ergo dimidium arcûs i m eſt ad i m x dimidium arcûs i x o, vt arcus D E ad D E d; igitur dimidium arcûs m i eſt ſimilis arcui D E: ergo cùm D E, E R ſint æquales, peripheriæ i m, D R erunt ſimiles: ſed peripheriæ q H, D R ſunt ſimiles per ſuperiorem trigeſimam quintam; ergo arcus i m, q H ſunt ſimiles; cúmque diametri o i, q s ſint æquales, erunt ipſi arcus i m, q H æquales: ergo recta y m eſt æqualis rectæ r H; ſed iſta eſt, per ſuperiorem trigeſimam quintam, æqualis rectæ p u, & rectæ p u eſt æqualis recta h F; ergo rectæ y m vel g M, & h F ſunt æquales: ergo cùm ſint etiam parallelæ, figura M g h F erit parallelogramma, ac proinde latera M F, g h æquidiſtabunt: ſed æquidiſtant o i, g h: igitur recta M F æquidiſtat rectæ o i, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Patet ex demonſtratis poſſe rem conuerti, nempe ſi limbi i M z, i F d ſecentur qualibet M F, parallela ad rectam i o, & per M, G ducantur M y, F q occurrentes limbis i b z, i h d in g, h, iungatúrque recta g h; ipſam g h eſſe parallelam rectæ i o.

PROPOSITIO XXXVIII.

Iiſdem manentibus (*Fig. 64.*) ducatur quæcunque M F parallela baſi o i, occurrens limbis i M z, i F d in M, F, & rectæ i c in G.

Oſtendendum eſt tres rectas o i, G F, M G eſſe proportionales.

Quoniam z b i l c, ex vigeſima quarta huius libri, eſt figura ex ſinibus verſis comparata ad figuram i h d c, tres rectæ o i, f h, g f erunt proportionales per eandem propoſitionem; ſed duabus g f, f h æquales ſunt duæ M G, G F, ſingulæ ſingulis: ergo tres rectæ o i, G F, M G ſunt proportionales, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Completo parallelogrammo o z d n, recta M F producta occurrat lateribus o z, d n in S, N; patet ſemicycloidi magnæ i M z o, cuius generator circulus o x i, ita reſpondere figuram i F d n, vt ſi iſtius baſis i n ſecetur vtcunque in q, & per q ducatur recta q F parallela rectæ o z, occurrens limbo i F d in F, & per F agatur F M parallela baſi i n, occurrens lineis

lineis i M z, o z in M, S, recta i q sit æqualis dimidio curuæ M i. Quoniam enim, per trigesimam sextam, curua M i est æqualis rectæ quæ media proportionalis sit inter quadruplam rectæ o i, & inter i y vel M G, dimidium curuæ M i, erit æqualis rectæ quæ media sit inter rectam o i totam & inter i y, quadratum enim dimidij illius est ad quadratum totius, vt vnitas ad quaternarium, prout ex elementis Euclideis notum est. Ergo cùm per præsentem tres rectæ o i, G F vel i q, & M G vel i y sint proportionales, patet rectam i q esse æqualem dimidio arcûs M i.

PROPOSITIO XXXIX.

IIsdem manentibus (*Fig. 64.*) ex recta i n abscindatur n L ipsi æqualis, & completo parallelogrammo c i L V, figuræ i F d c fiat ad positionem rectæ c V proportionalis i P V c; ita vt, sicut est c d ad c V, siue vnitas ad binarium, ita G F quælibet parallela rectæ c d dimetiens figuræ i F d c, se habeat ad G P dimetientem figuræ i P V c.

Ostendendum est semicycloidi magnæ z M i o ita respondere figuram i P V L; vt quæcunque ducatur S Q parallela rectæ o i, occurrens lineis o z, z M i, i P V, V L in S, M, P, Q; si per P agatur P T perpendicularis ad i L, recta i T sit æqualis curuæ M i. Atque ita per definitiones decimæ sextæ; si ex i c auferatur i Y ipsi æqualis, librâ grammicâ Y c suspensâ ex i perpendiculo i o, brachio i Y, figura i P V L sit quadratrix mixta & expansa rectanguli mixti insistentis super arcu z M i, altitudinis æquantis rectam i Y. Eiusmodi verò rectangulum mixtum est portio superficiei curuæ solidi cylindracei recti insistentis super basi z M i o.

Quoniam rectis G F, G P æquales sunt i q, q T, sicut G P est dupla rectæ G F, ita i T erit dupla rectæ i q; sed M i, per corollarium superioris propositionis, est etiam dupla rectæ i q: ergo recta i T est æqualis curuę M i: ergo, per vigesimam propositionem, figura i P V L est quadratrix mixta expansa rectanguli mixti insistentis super arcu z M i, libræ brachio i Y, perpendiculo i L; ita vt parallelogrammo mixto quod super curua i M insistit, respondeat quadratrix expansa i P T; parallelogrammo verò mixto quod super curua M z insistit, respondeat T P V L, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ex secundi libri tetragonismicorum decima quinta liquet, libræ grammicæ brachio i Y, perpendiculo i L, æquiponderans figuræ i P V L esse ad positionem rectæ i L condicta ratione duplum æquiponderantis figuræ i F d n; cùm illius dimetientes parallelæ perpendiculo i L sint duplæ dimetientium istius.

COROLLARIVM II.

Hæc quadratrix expanſa habet iſtam proprietatem, quæcunque ſit curua z M i cui parallelogrammum mixtum inſiſtit, vt portio eius quælibet V P Q, poſito libræ perpendiculo G Q, brachio æquante rectam G c, & altitudine parallelogrammi mixti æquante pariter eandem G c, ſit quadratrix mixta expanſa parallelogrammi mixti iam dicti. Id verò ita patet, vt ampliore explicatione non egeat.

COROLLARIVM III.

Eadem quadratrix expanſa integrè ſumpta eſt æqualis circulo genitori diametri z d, imminuto quatuor trientibus quadrati c d. Nam parallelogrammum c i n d eſt, ex Archimedeis de dimenſione circuli principiis, æquale dimidio circuli genitoris iam dicti; ipſa verò figura i h d c eſt æqualis quadrato c d, vt ex nona ſecundi liquet: ergo figura i h d n eſt ſemicirculus genitor imminutus quadrato c d; ſed figura i F d h, vel c u d p, eſt per decimam octauam tertij tetragoniſmicorum æqualis trienti quadrati c d; ergo tota figura i F d n eſt æqualis ſemicirculo genitori, imminuto duobus trientibus quadrati c d. Cùm igitur figura i F d n ſit dimidium figuræ i P V L patet quod propoſitum fuit in præſenti corollario.

PROPOSITIO XL.

Esto b c d a (*Fig. 66.*) quadrans circularis ex centro a deſcriptus; ſuper radio b a deſcriptum ſit quadratum b a f e; ponatur f a axis parabolæ e l a, & f e ordinatim ad illum applicata. Ex b a abſciſſa ſit a g ipſi æqualis, & librâ grammicâ g b ſuſpensâ ex a perpendiculo a d, brachio a g, intelligatur gigni quadratrix a n b m, quam *ſemihederaceam* voco, reſpondens quadranti circulari; ita vt, ſicut brachium g a ad quamlibet a m, ita m o ordinatim applicata ad diametrum g b ſit ad m n. Ex puncto a excitetur a p perpendicularis ad planum b a d.

Oſtendendum eſt dicylindraceum ad poſitionem plani p a d ad planum b a d recti genitum ex figuris a l e b, b c d a eſſe condicta ratione æquale cuneato baſeos a n b m, altitudinis a q e b; & quod vni æquiponderat axe a d, perpendiculo plano p a f, æquiponderare alteri.

Quoniam vt g a ad a m, ita ponitur m o ad m n, & ita, per duodecimam tertij tetragoniſmicorum, eſt q m dimetiens trianguli a e b, ad m l dimetientem figuræ parabolicæ a l e b, erit vt q m ad m l, ita m o ad m n; ergo rectangulum ſub extremis q m, m n eſt æquale rectangulo ſub mediis m l, m o: ergo cuneatum genitum ex triangulo a e b & quadratrice a n b m, eſt condicta ratione æquale dicylindraceo genito ex ceratoide

parabolicā à l e b, & ex figura b c d: ergo per vndecimam quarti habent centrum grauitatis in eodem ad planum p a d parallelo; ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Quæcunque figura ſit b c d a patet idem demonſtrari, & quamuis a b e f non ſit quadratum, ſed latera e b, b a forent inæqualia, ſemper cuneatum genitum ex triangulo comprehenſo ſub lateribus a b, b e, & ſub diametro a e, & ex quadratrice, erit æquale alteri dicylindraceo habebitque centrum grauitatis in eodem plano ad planum p a d parallelo; ac proinde idem erit vtrique æquiponderans ſpatium. Eadem porrò methodus idem probat ſi pro triangulo a e b, ſumatur alia figura eiuſque quadratrix pro figura a l e b.

PROPOSITIO XLI.

Maneat b c d a quadrans circularis, oſtendendum eſt dicylindraceum genitum ex ceratoide parabolica e l a b & ex quadrante circulari b c d a ad poſitionem plani p a f, eſſe æquale cylindraceo altitudinis e b, baſeos æquantis quadrantem figuræ b c d a totius, quando tota ſumitur: vel ſi ſumatur eius quælibet portio m o d a inter parallelas a d, m o, vel extra illas alia portio m o c b, eſſe cylindraceum altitudinis b e, baſeos æquantis quadrantem figuræ m o d a, vel b c o m, auctum ex nota lege vel imminutum rectilineo cognito.

Intelligatur cylindraceum altitudinis b e baſeos a n b, & ſemihederaceæ quadratrix altera a r b: ex corollario ſuperioris liquet dicylindraceo genito ex triangulo e a b & ex ſemihederacea a n b, æquale condicta ratione eſſe cylindraceum genitum ex parallelogrammo f a b e, & ex quadratrice altera a r b; eſt enim triangulum a b e quadratrix parallelogrammi: ergo vt i m ad m n, ita q m ad m r; ideóque rectangulum ſub extremis i m, m r eſt æquale rectangulo ſub mediis q m, m n; ipſáque ſolida, quorum illa rectangula ſunt ſectiones, ſunt inter ſe æqualia, & habent idem æquiponderans.

Rurſus quoniam vt i m ad m q, ita m o ad m n; rectangulum ſub extremis erit æquale rectangulo ſub mediis: ergo ſolidum ſectionis q m o, eſt æquale condicta ratione ſolido ſectionis i m n, & habent idem æquiponderans. Quoniam verò cylindraceum altitudiinis i m, baſeos a n b, habet æquiponderans cylindraceum eiuſdem altitudinis, baſeos a r b, quę eſt quadratrix baſeos a n b (quadratariũ enim ſpatium cylindracei eiuſdem altitudinis, habet baſim quadratricem baſeos cylindraecei: ergo cylindraceum altitudinis e b, baſeos a r b, æquiponderat ad poſitionem plani p a f condicta ratione cylindraceo altitudinis b e, baſeos a n b) igitur idem cylindraceum baſeos a r b æquiponderat cuneato genito ex

triangulo aeb & ex b c d a. Præterea quoniam tres i m, m q, m l, sunt proportionales tribus o m, m n, m r (sunt enim i m, m q, m l proportionales in ratione rectæ g a ad am ; in eadem quoque ratione proportionales sunt ex generatione quadratricis, tres m o, m n, m r) ergo ex æquo vt i m ad m l, ita m o ad m r : ergo rectangulum sub extremis i m, m r, est æquale rectangulo sub mediis l m, m o. Igitur solidum genitum ex ceratoide a l e b & ex figura b c d a, est condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis i m vel e b, baseos a r b m, quæ est quadratrix semihederaceæ.

Quadratricem autem secundam a r b reduci ad quadrantẽ totius figuræ b c d a, si tota sumatur, vel ad quadrantem figuræ m o d a, vel b c o m auctum vel imminutum certo quodam rectilineo, patet ex decima tertia primi libri, & ex corollario quarto decimæ quartæ tertij : ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quoniam cylindraceum altitudinis e b, baseos b c d a diuiditur in duo dicylindracea eiusdem baseos, quorum vnum habeat pro altitudine figuram ceratoidem e l a b, alterum figuram parabolicam e l a f, patet dicylindraceum genitum ex semisegmento parabolico e l a f ad positionem plani p a f, & ex figura b c d a, reduci ad solidum altitudinis e b cuius basis sint tres quadrantes figuræ b c d a, si totum sumatur: vel tres quadrantes figuræ condictæ a d o m, vel m o c b, aucti vel minuti cognito spatio.

COROLLARIVM II.

Ex vigesima octaua quarti tetragonismicorum liquet, si figura parabolica e l a f intelligatur ad positionem rectæ a d aptari limbo b c d, & libræ planæ ponatur axis a b, sustentaculum e f, æquiponderans parabolæ ita aptatæ esse æquale tribus quadrantibus condictis si tota suspendatur, vel auctis imminutisue certo rectilineo, si non suspendatur nisi secundum partem i l a f, vel e l i; nempe tribus illis quadrantibus auctis vel minutis, quos in superiore corollario collegimus. Eadem ratione si ceratoides figura a l e b intelligatur ita aptari eidem limbo b c d, æquiponderans erit quadrans condictus si suspendatur tota, vel quadrans condictus auctus minutúsque certo quodam rectilineo, si non suspendatur tota, sed ex parte, vt dictum fuit.

COROLLARIVM III.

In quinto nostrorum elementorum tradidimus principia vnde habeatur quadratrix secunda quadratricis respondentis hyperbolæ; ex illis verò inuenitur, æquiponderans esse notum rectilineum imminutum tribus quadrantibus condictis, quando b g ponitur axis transuersus sectionum oppositarum centro a descriptarum, & f d axis rectus. Quod hîc obiter monemus; nam isto corollario hîc opus nobis non est.

PROPOSITIO XLII.

Iisdem manentibus (*Fig. 66.*) ad positionem rectæ f a intelligantur per generationem continuam propagari quadratrices quarum radix sit parallelogrammum b e f a, quamcunque rationem habeant latera b e, b a; prima verò quadratrix sit triangulum b e a, secunda ceratoides parabolica a b e l, tertia a b e s, & ita sine vllo certo fine procedatur; ita vt rectæ i m, m l, m s &c. sint in continua progressione geometricâ.

Ostendendum est in ista serie graduum, quorum primus sit parallelogrammum b e f a, notum esse spatium æquale singulis ex quatuor post primum consequentibus.

Quoniam in decima sexta propositione ostendimus lineam a e esse rectam; patet triangulum a e b esse notum. Quoniam verò in duodecima tertij tetragonismicorum ostendimus lineam a l e esse parabolæ limbum, cuius axis a f, tangens a b; liquet ex quadratura parabolæ notum esse gradum dimetientis l m. Prætęrea quoniā per demonstrata ibidem initio quarti notum est grauitatis centrum quadratricis secundæ,& notum quoque rectilineum æquale ipsi quadratrici; ergo vt brachium g a ad longitudinem notam interceptam inter f a, & ipsi parallelam per grauitatis centrum secundę ductam, ita spatium secundæ notum ad spatium tertiæ; notum igitur est spatium dimetientis s m. Denique completo parallelogrammo b a d A, intelligantur ad positionem rectæ a d, tres gradus quorum primus sit parallelogrammum a f e b, secundus ceratoides parabolica b a l e, tertius figura A B d z, insistens super recta A d; igitur per vigesimam octauam quarti tetragoniscorum, figuræ a l e b vt iacet manenti, axe a b, sustentaculo d A, æquiponderat condicta ratione dimidium figuræ d B A z aptatum sustentaculo d A. Igitur cùm figura a b e l sit æqualis rectilineo noto & cùm eiusdem figuræ centrum grauitatis sit notum ex parabolæ quadraturâ, notum erit æquiponderans illi eidem figuræ axe a b, sustentaculo d A: ergo figuræ d B A z, æquale rectilineum est cognitum. Rursus quoniam vt i m ad m q, ita est m q ad l m, & ita est l m ad s m, & s m ad dimetientem quinti gradus; dimetientes primi, tertij, & quinti erunt proportionales; atqui dimetiens primi est m z, tertij m l; ergo cùm m z, m l, & z B sint proportionales, erit z B dimetiens quinti gradûs. Igitur quatuor gradus nempe secundus, tertius, quartus, quintus sunt singuli æquales rectilineo noto, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Primam quadratricem a q e b esse dimidium rectanguli parallelogrāmi a f e b, patet ex eo quod a q e limbus quadratricis sit diameter eiusdem parallelogrammi. Secundam quadratricem, siue tertium gradum,

esse trientem eiusdem rectanguli patet ex quarti tetragonismicorum prima, & ex quadratura parabolæ Archimedea. Tertiam quadratricem, siue gradum quartum, esse quadrantem eiusdem rectanguli ita ostenditur. Ex corollario quarto primæ propositionis quarti libri tetragonismicorũ recta l m incedens per centrum grauitatis tertij gradûs a l e b, ita secat rectam a b, vt a b vel g a sit ad a m, sicut quaternarius ad ternarium; ergo quartus gradus a f e b est tres quadrantes tertij a l e b: sed tertius est triens vel quatuor vnciæ parallelogrammi a f e d; ergo quartus est tres vnciæ, vel quadrans eiusdem parallelogrammi rectanguli. Denique quintum gradum esse partem quintam eiusdem rectanguli; demonstratur hoc pacto. Si recta a f secetur bifariam in E, centrum grauitatis parallelogrammi a f e b erit in parallelâ ad rectam a b, ductâ per E; & si f G recta ponatur duæ quintæ, vel quatuor decimæ partes totius f a, centrum grauitatis figuræ a l e f erit in recta per G ducta æquidistanter rectæ a b, per corollarium quintum primæ quarti tetragonismicorum. Cùm ergo totum f a b e diuidatur in duas partes e l a f, e l a b, quarum illa est dupla istius, si E H abscissa ex recta E a sit dupla rectæ E G, hoc est si E H sit duæ decimæ partes rectæ f a, centrum grauitatis partis a l e b erit per reciprocationis legem, quam libra præscribit, in recta per H ducta æquidistanter rectæ a b. Præterea quoniam a d vel a f est ad a H vt denarius ad ternarium, pars autem a l e b est triens parallelogrammi a f e b, æquiponderans isti parti axe a b, sustentaculo d A, erit tres decimæ partes illius trientis, hoc est, erit vna decima pars rectanguli a f e b; ergo cùm duplum huius æquiponderantis sit quarta quadratrix, vel quintus gradus, patet istum quintum gradum esse quintam partem rectanguli a f e b. Hinc patet gradus istos ad primum comparatos esse vt vnitatem ad numerum sedis quam in illa serie occupant, hoc est secundum esse ad primum vt vnitatem ad binarium; tertium, vt vnitatem ad ternarium; quartum, vt vnitatem ad quaternarium; quintum vt vnitatem ad quinarum; quod de consequentibus singulis gradibus esse verum constabit ex mox demonstrandis: quamuis enim iis non egeamus in præsens, quia tamen illa iamdiu à nobis parata sunt, & huc solum transferanda sunt ex libro vbi alias gaduum series pari pacto demonstramus, non iniucundum id fore Lectori speramus. Hinc porrò liquet si recta i m parallela perpendiculo a d incedat per grauitatis centrum primi gradûs; rectam a m esse dimidium ctæ a b; si per centrum secundi, ipsam a m esse duos trientes ipsius a b; si per centrum tertij, esse tres quadrantes; si per centrum quarti, esse quatuor quintas; ita vt b m pro primo gradu sit dimidium, pro secundo triens, pro tertio quadrans, pro quarto quinta pars, qui progressus pergit in infinitum, si graduum ratio progrediatur, vti diximus.

PROPOSITIO XLIII.

ESto (*Fig.* 67.) quadratum b a d e, & ex puncto a excitata sit a c perpendicularis ad planum b a d e, æqualis lateri ba: completo quadrato b a c t, intelligatur describi graduum series suprà exposita, quorum primus sit quadratum b a c t, secundus sit triangulum comprehensum lateribus b a, a c, & diametro b c; tertius sit ceratoides parabolica comprehensa arcu parabolæ quam tangat in b recta b a, & cuius axis sit b t: & sic deinceps, ita vt graduum istorum consequens sit quadratrix figura antecedentis, brachio p b æquante latus b a, & perpendiculo b t. In illa seria *numerus gradualis* appelletur ille quo sedes cuiúsque gradus designatur, initio ducto à primi, siue quadrati b a c t, sede primâ. Intelligatur quicunque gradus b a c m, & ad positionem plani t b a, ex illo gradu & ex quadrato b a d e intelligatur gigni dicylindraceum, ita vt (si in recta b a sumatur quodcunque punctum n, & per illud ducatur n m parallela rectæ c a, limbo gradûs b m c a designati occurrens in m; item recta n g ducatur complens parallelogrammum n g e b, & recta m g) triangulum n m g sit dimidium illius parallelogrammi, quod erit sectio dicylindracei & plani per n ducti æquidistanter plano t b e. Per a & e agatur diameter a e, occurrens rectæ n g in f: super lateribus b e, d e construantur quadrata b p A e, e d u z: per f ducta sit f h complens parallelogrammum a b h i; per i ducta sit i l recta parallela lateri a c, trianguli c a d. Solidum illud cuius sectiones parallelæ plano t b e sunt triangula n m g, a c d, vocetur *semidicylindraceum*. Isti semicylindraceo & plano c a e sectio communis vocetur *septum medium*, quod ad positionem plani b a c intelligatur transferri in planum p b e, & ita insistere rectæ b e, vt septi dimetiens λ f, perpendicularis ad planum b a d e excitata ex puncto f, sit æqualis dimetienti D h sectionis translatæ e b p D. Intelligatur figura e g d u s, cuius dimetiens g s parallela rectæ d u se habeat ad λ f, sicut f g ad g B, vel e z.

Ostendendum est, si septum medium transferatur ad positionem plani t b e in planum d e z, generetque figuram d e F u; & si, recta a e manente, circumuoluatur rectilineum a p A e, lineam e D p congruere lineæ e F u, punctúmque D puncto F; & in serie illa graduum, post gradum b a c m proximè sequi gradum d e F u, & post d e F u gradum d e s u.

Vt est recta c a ad m n, ita esse l i ad λ f ostenditur methodo quam adhibuimus pro simili causa in quarti libri propositione prima. Præterea

quoniam b n, g e latera parallelogrammi b n g e sunt æqualia; itémque e g, g f latera quadrati e g f h; rectæ b n, g f, h f erunt æquales: igitur vt p b ad b n, ita est g n ad g f, & ita est p b ad h f; ita verò quoque est m n dimetiens gradûs assumpti, ad dimetientem proximè consequentis. Cùm igitur in triangulo g n m lateri m n æquidistet λ f; vt est g n ad g f, ita erit m n ad λ f, vel g F; sed ita etiam est eadem m n ad dimetientem proximè sequentis gradûs; ergo λ f vel g F est dimetiens gradûs proximè sequentis post assumptum. Præterea quoniam anguli a e b, a e d in quadrato b a d e sunt æquales; recta b e, peractâ circumuolutione, congruet rectæ e d, punctúmque h puncto g, cùm e h, e g sint æquales; & punctum D puncto F, cùm h D, g F singulæ, sint æquales rectæ λ f; & h D, g F sint perpendiculares ad rectas b e, e d. Igitur figuræ b p D e, d e F u sibi mutuò congruunt post translationem, ideóque sunt æquales singulæ gradui proximè sequenti post assumptum.

Præterea quoniam vt g n ad g f, hoc est vt a b ad b n, ita ponitur λ f ad g s; & vt a b ad b n, ita ex generatione quadratricum constituentium hos gradus, est superioris dimetiens ad sequentis dimetientem, patet g s esse dimetientem gradûs qui sequitur post gradum dimetientis g F. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quoniam vt n g ad g f, ita ex constructione est λ f ad f g, patet rectangulum λ f g comprehensum sub mediis esse æquale rectangulo g s comprehenso sub extremis, ac proinde cylindraceum altitudinis g n baseos d e s u, esse condicta ratione æquale dicylindraceo ad positionem plani t b e genito ex triangulo a e d, & ex septo medio; vel esse æquale duplo portionis semicylindracei, interceptæ inter plana c a d, c a e.

COROLLARIVM II.

Ex demonstratis liquet figuram h f λ esse ad triangulum g f λ, vt est figura b a c m ad triangulum c d a. Est enim h f g e quadratum, & super latere h f constructum intelligitur parallelogrammum h f λ, in quo intelligitur series graduum quorum primus est parallelogrammum h f λ, secundus triangulum h f λ: ergo cùm vt parallelogrammum b a c, siue primus gradus, ad triangulum b a c, siue ad secundum gradum, ita in alia serie sit parallelogrammum h f λ ad triangulum h f λ; patet eandem esse vtrobique rationem dimetientium in gradibus; ergo cùm respectu quadrati h f g e, figura h f λ habeat numerum eundem gradualem quem habet figura b a c m in ordine ad quadratum b a d e; patet vt est b a c m ad c a d triangulum, ita esse h f λ ad triangulum λ f g. Igitur cùm post conuersionem recta h f congruat rectæ f g, & planum h f λ sit in plano g f λ, idque eueniat perpetuâ lege, vbicunque inter a & e iaceat punctum f; patet solidum cuius sectio est figura h f λ, esse ad solidum cuius sectio est triangulum λ f g, hoc est, ad semidicylindraceum, vt est figura b a c m ad triangulum c d a.

PROP.

PROPOSITIO XLIV.

IIsdem manentibus (*Fig. 67.*) gradus quisque in illa serie integrè sumptus inter parallelas b e, a d, est ad primum gradum b a c t vt vnitas ad numerum gradualem illiusmet gradûs.

Sit quilibet gradus C à primo diuersus,& vnus ex quatuor quorum tetragonismum dedimus in corollario quadragesimæ secundæ; proximè antecedens sit B; cuius numerus gradualis sit E. Dico proximè sequentem D esse ad rectangulum b a c t, vt est vnitas ad compositum numerum ex binario & ex E; vel vt est vnitas ad numerum gradualem gradûs C auctum vnitate; vel vt est vnitas ad numerum gradualem ipsius D.

Quoniam sectio b a c m est vnus gradus ex quinque quos in corollario quadragesimæ secundæ ostendimus habere illam proprietatem, quam in præsenti extendere volumus ad consequentes omnes eiusdem seriei & ordinis; sectio b a e m erit ad primum gradum b a c t, vt vnitas ad numerum E eiusdem b a e m gradualem. Triangulum verò rectilineum d a c, cùm sit sectio semicylindraccei, est ad rectangulum c a d, vel c a b, vt vnitas ad binarium. Quoniam, vt ex corollario secundo superioris liquet, portio semicylindracei triangulo b a e ad positionem plani c a b insistens est ad semidicylindracei portionem insistentem super triangulo a d e, vt est figura b a c m ad triangulum c d a; compositum ex duobus solidis iam dictis, ad portionem semidicylindracei iam dictam habebit porportionem quam duæ simul figuræ b a e m, c d a habent ad c d a. Cùm igitur b a c m sit minutia primi gradûs b a e t, habens pro numeratore vnitatem, pro denominatore numerum E, & cùm d c a sit minutia primi gradûs habens pro numeratore vnitatem, pro denominatore binarium, patet has minutias reductas ad communem denominatorem 2. E, esse inter se vt numeratores E & 2. Igitur duæ simul baem & d c a sunt ad d c a vt † E † 2. est ad † E. Igitur totum semidicylindraceum ad portionem insistentem super triangulo a e d, est vt † E † 2. ad † E: ac proinde portio insistens super triangulo a e d est totius semidicylindracei minutia cuius numerator est † E; denominator verò est † E † 2. Semidicylindraceum autem est æquale cylindraceo altitudinis a b, baseos quæ sit trianguli c a d minutia habens pro numeratore vnitatem, pro denominatore numerum E; sicuti b a c m sectio illius solidi ad parallelogrammum b a c t, quæ est sectio totius semidicylindracei, est vt vnitas ad numerum E; vt autem sectio b a c m ad parallelogrammum b a c t, ita h i l λ sectio, ad parallelogrammum h i l; ergo vt ex 28. quarti tetragonismicorum liquet, totum semicylindraceum est ad cylindraceum altitudinis a b, baseos c d a, vt est sectio b a c m ad parallelogrammum b a c, vel vt vnitas ad numerum E.

Rursus quia per corollarium primum superioris portio semidicylindracei insistens super triangulo a e d, si conuertatur in cylindraceum altitudinis e d, dat basim quæ est dimidium gradûs D quæsiti; cylindra-

ceũ,cuius altitudo d e, basis ponatur rectanguli d a c minutia habens pro numeratore vnitatem, pro denominatore numerum E, erit cylindraceum altitudinis d e; baseos æquantis quadratricem D. Minutia autem minutiæ habetur ex ductu numeratoris in numeratorem, & denominatoris in denominatorem; ergo illa minutia est rectanguli d a c, siue primi gradûs, minutia habens pro numeratore numerum E, pro denominatore numerum † E E † 2. E; hoc est, numeratorem & denominatorem partiendo per numerum E, habens pro numeratore vnitatem, pro denominatore numerum E auctum binario, quæ est minutia proposita; cùm ergo hæc minutia sit gradus quæsitus D, vt ostendimus, patet gradum D esse ad primum vt est vnitas ad numerum gradualem ipsius D.

Si igitur gradus C sit quintus ex inuentis in corollario primo superioris; erit D sextus, habebitque proprietatem propositam. Rursus si C ponatur esse sextus, erit D septimus &c. in infinitum; ergo qulibet gradus in ista serie infra primum sumptus, est ad primum vt vnitas ad numerum gradualem ipsius, quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Tres superiores propositiones huc transtulimus ex libro manuscripto vbi (*Vt in fronte eius exaratum extat*) series quadratricum primi præsertim & secundi ordinis propagatur in infinitum, & traditur quadratura graduum absoluta in primo ordine: in secundo quoque, eorum, qui sedes numero pares occupant; eorum autem qui sedes numero impares obtinent, traditur quadratura hac conditione, vt nota priùs sit quadratura ipsa circuli & hyperbolæ. *Primi ordinis quadratrices eas appello quas hîc demonstratas habes; secundi ordinis eas in quibus* (Fig. 66.) *primus gradus est figura comprehensa sub arcu circuli vel hyperbolæ centro a, axe b g descriptorum; sub semiaxe a b producto, si opus fuerit; & sub semiaxe a d coniugato, vel sub parallelis ad ipsum: secundus autem gradus est quadratrix illi primo respondens axe g b, perpendiculo a d, brachio a g; istum secundum gradum iam olim appello semihederaceam, eò quòd apud Proclum non multùm absimilem figuram legerim* κισσοειδῆ *dictam. Primum autem appellaui ordinem illum, quem hoc loco demonstrauimus, propterea quod primus ille videatur esse in quem incurrit Geometra istarum rerum indagator; nam inter figuras rectilineas parallelogramma videtur primum locum tenere, secundus verò huius ordinis gradus generationem habet perspicuam, cùm eius linea quadratrix sit ipsius parallelogrammi diameter a c. Vnde infero aliarum figurarum quadratrices lineas esse earum veluti diametros, gignuntur enim eadem prorsus lege, qua diameter in parallelogrammo, & quoties centrum grauitatis distat à puncto suspensionis a, interuallo æquante dimidium brachij a g, bipartitur ipsam figuram. Ita si ponas arcum b n a esse semicirculum diamemetro b a descriptum, eius prima quadratrix genita brachio g a, perpendiculo a d, diuidet bifariam ipsum semicirculum; vnde & diametri effectum quasi primarium consesequetur. Nam diametrum Aristoteles in problematum sectione decima quinta dictam vult ex eo quod* μετρούμενον (*ita enim appellat rectilineum a b e f comparatum ad rectam a e*) *bifariam secetur per ipsam: verba illius hæc sunt* ἢ ὅτι διάμετρος δίχα διαιρεῖ, καθά-

πρ τὔνομα ὑποσημαίνει, an quod diameter bifariam ſecat, ſicut & nomen ipſum ſubindicat. *ſed quo pacto (vt hoc obiter inquiramus) id ſubindicat? In Ethic. quidem cap. 4. lib. 5.* δικαστὴν, iudicem *vult dictum quaſi* διχαστὴν, bipartitorem *interpretati liceat: an ergo ſimili originatione* διάμετρος *appellabitur quaſi* διχάμετρος bipertiens? *Attamen quoniam iſta nominis explanatio longiùs petita & improbabilis videtur, planiùs dixeris* διάμετρον *componi ex particula ipſa* διὰ, *quæ Euſtathio teſte Iliad. γ. pag.* 800. *lin.* 19. διχασμὸν diuiſionem in duas æquas partes *ſæpe innuit. Cæterum cùm Archimedes lineæ illi quam* quadratricem *nominamus nomen non indiderit, & cùm potuiſſet vt ex dictis patet non incongruè appellari* diameter; *vt illius peruulgatæ vocis vim ſignificandi non extenderemus*, quadratricis *nomen aſſumpſimus, poſtquam legimus in Proclo Hippiam ſcripſiſſe de lineis* τετραγωνιζούσαις. *Porrò eadem* quadratricis *voce aliquoties deſigno lineam, aliquandò verò figuram, quod ſatis ex aliis adiunctis liquet, & quod in ſectionibus conicis paßim vſurpari abſque vlla rerum confuſione video.*

PROPOSITIO XLV.

Iisdem manentibus vt in quadrageſima (*Fig.* 66.) oſtendendum eſt quadratrici a n b vt iacet manenti, axe a b, ſuſtentaculo f e, æquiponderare quindecimam partem quadrati f a b e.

Intelligatur ad poſitionem rectæ f a ipſa figura b c d a aptari limbo a n b, & figuræ e l a f prima quadratrix brachio g a, perpendiculo a f genita aptari quoque ſuſtentaculo f e; ergo cùm vt i m recta ad m o, ita per tertiam tertij tetragoniſmicorum ſit ipſa m o ad i l, & vt m o ad m n dimetientem quadratricis ſuæ, ita ſit i l ad dimetientem quadratricis ſuæ, erit ex æquo vt i m ad m n, ita mo ad dimetientem quadratricis primæ reſpondentis figuræ e l a f: & alternando vt i m ad m o, ita m n ad dimetientẽ primæ illiusquadratricis: ſed vt m o ad m n, ita eſt dimetiens primæ quadratricis reſpondentis figuræ e l a f, ad dimetientem ſecundæ quadratricis reſpondentis eidem figuræ; ergo alternando vt m o ad dimetientem primæ quadratricis illius, ita m n ad dimetientem ſecundæ: ſed ita etiam oſtendimus eſſe i m ad m n: ergo vt i m ad m n, ita eſt ipſa m n ad dimetientem ſecundæ illius quadratricis. Igitur ſicut in corollario quarto octauæ libri tertij oſtendimus pro ſimili causâ, dimidium ſecundæ iſtius quadratricis aptatum ſuſtentaculo f e, axe a b, ad poſitionem rectæ f a condicta ratione æquiponderat figuræ a n b.

Reſtat vt oſtendamus dimidium huius quadratricis eſſe decimam quintam partem quadrati a b, vel f a. Id verò ita oſtenditur; libra g b ſuſpensâ ex a, perpendiculo a f, brachio a g, quadratrix figuræ a b e l, ſiue tertij gradûs ordinis primi, eſt quartus eiuſdem; quadratrix autem toti quadrato a b e f, eſt ſecundus gradus ordinis eiuſdem: ergo ſi ex æquiponderante totius auferatur æquiponderans partis e l a b, reſtabit æquiponderans alterius partis e l a f, nempe ſecundus gradus primi ordinis imminutus quarto eiuſdem ordinis. Sed vt primus ad ſecundum, ita eſt

ſecundus addititius ad tertium addititium, & ita quoque eſt quartus ablatiuus ad quintum ablatiuum: ergo ſecundus gradus primi ordinis imminutus quarto, habet pro quadratrice tertium gradum, imminutum quinto. Igitur quadratrix illa ſecunda eſt tertius imminutus qninto: ſed tertius eſt triens, quintus eſt quinta pars quadrati f e b a: ergo ſecunda quadratix eſt duæ decimæ quintæ partes quadrati e f a b: ergo dimidium illius eſt decima quinta pars quadrati e f a b, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Cùm iſtorum graduum, & eorum partium quadratura nota ſit, notum quoque erit, vt patet, dimidium tertij gradûs ex parte ſumpti imminutum quinti parte inter eaſdem ad rectam h g parallelas ſumptâ: hoc eſt notum erit æquiponderans portioni figuræ a n b m inter eaſdem parallelas deſignatæ.

PROPOSITIO XLVI.

IIſdem vt in trigeſima nona manentibus (*Fig. 64.*) libræ planæ axe i L, ſuſtentaculo B t, oſtendendum toti figuræ i P V L æquiponderans eſſe quadrantem tertij termini perſpectæ progreſſionis, auctum triente ſecundi, & imminutum ſeptemdecim nouenis primi termini, ſiue quadrati c d.

Ex corollario primo ſeptimæ tertij libri ſemicuneo expãſo c i h d, cuius circulus genitor z D d, axe i n, ſuſtentaculo B t, æquiponderans eſt æquale quadrato c d. Parallelogrammo i c d n, ex eodem corollario, æquiponderat dimidium quadrati i c, ſiuę quadrantis termini tertij progreſſionis perſpectæ: ergo figuræ i h d n æquiponderat octaua pars tertij termini perſpectæ, imminuta quadrato c d. Præterea ex vigeſimæ ſextæ corollario ſecundo dicylindraceum genitum ex figura c u d p, vel i F d h, & ex c d h i, ad poſitionem rectæ c i eſt æquale cylindraceo altitudinis B i, baſeos æquantis ſextantem quadrati c d: cylindraceum autem cuius altitudo i c, baſis c u d p (quæ eſt triens quadrati c d, vt ex decima octaua tertij tetragoniſmicorum liquet) eſt per reciprocationis leges æquale cylindraceo altitudinis c d, cuius baſis ſit ad c u d p, vel ad trientem quadrati c u, vt eſt i c dimidium ſecundi termini adiunctæ, ad c d radium, ſiue ad primum terminum adiunctæ. Sed vt ſecundus terminus adiunctæ ad primum, ita eſt ſecundus perſpectæ, ſiue circulus diametri zd, ad primum, ſiue ad quadratum c d: ergo cylindraceo baſeos c u d p, altitudinis c i eſt æquale cylindraceum altitudinis c d, baſeos æquantis ſextantem ſemicirculi genitoris. Igitur ſi ex hoc cylindraceo altitudinis c d dematur aliud eiuſdem altitudinis, baſeos æquantis ſextantem quadrati c d, relinquetur cylindraceum altitudinis c d, baſeos æquantis ſextantem circuli genitoris diametro z d deſcripti, imminutum ſextante quadrati c d. Denique ex trigeſima tertia conſtat æquiponderans figuræ c u d p axe c d, ſuſtentaculo G N, ita vt recta c G æquet radium c D, eſſe decimam

quintam partem quadrati c d. Cùm igitur æquiponderans figuræ super axe insistentis sit dimidium tertij gradûs expositi & demonstrati in corollario quarto octauæ tertij libri; patet tertium gradum ad positionem rectæ i c, quorum primus sit quadratum B i n t, secundus i h d n, esse quadrantem tertij termini perspectæ, imminutum duplo quadrati c d: tertium verò gradum cuius primus sit idem quadratum B i n t, secundus figura c u d p vel i F d h, esse duas decimas quintas partes quadrati c d. Quoniam igitur ex methodo decimæ tertiæ libri quarti, si in vnum conferantur tertius ille vterque gradus, vnà cum basi cylindracei altitudinis c d, quod æquale inuenimus dicylindraceo sectionis F h q, dimidium illius conflati, est æquiponderans figuræ i F d n vt iacet manenti, axe i n, sustentaculo B t; patet æquiponderans istud esse octauam tertij termini perspectæ progressionis, auctam sextante secundi, & imminutam septemdecim decimis octauis primi, siue quadrati c d.

Quoniam igitur per corollarium primum trigesimæ nonæ æquiponderans figuræ i P V L est duplum æquiponderantis figuræ i F d n, patet axe i L, sustentaculo B t æquiponderans figuræ i P V L vt iacet manenti esse quadrantem tertij termini perspectæ progressionis, auctum triente secundi, & imminutum septemdecim nouenis primi, siue quadrati d c, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Duplum igitur huius æquiponderantis, siue tertius gradus respondens figuræ i P V L ad positionem rectæ i c, posito primo i B t n, & secundo ipsâ i P V L, est dimidium tertij termini perspectæ progressionis, auctum besse secundi, & imminutum triginta quatuor nouenis partibus primi termini, siue quadrati d c.

PROPOSITIO XLVII.

ESto vt in trigesimâ sextâ (*Fig. 65.*) semicycloides magna c d a b genita circulo a q b, diametri a b; ex c b abscissa sit b z dupla rectæ a b, & descripta sit parabola a h z, cuius axis a b, ordinatim applicata b z, quam in illa trigesima sexta ostendimus esse quadratricem mixtam parallelogrammi mixti insistentis super arcu c d a prædicti altitudine d s æquante rectam b a vel b u, genitam libræ brachio b u perpendiculo b c. Esto paræterea figura b i f z cuius latus z f æquet semicycloideos basim c b: ipsa autem sit quadratrix mixta in superiore propositione demonstrata, respondens eidem parallelogrammo mixto, sed genita libræ brachio b r æquante rectam b a, & perpendiculo b a. Intelligatur ex istis figuris subcontrariè positis gigni dicylindraceum ad positionem plani f d t, (sicuti in simillimo casu intelligi oportuit in vigesima secunda propositione) altitudinis bu, baseos b m z r.

Ostendendum est figuram b m z f i esse ad positionem rectæ b a, condicta ratione æqualem quadratrici secundæ quæ respondeat figuræ b i f z r, & generetur libræ p z brachio p b æquante ipsam b z, perpendiculo b u.

Compleatur parallelogrammum b a P z, vt a P æquidistet ordinatim applicatæ b z, & tangat parabolam a h z in a. Igitur figura a n P z h est ceratoides parabolica, ac proinde quadratrix quadratricis respondens parallelogrammo a b z P, & genita libræ o a P brachio o a æquante rectam a P, & perpendiculo a b. Igitur vt in quadragesima propositione & sequente ostendimus, si figuræ b i f z eodem brachio o a vel pb latere parallelogrammi a o p b manente, gignatur prima quadratrix b x A z, respondens figuræ b i f z, & huius primæ quadratricis gignatur quadratrix altera b y A z, cylindraceum altitudinis b a vel b u, baseos b y A z, erit æquale dicylindraceo genito ex ceratoide parabolica a P z h, & ex figura b i f z r. Quoniam verò dicylindraceum genitum ex b i f z r & ex a n P z h, itemque aliud ex b i f z r & ex a h z b sunt simul cylindraceum genitum ex b i f z r & ex parallelogrammo a b z P, patet figuram b y A z m esse condicta ratione æqualem figuræ b i f z r; ac proinde figuram b y A z r esse condicta ratione æqualem figuræ b i f z m, & si habeatur quadratrix secunda b y A z r, auferatúrque ex b i f z r, relinqui spatium b m z r: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLVIII.

Reuocato schemate propositionis quadragesimæ sextæ (*Fig.64.*) ex recta i o abscindatur o C ipsi æqualis.

Ostendendum est librâ C L suspensa ex i, perpendiculo i c, brachio C i, æquiponderans figuræ i P V L integrè sumptæ esse æquale trienti secundi termini perspectæ progressionis, deductis octo quadragesimis quintis partibus primi, siue quadrati c d.

Quoniam figuræ i F d c, i P V c ita insistunt super basi i c ad positionem rectæ i L, vt dimetiens maioris sit dupla dimetientis minoris, ex vltima quarti tetragonismicorum liquet centrum grauitatis pertinens ad maiorem distare duplo longiùs ab axe c i, quàm distet grauitatis centrum i F d n. Igitur librâ grammicâ z d suspensâ ex c perpendiculo c i, brachio z c æquiponderans maiori erit quadruplum eius quod æquiponderat minori; nam si minoris centrum transferatur in centrum maioris æquiponderabit illi duplum prioris æquiponderantis; ergo minoris duplum habens idem centrum maioris figuræ postulat quadruplum primi æquiponderantis. Atqui minoris duplum in centro maioris collocatum habet idem æquiponderans, quod maior figura: ergo maiori figuræ æquiponderat quadruplum minoris, brachio z c: ergo per octauam secundi tetragonismicorum maiori figuræ brachio c I duplo brachij c z, æqui-

ponderat duplum ſpatij, quod, brachio c z, æquiponderat minori. Id ipſum verò pari pacto oſtenditur de æquiponderante ipſi quadratrici primæ: ita vt quadratrix ſecunda figuræ i P V c genita brachio c I, ſit dupla quadratricis ſecundæ reſpondentis minori i h d c, brachio z c.

Rurſus figuræ c i h d brachio c z quadratrix ſecunda eſt ex decima ſeptima tertij duæ nouenæ quadrati c d, figuræ autem c u d p vel i F d h per trigeſimam ſecundam eſt duæ quadrati c d decimæ quintæ partes: ergo per ſubductionem quadratrix ſecunda figuræ i F d c genita brachio c z eſt quatuor quadrageſimæ quintæ partes quadrati c d. Igitur figuræ i P V c, brachio c I, octo quadrageſimæ quintæ partes quadrati c d.

Præterea quoniam ex dimenſione circuli Archimedea conſtat parallelogrammum i c d n, cuius latus c i æquat peripheriam D E d, eſſe æquale dimidio circuli genitoris, totum parallelogrammum i c V L erit æquale circulo diametri z d; ſed iſtius parallelogrammi brachio c I quadratrix ſecunda eſt triens ipſius, vt ex quadrageſima quinta conſtat, vel aliunde ex duodecima tertij tetragoniſmicorum adiunctâ parabolæ quadraturâ: ergo ſi de quadratrice ſecunda totius parallelogrammi dematur quadratrix ſecunda partis i P V c, reſtabit quadratrix ſecunda alterius partis i P V L nempe triens circuli genitoris ſemidiametro c d deſcripti, imminutus octo quadrageſimis quintis quadrati c d, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Si non ſumatur niſi i P T pars totius i P V L, inuenietur pari pacto quadratrix ſecunda illius, ex propoſitionibus vnde eruta eſt pro tota i P V L.

PROPOSITIO XLIX.

Reuocato (*Fig. 65.*) ſchemate propoſitionis quadrageſimæ ſeptimæ, figura b m z r eſt bes circuli geniti ſemidiametro a b, deductis quinquaginta duabus quadrageſimis quintis partibus quadrati b a.

Quoniam Figura b i f z r eſt per corollarium tertium trigeſimæ nonæ æqualis circulo ſemidiametri b a, deductis quatuor trientibus quadrati b a, figura autem b i f z m, ſiue quadratrix ſecunda figuræ b i f z r (eam enim eſſe eiuſmodi oſtendimus in quadrageſima ſeptima) eſt per ſuperiorem triens eiuſdem circuli, deductis octo quadrageſimis quintis eiuſdem quadrati: ergo per ſubductionis leges figura b m z r eſt bes circuli geniti ſemidiametro a b, deductis quadrati b a quinquaginta duabus quadrageſimis quintis partibus, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Sicuti in vigeſima ſecunda oſtendimus ſi arcus c d a ſit quadrans peripheriæ circularis baſim cylindracei altitudinis b a, geniti ex quadratricibus mixtis ſubcontrariè poſitis & reſpondentibus parallelogrammo

mixto altitudinis d s æquantis rectam b a, æquare quadratricem mixtam respondentem ipsis quadratricibus mixtis insistentibus super arcu c d a, posito libræ brachio singularum secundarum quadraticum illo, quo subcontraria quadratrix prima genita fuerit. Ita hic, & generaliter quæcunque sit curua c d a, idipsum ostendetur adhibito corollario secundo decimæ octauæ, vbi ostenditur vtrique mixtæ quadratrici primæ, vel vtrique vngulari superficiei hoc pacto sumptæ idem respondere æquiponderans, prout ibi res explicata fuit. Superest vt veniamus ad solutionem problematum ab Anonymo, cui nunc Dettonuillæus nomen est, propositorum sub initium Octobris postea quam lapsum fuit tempus præstitutum inuentioni aliorum, quatuor antè mensibus propositorum.

PROPOSITIO L.

Iisdem manentibus (*Fig. 65.*) esto semicycloideos magnæ basis c b, axis b a arcus c d a.

Ostendendum est si recta b a ita secetur in g, vt portio b g sit duo trientes totius b a, & per g agatur g d parallela basi b p, grauitatis centrum totius curuæ c d a esse in recta g d.

Quoniam parallelogrammum mixtum insistens curuæ c d a, altitudinis d s, æqualis rectæ b a, est æquale parallelogrammo a b z P, est enim c d a curua æqualis rectæ b z ex generatione quadratricis mixtæ expansæ; ipsa autem a h z b est per trigesimam sextam quadratrix expansa respondens eiusmodi parallelogrammo, libræ brachio b u, perpendiculo b c: ergo vt suspensum, siue parallelogrammum a b z P, ad æquiponderans, siue ad figuram a h z b, hoc est ex parabolæ quadratura, vt ternarius ad binarium, ita est brachium u b ad centri grauitatis respondentis parallelogrammo mixto, distantiam ab axe b p: ergo centrum grauitatis parallelogrammi mixti geminati infra & supra planum p d a b, est in recta g d: sed per decimam septimam idem est centrum grauitatis curuæ c d a, & parallelogrammi mixti illi insistentis: ergo &c.

COROLLARIVM I.

Natura parabolæ ostendit satis, si quæratur linea basi c b parallela incedens per centrum grauitatis arcûs a d, quamuis d non congruat puncto c, illam ita diuidere axis b a portionem g a, vt pars ad basim g d sit dupla reliquæ. Ista verò linea basi b c parallela incedens per grauitatis centrum curuæ c d a, non est, vt patet, inuentu difficilis, si semel constiterit, quadratricem mixtam expansam parallelogrammi mixti esse parabolam a h z b.

COROLLARIVM II.

Vides, erudite Lector, has linearum quadratrices competere per se primò rectangulis mixtis, quæ sunt superficies, ac proinde quamuis quadrataria superficies nulli primariò competat nisi superficiei suspensæ: eam tamen

tamen vtiliter transferri secundariò ad lineas; sicuti si quis cylindracei quadratrices solidas vsurparet ad inueniendum centrum grauitatis baseos (potest enim perinde; cùm quæ est proportio inter quadratrices solidas in cylindro vel cylindraceo, eadem sit inter quadratrices planas respondentes basi) vel è contrario si quadratrices baseos planas pro solidis cylindri aut cylindracei vsurparet.

PROPOSITIO LI.

Iisdem manentibus (*Fig.* 65.) ex basi c b auferatur c B æqualis bessi rectæ b a, ac proinde æqualis rectæ b g, & per B ducatur recta B D parallela axi b a occurrens rectæ g d in D.

Ostendendum est punctum D esse grauitatis centrum curuæ c d a vt iacet manentis.

Quoniam enim suspensum rectangulum mixtum æquale est rectangulo a b z P, hoc est bis quadrato a b; ex corollario autem tertio trigesimæ nonæ quadratrix mixta expansa b i f z r est æqualis circulo semidiametri b a, imminuto quatuor trientibus quadrati b a; vt sunt duo quadrata b a, vel duo termini primi progressionis perspectæ, ad circulum vel ad secundum terminum eiusdem progressionis imminutum quatuor trientibus primi, ita erit brachium b r vel b u, hoc est primus terminus adiunctæ progressionis, ad dimidium secundi, imminutum besse primi b u. Cùm igitur secundus adiunctæ sit dimidium peripheriæ circuli semidiametro b a descripti, erit quadrans peripheriæ eiusdem: sed peripheriæ circulorum semidiametris b e vel c a & b a descriptorum, sunt in ratione semidiametrorum: ergo quadrans peripheriæ maioris æquat duos quadrantes, siue totum arcum a q b minoris; sed toti a q b æqualis est recta b c: ergo recta b B, si B D transeat per centrum lineæ c d a, est ipsa b c imminuta duobus trientibus rectæ b a; ac proinde rectè statuimus portionem c B esse bessem rectæ b a.

COROLLARIVM.

Nisi calculus aliquo vitio nobis incognito laborat, cùm rectæ c B, b g sint æquales, patet rectangulo mixto idem respondere æquiponderans tam perpendiculo c b, quàm c l, posito brachio eodem; ac proinde centrum grauitatis esse in recta c D constituente cum recta b c angulum semirectum.

PROPOSITIO LII.

Iisdem manentibus (*Fig.* 65.) intelligatur c d a b circumuolui circa axem c b.

Ostendendum est superficiem istius peripherici esse æqualem bessi rectanguli contenti sub rectâ a b, & sub recta æquante duplum peripheriæ circuli descripti semidiametro b a.

Istud patet ex eo quod quadratrix mixta parallelogrammi mixti geni-

ta brachio b u, perpendiculo b c (hoc est superficies vngularis abscissa plano per basim b c incedente, ex superficie curua cylindracei recti cuius basis c d a b) ad positionem plani f d t se habet ad superficiem curuam periphericam iam descriptam in eadem perpetuò ratione, sicuti in corollario secundo decimæ nonæ annotauimus cum Gregorio à S. Vincentio. Illa autem ratio vt patet est semidiametri d t ad sui circuli peripheriam. Cùm igitur ista vngularis superficies expandatur in parabolam a h z b, cuius ordinatim applicata b z est dupla rectæ b a; & cùm ista parabola sit bes rectanguli a b z, patet quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIII.

IIsdem manentibus (*Fig. 65.*) intelligatur c d a b circumuolui circa axem a b.

Ostendendum est superficiem istius peripherici esse æqualem duplo tertij termini perspectæ progressionis (cuius primus terminus sit quadratum ab, secundus sit circulus semidiametro a b descriptus) imminuto octo trientibus secundi.

Quoniam per corollarium tertium trigesimæ nonæ quadratrix ista siue superficies vngularis expansa est b i f z r, ipsa autem b i f z r est per corollarium tertium trigesimæ nonæ æqualis secundo termino progressionis perspectæ iam propositæ demptis quatuor trientibus primi: cùm aliunde radius ad peripheriam sui circuli sit vt primus adiunctæ progressionis terminus ad bis secundum eiusdem progressionis, patet vt est primus adiunctæ ad bis secundum, ita secundum perspectæ imminutum quatuor trientibus primi esse ad bis tertium perspectæ imminutum octo trientibus secundi: tertius autem perspectæ est vt patet ex initio tertij libri, quadratum rectæ b c, vel peripheriæ a q c: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIV.

SVperficies (*Fig. 65.*) peripherica circa basim b c describi intelligatur motu figuræ a d c b, & eius centrum grauitatis sit B.

Ostendendum est rectam b B esse ipsam b c imminutam tredecim decimis quintis radij a b.

Iam ostendimus in quinquagesima, per plana plano f d t parallela secari proportionaliter superficiem periphericam, & superficiem cuneatam vel vngularem, cuius singulæ perpendiculares ad basim rectanguli mixti sunt semidiametri circulorum illorum qui sunt sectio periphericæ superficiei. Itaque hic nobis restat ostendere si planum plano f d t parallelum, incedens per grauitatis centrum vngularis illius superficiei, quæ facta est à plano per rectam c b incedente & secante superficiem cylindraceam, faciat in basi sectionem B D; rectam b B esse ipsam b c imminutam tredecim decimis quintis radij a b.

Quoniam superficies cunealis æquat figuram a h z b siue quatuor trientes quadrati a b, vel primi termini perspectæ progressionis; quadratrix autem eiusmodi cuneatæ est, vt ostendimus in corollario quadragesimæ nonæ, bes circuli semidiametro a b geniti, vel secundi termini, deductis quinquaginta duabus quadragesimis quintis primi. Si vt quatuor trientes primi termini perspectæ, ad duos secundi imminutos quinquaginta duabus quadragesimis quintis primi, ita fiat radius a b, vel primus terminus adiunctæ, ad quartam lineam, ista quarta erit dimidium secundi termini adiunctæ (is verò est dimidium peripheriæ circuli semidiametro a b descripti) imminutum tredecim decimis quintis radij a b. Atqui dimidium peripheriæ circuli semidiametro a b descripti est duplum rectæ c b: est enim recta c b æqualis peripheriæ b q a siue dimidio peripheriæ integræ circuli semidiametro a e descripti: peripheriæ verò circulorum sunt inter se vt semidiametri; ergo dimidium peripheriæ circuli semidiametro b a descripti, est duplum dimidij peripheriæ descriptæ semidiametro e a; vel est duplum rectæ c b. Ergo illud dimidium secundi termini adiunctæ æquat rectam b c: igitur recta b B est &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LV.

Iisdem positis (*Fig. 65.*) superficies peripherica circa axem a b describi intelligatur motu figuræ a d c b, & eius centrum grauitatis sit g.

Ostendendum est si primus perspectæ progressionis terminus sit quadratum b a, & secundus sit circulus semidiametro a b descriptus; vt secundus terminus imminutus quatuor trientibus primi, se habet ad bessem eiusdem secundi imminutum quinquaginta duabus quadragesimis quintis primi; ita esse rectam u b ad b g.

Quoniam enim cunealis superficies abscissa ex cylindracei recti superficie per planum cuius cum basi sectio sit recta b a, inclinatum ad eandem basim gradibus quadraginta quinque, est suspensa axe b c, sustentaculo u l; vt est ipsum suspensum ad æquiponderans suum, ita erit recta u b ad b g. Sed dimidium suspensi quod videlicet insistit arcui c d a (qui est dimidium totius arcûs cycloideos integræ) est, per corollarium tertium trigesimæ nonæ, secundus terminus perspectæ imminutus quatuor trientibus primi; æquiponderans autem respondens illi dimidio est per quadragesimam nonam, eiúsque corollarium, bes secundi deductis quinquaginta duabus quadragesimis quintis primi; ergo vt terminus secundus progressionis perspectæ imminutus quatuor trientibus primi se habet ad bessem eiusdem secundi imminutum quinquaginta duabus quadragesimis quintis primi, ita est recta b u ad b g: ergo g est grauitatis centrum cunealis superficiei: ergo vt in superiori ostendimus, est quoque centrum periphericæ superficiei, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

In præſentis propoſitionis calculo, ſicuti & in duabus vltimis tertij & quarti libri, pro prima & ſecunda magnitudine quatuor proportionalium, vſurpauimus terminos progreſſionis perſpectæ, qui ſunt figuræ planæ; loco tamen illorum poſſent iiſdem verbis adhiberi termini adiunctæ, qui ſunt lineæ rectæ. Id verò ex eo patet, quod perſpectæ & adiunctæ termini ponantur progredi in eadem ratione.

PROPOSITIO LVI.

INtelligatur (*Fig.* 65.) in plano *ſuppoſito* c b a (ita enim illud vocari placuit in vndecima propoſitione) quælibet curua c d a, & ex eius quolibet puncto d excitata ſit perpendicularis d s ad planum ſuppoſitum: per curuam c d a intelligatur moueri recta d s, vel alia illi parallela, & deſcribere ſuperficiem cylindraceam rectam; in ea verò ſuperficie intelligatur quælibet figura cuius dimetiens ſit d s. In plano eodem ſuppoſito ſecent ſe duæ rectæ c b, b a ad angulos rectos in b; ipſæque c b, a b ſunto eductæ ab extremis curuæ punctis. Sint a b, b u æquales, & conſtructum ſit parallelogrammum b u l c. Eſto l G b u figura ſimilis, æqualis, & ſimiliter poſita figuræ c d a b, ita vt ſi c b congruere ponatur rectæ l u, & b a rectæ u b, curua c d a congruat curuæ L G b; & ſi d t perpendicularis ad rectam c b producatur occurrens curuæ in G, & rectæ l u in H, dimetientes H G, t d ſint æquales. Intelligatur præterea figura l L F u circa axem l u ita opponi figuræ l G b u, vt ordinatim applicatæ G H, H L ſint æquales; ac proinde ſi circa axem manentem l u intelligatur circumferri l G b u, poſtquam iacuerit ad partes oppoſitas, congruat figuræ l L F u, punctúmque G puncto L. Rurſus in ſuperficie cylindracea intelligatur figura cuius dimetiens ſit d π, & ita ſe habens ad figuram cuius dimetiens d s, vt ſicut eſt H t ad t d, ita ſit dimetiens d s, ad d π; vt figura dimetientis d π ſit axe c b, ſuſtentaculo l u; quadratrix alterius figuræ cuius dimetiens d s; de qua quadratrice actum eſt in corollario primo decimæ nonæ. Vt autem ad poſitionem plani ſ d t ſuſtentaculo l u ſine errore vllo aptetur, intelligi debet figura b G l L F eſſe baſis cylindracei recti, & in ſuperficiem illius, ad poſitionem plani ſ d t, ita transferri quadratrix dimetientis d π, vt medietas eius d R transferatur in G M, altera autem medietas in L N; vt duarum g M, L N ſupra & infra planum ſuppoſitum æquo interuallo prominentium, centrum grauitatis ſit H. Per b agatur b T parallela perpendiculari d s.

Ostendendum est duas simul superficies dimetientium G M, L N ad positionem plani ſ d t æquiponderare condicta ratione superficiei cuius dimetiens ſ d, libræ planæ axe c b, perpendiculo plano T b c.

Ista est veluti appendix vigesimæ octauæ propositionis libri quarti, vbi planam libram definiuimus simillimâ methodo, postulauimúsque magnitudines sibi ita respondentes hinc & inde ad axis b c partes oppositas, æquiponderare sibi mutuò; id verò etiam nunc pro ista appendice postulamus. Cùm enim figura dimetientis d π, & figura limbo b G I L F insistens & quadratrix sustentaculo l u aptata habeant similes & æquales bases, habeantque insuper ad positionem plani ſ d t æquales dimetientes, non possunt non esse condicta ratione æquales. Igitur cùm quadratrix cuius dimetiens d π, & suspensa figura cuius dimetiens d s, habeant eandẽ basim c d a, habebunt quoque eandem æquiualenter basim cùm æquiponderans figura limbo b G I L F insistens, tum suspensa dimetientis d s, illi respondens; ergo cùm aliunde æquidistãtes dimetientes suspensæ figuræ & aptatæ sustentaculo l u, sint reciprocè vt H t brachium libræ grammicæ H d, ad longitudinem t d, idémque eueniat quodcunque axis c b punctum sit t, verosimillimum est superficiem suspensam, & superficiem ita aptatam sibi inuicem æquiponderare ad positionem plani ſ d t; hoc autem quod verosimillimum esse iam diximus, repositum volumus inter postulata. Qua in re doleo (vt hoc obiter occasione data dicam) Recentiores nonnullos peccare, dum similes analogias pro demonstrationibus venditant; quod si pergant facere pacatissimam Antiquorum Geometriam turbabunt iurgiis atque contentionibus; & quæ sola scientiarum humanarum fuerat tota demonstratio, fiet partim opinio, partim fides humana; partim coniectura; quod quidem (ni fallor) in hac schola tam monstrum sapit, quàm quod in Logica partim hircus partim ceruus fingitur, vt de hircoceruis & chimæris disputari possit. At verò quoties aliquid inter postulata ponitur, nulla potest esse controuersia, quandoquidem qui illud postulat, nihil aliud contendit quàm eo dato cætera Geometricè iferri.

COROLLARIVM.

Recta d s ad planum suppositum c b a perpendicularis ponatur æqualis quadranti peripheriæ circuli semidiametro d t descripti; eadem perpendicularis intelligatur manens in plano ſ d t curuari in quadrantem peripheriæ centri t, ita vt superficiei ita incuruatæ centrum grauitatis sit V; id verò similiter factum intelligatur in omnibus erectis d s, vbicunque sumatur punctum d. Cùm recta t d ad t V maneat in vna eademque ratione, quodcunque axis c b punctum sit t; manifestum est æquiponderans aptatum sustentaculo l u, & respondens erectæ d s, ad æquiponderans quod eidem ita incuruatæ respondet, se habere, vt se habet recta t d ad t V, vel vt quadrans peripheriæ circularis ad radium suum; hanc enim

esse proportionem rectæ d t ad t V, ostendimus in vigesima prima propositione. Igitur æquiponderans superficiei periphericæ genitæ ex ita incuruata & incumbente in d t, erit ad æquiponderans cuneatæ superficiei, cuius dimetiens est d s, sicut est recta t V ad t d, vel radius ad quadrantem suæ peripheriæ. Igitur, cùm vt demonstrat Gregorius à S. Vincentio libri noni propositione septuagesima quarta, incuruatio ista non impediat quominus figura incuruata sit æqualis erectæ, quando arcus c d a est circularis, & cùm eadem ratione istud ipsum appareat, quando non est circularis; patet istis duobus iuxta modum antè præscriptum aptatis spatiis eidem sustentaculo l u, axe b c, æquiponderantia esse inter se vt ipsa spatia: sunt ergo inter se vt quadrans peripheriæ circularis ad suum radium. Istorum spatiorum aptatorum sustentaculo l u vnum vocetur *maius*, illud videlicet quod æquiponderat figuræ erectæ; alterum *minus*, quod curuatæ. Per grauitatis centrum figuræ erectæ geminatæ ducatur recta d g æquidistans basi b c, complens parallelogrammum g d t b; vt est quadrans peripheriæ circularis ad radium suum, ita ponatur recta t d, ad t φ ex ipsa t d abscissam, & compleatur parallelogrammum p t φ Y. Quoniam in recta d g ponitur grauitatis centrum erectæ, & ipsi erectæ æquiponderat maius spatium axe c b; patet vicissim maiori spatio æquiponderare spatium æquale erectæ eodem pacto aptatum sustentaculo g d. Igitur si sustentaculum g d mutetur in Y φ, illique pari modo aptetur æquiponderans *maiori*; istud æquiponderans, per octauam secundi tetragonismicorum, ad illud quod sustentaculo g d aptatum fuit, se habebit vt recta t d ad t φ, hoc est, vt quadrans peripheriæ circularis ad suum radium. Igitur cùm vt quadrans peripheriæ circularis ad radium, ita quoque sit spatium *maius* ad *minus*; si spatium *maius* aptatum sustentaculo l u conuertatur in *minus*; patet æquiponderans illi ita conuerso aptatum sustentaculo Y φ, esse ad æquiponderans, eidem Y φ aptatumante conuersionem, vt est radius ad quadrantem peripheriæ circularis: sed ita etiam est erecta figura siue spatium aptatum sustentaculo g d ad spatium aptatum ante conuersionem sustentaculo Y φ; ergo *maiori* conuerso in *minus*, hoc est, *minori* ad sustentaculum l u aptato spatium aptatum sustentaculo φ Y æquiponderans est æquale erectæ figuræ: sed eidem erectæ figuræ est æqualis conuexa & curuata figura, eadémque curuata ponitur æquiponderare illi eidem *minori* spatio vt iacet manenti. Igitur cum duorum spatiorum æqualium, & eidem vt iacet manenti seorsum æquiponderantium, grauitatis centrum sit in eodem sustentaculo; vnius autem istorum æquiponderantium centrum grauitatis sit ex constructione in recta φ Y, in eadem quoque recta erit centrum conuexæ & incuruatæ superficiei.

Cæterùm quod de proportione interuallorum quibus centra cuneatæ superficiei, & periphericæ illius geminatæ distant à rectâ b c, assumit vt certum Dettonuillæus sub finem epistolæ ad D. Carcaui scriptæ, pag. 23. assumit quidem, sed non demonstrat. Nos verò demonstrationem no-

ſtram poſtulato illo fatemur niti quod in præſenti propoſitione expoſuimus, necnon & alio quod in corollario iſto indicauimus, nempe ſuperficiem curuatam eſſe æqualem rectæ: ſi enim foret inæqualis, demonſtratio nulla exiſteret. Simillimum iſti eſt quod in trigeſima quarti libri demonſtrauimus.

PROPOSITIO LVII.

Iiſdem manentibus (*Fig*. 65.) eſto c d a b ſemicycloides magna, & circa baſim c b intelligatur, vt in quinquageſima, generari ſuperficies peripherica circumductu figuræ c d a b; conſideretur autem eius pars quæ ad plani T b c partes a iacet, & in recta g D ad baſim b c parallela iaceat grauitatis centrum eiuſmodi peripheriæ.

Oſtendendum eſt rectam b g eſſe quatuor quintas partes rectæ, quæ ad totam b a ſit, vt radius ad quadrantem peripheriæ ſuæ circularis.

Primaria ſuperficies cuneata cunei cuius acies c b, extenditur in parabolicam figuram a h z b, cui axe b z, ſuſtentaculo l u, æquiponderant duæ quintæ partes ipſius, ac proinde quatuor quintæ partes ipſius ſunt tertius terminus, quorum primus a b z P, ſecundus ipſa a h z b ad poſitionem rectæ a b. Iſtam porrò cuneatam ſuperficiem expandi in parabolicam figuram a h z b conſtat ex trigeſima ſexta; ex qua etiam conſtat rectas t d, d s, h r eſſe æquales, ac proinde vt eſt H t, vel b u, ad t d vel d a, vel r h; ita eſſe ipſam d s, vel r h, ad dimetientem ſuæ quadratricis: ſed ita eſt r h ad duplam dimetientis reſpondentis ſuæ quadratrici genitæ axe b z ſuſtentaculo l u ad poſitionem rectæ a b; ergo cuneatæ ſuperficiei inſiſtentis ſuper arcu c d a æquiponderans axe c b, ſuſtentaculo l u eſt quatuor quintæ partes ipſius cuneatæ ſuperficiei. Vt igitur ſuſpenſum ad quatuor ſui quintas partes, ita eſt brachium u b ad diſtantiam centri cuneatæ ſuperficiei geminatæ ab axe b c; ergo illud centrum cuneatæ diſtat ab axe c b quatuor quintis partibus rectæ b a. Cùm igitur, per præcedentis corollarium, vt quadrans peripheriæ circularis ad radium ſuum, ita ſint quatuor illæ quintæ partes radij ad rectam b g, patet ipſam b g eſſe quatuor quintas partes rectæ ad quam a b recta ſit vt quadrans peripheriæ circularis ad ſuum radium, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LVIII.

Iiſdem manentibus (*Fig*. 65.) circa axem b a intelligatur circumductu ſemicycloideos magnæ c d a b deſcribi ſuperficies peripherica; conſideretur autem eius portio quæ ad plani T b a partes c iacet, & in recta B D ad axem a b parallela, iaceat grauitatis centrum eiuſmodi periphericæ ſuperficiei.

Oſtendendum eſt vt eſt circulus ſemidiametro b a deſcriptus, vel

vt secundus terminus progressionis perspectæ, imminutus quatuor trientibus primi termini, vel quadrati b a, ad dimidium tertij termini, auctum besse secundi, & imminutum triginta quatuor nouenis primi, siue quadrati b a; ita rectam, quæ ad radium b a sit vt ipse radius ad quadrantem peripheriæ, esse ad rectam b B.

Ex superioris progressu patet vt superficies curua cunei geniti ductu plani transuersi per rectam b a, insistens arcui c d a, est ad æquiponderans suum, axe b a, sustentaculo r n latere quadrati a b r n, genitum; ita esse rectam b r vel b a, ad b t rectam posito quòd t V parallela axi b a incedat per grauitatis centrum cuneatæ superficiei geminatæ. Ex eiusdem methodo patet vt quadrans peripheriæ circuli est ad suum radium, ita esse rectam b t ad b B. Vt est quadrans peripheriæ ad radium suum, ita b r ponatur esse ad b I: ergo quoniam ita quoque est recta b t ad b B, erit alternando vt b r ad b t, ita b I ad b B: sed b r ad b t est vt superficies cuneata ad æquiponderans, ergo ita quoque est recta b I ad rectam b B.

Rursus qnoniam superficies cuneata in hoc casu expanditur in superficiem b i f z, & illi est æqualis, ipsa autem b i f z est, per corollarium tertium trigesimæ nonæ, æqualis circulo semidiametri b a imminuto quatuor trientibus quadrati b a; æquiponderans verò illi insistenti super arcu c d a est ex superioris methodo spatium inuentum in corollario quadragesimæ quartæ, nempe (si ponatur primus perspectæ terminus quadratum b a, & secundus sit circulus semidiametro b a descriptus) dimidium tertij termini perspectæ, auctum besse secundi, & imminutum triginta quatuor nouenis primi: ergo vt secundus terminus perspectæ, imminutus quatuor trientibus primi se habet ad dimidium tertij, auctum besse secundi, & imminutum triginta quatuor nouenis primi, ita est recta b I ad b B, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIX.

PRoponitur in casu vno calculus octo problematum quorum solutionem Anonymus ab Europæ Geometris exegit sub finem anni 1658. *Eius prouocatio relata habetur suprà in scholio quarto vltimæ propositionis libri quarti.*

Reuocetur schema propositionis trigesimæ sextę (*Fig.* 65.) & in eo c d a b sit semicycloides magna, cuius basis b c, circulus genitor a q b, descriptus diametro a b, centro g.

Primò quæritur totius curuæ (cuius dimidium ęst c d a) centrum grauitatis. *Obtinetur per quinquagesimam propositionem præsentis libri.*

Recta b a ita diuidatur in g, vt b g sit bes totius b a. Dico g esse grauitatis centrum limbi integri cycloideos magnæ.

Secundò

Secundò quæritur grauitatis centrum curuæ c d a. *Istud habetur ex quinquagesima prima superiore.*

Ex recta c b abscindatur c B æqualis rectæ b g, vel duobus trientibus axis b a; completo parallelogrammo g b B D, aio punctum D esse grauitatis centrum curuæ c d a.

Tertiò circa axem c b intelligatur circumuolui curua c d a, & gigni superficies; quæritur dimensio istius superficiei. *Datur ex quinquagesimæ secundæ methodo.*

Dico superficiem istam esse æqualem bessi rectanguli contenti sub recta a b, & sub recta æquante duplum peripheriæ circuli semidiametro b a descripti.

Quartò circa axem b a intelligatur circumuolui curua c d a, & gigni superficies, quæritur dimensio istius superficiei. *Illam exhibet quinquagesima tertia.*

Aio superficiem istam esse æqualem duplo tertij termini perspectæ progressionis (cuius primus terminus sit quadratum a b, secundus sit circulus semidiametro a b descriptus) imminuto octo trientibus secundi.

Quintò quæritur grauitatis centrum superficiei totius suprà descriptæ circa manentem c b, motu curuæ c d a. *Habetur ex quinquagesima quarta.*

Ex recta c b abscindatur c B æquans tredecim partes decimas quintas axis b a. Aio punctum B esse grauitatis centrum quæsitum.

Sextò quæritur grauitatis centrum superficiei totius suprà definitæ circa manentem a b, motu curuæ c d a. *Habetur ex quinquagesima quinta.*

Rectæ b a dupla sit a u, & vt secundus terminus progressionis perspectæ, definitæ in quarti quæsiti solutione, imminutus quatuor trientibus primi se habet ad bessem eiusdem secundi imminutum quinquaginta duabus quadragesimis quintis termini primi, ita fiat recta u b vel b a ad b g abscissam ex b a. Dico punctum g esse grauitatis centrum postulatum.

Septimò intelligatur ex puncto b erigi b T perpendicularis ad planum c b a, & plano T b c superficies motu curuæ c d a circa manentem c b descripta diuidi in duas partes, quarum quæ ad punctum a vergit hîc consideratur, eiusque centrum grauitatis quæritur. *Habetur ex quinquagesima septima propositione.*

Ex recta b a rescindatur b g quatuor videlicet quintæ partes rectæ quæ ad totam b a sit vt radius ad quadrantem peripheriæ suæ circularis; retineatur punctum B inuentum in quæsito quinto, & compleatur parallelogrammum g b B D. Aio punctum D esse centrum quæsitum.

Octauò intelligatur plano T b a superficies motu curuæ c d a circa manentem a b descripta diuidi in duas partes, quarum eam quæ ad punctum c spectat, hic contemplamur, eiusque centrum grauitatis inquirimus. *Obtinetur ex quinquagesima octaua superiore.*

Vt secundus terminus progressionis illius perspectæ, imminutus quatuor trientibus primi termini, vel quadrati b a, se habet ad dimidium tertij termini, auctum besse secundi, & imminutum triginta quatuor nouenis primi, siue quadrati b a, ita recta, quæ ad radium b a sit vt ipse radius ad quadrantem peripheriæ, fiat ad rectam b B. Maneat punctum g repertum in quæsito sexto, & compleatur parallelogrammum g b B D. Aio punctum D esse centrum quod quærimus.

COROLLARIVM.

Calculum octo problematum absoluimus in vno casu totius semicycloideos magnæ; ex illo verò facile poterit ad alios casus transitus fieri, si quis diligens calculator rem aggrediatur, & methodum singularum propositionum à quinquagesima inchoando, accuratè obseruet. Porrò ad ista omnia soluenda non inutile erit opus retexendo annotare quæ nobis necessaria fuerint. Primò quidem (data cùm opus fuerit quadratura circuli) distantiam centri grauitatis curuæ c d a à basi c b & ab axe a b obtinuimus in quinquagesima & in subsequente, ex cuneatis superficiebus expansis a h z r b, b i f z r. Secundò in quinquagesima secunda & quinquagesima tertia ex iisdem superficiebus cuneatis habuimus dimensionem superficierum periphericarum circa basim, & circa axem descriptarum. Tertiò in quinquagesima quarta & quinquagesima quinta ex figura b m z r cognita assequuti sumus centra grauitatis earundem periphericarum superficierum circa basim & axem genitarum. Quartò demum ex duplo æquiponderantis superficiei cuneatæ a h z r b, axe b z, sustentaculo l u; itemque ex duplo æquiponderantis superficiei alteri cuneatæ b i f z r axe b z, sustentaculo a P reperimus distantiam centri grauitatis dimidiarum superficierum ab axe, & à basi. Vnde liquet ad solutionem problematum istorum, inueniendam esse dimensionem rectæ c d a, quadraturam figurarum a h z r b, b i f z r, b m z r, & æquiponderantium figuræ quidem b a h z r axe b z, sustentaculo l u; figuræ verò b i f z r axe b z sustentaculo a P. Manifestum quoque est methodum esse generalem cuiuscunque modi sit curua c d a, dummodo quadraturâ figuræ c d a b positâ, inueniatur recta æqualis curuæ c d a, & quadratura figurarum & æquiponderantium iam dictorum. Quapropter longè difficilius est in singulis curuarum generibus inuenire illas dimensiones & quadraturas, quàm generaliter pronuntiare quid præstandum sit: istud enim ex methodo adhibita in vno genere curuarum apertè patet.

PROPOSITIO LX.

NOnnulla alia, quæ demonſtrantur in præſenti libro, ſummatim indicantur.

Primò quidem in propoſitione ſecunda calculus datur ſolidi cuiuſdam, ad cuius generationem conueniunt ſpiralis linea & conus.

Secundò in ſeptima, octaua, nona eiúſque corollario oſtenditur Veterum more quælibet curua continua eſſe æqualis rectæ lineæ inter duas alias rectas interceptæ.

Tertiò in decima demonſtratur, conuolutæ & euolutæ figuræ methodo, proportio coni ad cylindrum, & ſuperficiei coni recti ad baſim eiuſdem, eſſe illa ipſa, quæ ab Archimede demonſtrata extat.

Quartò in vigeſima prima & vigeſima ſecunda datur calculus centri grauitatis arcuum circuli, & peripheriarum ſphæricarum.

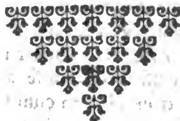
Quintò in vigeſimæ tertiæ corollario habetur triangulorum cylindricorum centrum grauitatis, vnà cum grauitatis centro ſectoris ſphærici à D. Paſcalio propoſiti in datis ad nos literis.

Sextò *ſcalarij* cuiuſdam dimenſionem & centrum grauitatis tradimus in trigeſima ſecunda propoſitione.

Septimò in quadrageſima quarta propoſitione exhibetur quadratura abſoluta gradûs cuiuſlibet in certâ quadam ſerie deſignati.

Octauò in propoſitionis quinquageſimæ corollario ſecundo oſtenditur, cùm nulla linea habeat per ſe primariò qudratricem figuram (nulla enim eſt ratio figuræ ad lineam) illi tamen vtiliter ſeruire quadratricem parallelogrammi mixti: in ſcholio verò quadrageſimæ quartæ nomen & origo primaria quadratricum paulò diſtinctiùs expenduntur.

Nonò methodus libræ planæ quam in elementis noſtris excogitauimus, ad ſuperficies curuas extenditur in quinquageſima ſexta propoſitione.





DE CYCLOIDE

LIBER SEXTVS.

Vbi nostra de Cycloide methodus vnà cum Dettonuillanâ paulò accuratiùs expenditur; traditur methodus calculi pro coronâ Cycloidicâ; generatio cycloideos magnæ, diligentiùs examinatur; adiungitur denique appendicula de motu grauium accelerato.

PRÆFATIO.

INVENTIONIS tanta in omnibus disciplinis est laus, vt Scriptores ad illam communi omnes studio aspirent; & vt libri illi, qui nihil noui docent, frustra edi, verè magis quàm fastidiosè passim à viris doctis dicantur. Negari quidem nequit quin ætate, qua viuimus, plurima cùm in aliis scientiis, tum in mathematicis præcipuè, reperta extent: sed istud etiam inficari nemo potest, non pauca euulgari quotidie, quæ vix quicquam noui contineant præter ipsum aliquando nomen. Certò tamen apud omnes harum inuentioni rerum deditos constat, nonnumquam euenire vt quod vnus iam reperit; alter, cùm nihil de istius inuentione vnquam audierit, in id pariter incidat, eámque rem in vulgus pro sua emittat, existimetque à se aliquid antea inauditum proferri. Methodum Dettonuillanam cum nostra illa quam in Elementis tetragonismicis dedimus, & qua in istis vsi sumus, prima huius in libri parte comparare instituimus, vt res per se obscuræ comparatione elucescant; & vt hoc ipsum, quod iam diximus, certo certiùs constet, accidere posse vt duo, quisque suo marte, diuerso licet tempore & loco, eandem rem extundant.

Quarti libri tetragonismicorum elementorum propositionibus vigesima prima, & vigesima secunda ante decem & ampliùs annos repertis, statim vidimus illis subjici quadraturam coronæ vel annuli; quod in secunda præsentis libri parte faciemus manifestum, assumptâ in exemplum coronâ cycloidicâ, cuius primùm dimensionem, tum centrum grauitatis; deinde eius superficiei dimensionem, & grauitatis centrum dabimus. Serò, quod ægrè ferimus, venerunt in manus nostras Reuerendi P. Tacquet *libri quatuor cylindricorum & annularium*; cùm enim editi sint anno 1651. non nisi labentis istius anni mense Augusto ad nos delati sunt. Opus censemus absolutissimum, atque merito suo nunquam interiturum, eiúsque Autori qui primus hac de re suas lucubrationes vulgauit, istam coronam debitam esse agnoscimus; neque verò alia de causa mentionem nostri illius inuenti nunc facimus, quàm vt methodi à nobis adhibendæ in istorum calculo & demonstratione, origo & caput demonstretur; ille etenim principiis longè diuersis, probatissimis tamen vtitur. Quanquam licet eandem ambo teneremus generalem methodum, possem ego paticulatim de cycloidica corona, quam ille non tetigit, hæc scribere; imò & de circulari, quod ad centra grauitatis tam solidorum, quàm superficierum, de quibus ille nihil egit. Cæterò si dum scholium duodecimæ primi libri exarabam, nota mihi fuissent huius Autoris *cylindrica & annularia*, non omisissem narrare vno eodémque anno 1651. prodiisse in lucem *cubaturam* cunei etiam hyperbolici, & à Reuerendo P. Tacquet in libro illius Operis primo, & à me editam in Elementis, quorum quarto libro, propos. 25. coroll. 4. pro vno hyperbolæ casu calculum etiam exhibeo. Anni 1651. iam memorandi occasio oblata monet me vt quod non ita pridem didici, non omittam hîc dicere, illo ipso anno *quadraturam circuli, ellipseos, & hyperbolæ ex dato portionum grauitatis centro, Autore eruditissimo D. Christiano Hugenio* emissam prodiisse è prælo Batauico; quo ipso titulo nostri Elementorum libri cùm prænotentur, est quod gaudeam socium me tunc talium Virorum in iis cogitandis & euulgandis extitisse, quæ ante illud tempus irreperta latuerant. Quadratricis methodus, quam sine socio, quem equidem sciam, tunc protuli, hoc videbatur exigere, vt mihi aliquando adiungeretur Scriptor illi commendandæ idoneus; id verò nunc tandem contigisse manifestum fiet ex prima præsentis libri parte.

PROPOSITIO PRIMA.

QVidin nostra methodo sit summa quadratorum, cuborum, quadratoquadratorum, & reliquorum in infinitum, quorum nomen deriuetur ex serie numerorum cossicorum, siue denominatorum, quos Algebra inuenit.

Ista numerorum nomina, tradit & explicat inter alios Clauius libri de Algebra scripti capite secundo; ea verò hîc recensere omnia minimè necessarium putamus; satis enim nobis est post numerum absolutum, proximè sequi *radicem*, tum *quadratum*, *cubum* deinde, tum *quadratoquadratum* &c.

Esto iam (*Fig.* 68.) parallelogrammum quodcunque a d f c, cuius latera opposita a d, c f producta contineant quatuor figuras d h f c, g m l i, n t o q, s r y p, insistentes rectis d f, g l, n o, s y, ita vt ad positionem rectæ a d, quæcunque b r parallela rectæ a d ducatur, occurrens figurarum perimetris in b, e, h, i, m, q, t, p, r; rectæ b e, e h, i m, q t, p r (& ita in infinitum quotcunque addantur aliæ figuræ) sint continuè proportionales. Hanc seriem & progressionem figurarum appellare soleo *gradualem*, ideoque singulas in octauæ tertij libri corollario appellaui *gradus*; primam, primum; secundam, secundum &c. quo etiam nomine vsus sum in quadragesima quarta prioris libri. Vt autem cum numeris ita conferantur, vt eorum nomina iam dicta eis congruant; intelligamus quamlibet numerorum progressionem Geometricam ab vnitate incipientem ita componi cùm gradibus, vt vnitati respondeat primus gradus; secundo termino quem Algebristæ vocant *radicem* respondeat secundus; tertio respondeat tertius, qui ab iisdem dicitur *quadratus numerus*; quarto respondeat tertius, qui appellatur *cubus*; quinto quartus, qui dicitur *quadratoquadratus*. Manifestum est hanc esse concordiam inter gradus & terminos progressionis, vt sicut si radix multiplicetur in se, hoc est, si vt vnitas ad radicem, ita fiat ipsa radix ad tertium numerum; tertius est quadratus: ita cùm vt b e quasi vnitas, ad e h quasi radicem; ita sit ipsa e h ad i m, rectangulum quod gignitur ex ductu primæ b e in tertiam i m, esse æquale quadrato rectæ e h. Si ergo intelligatur dicylindraceum cuius basis sit d h f, cui *radix* numeralis respondet; sectiones autem ad planum d h f perpendiculares sint quadrata e h, manifestum est ex vndecima quarti tetragonismicorum, cylindraceum altitudinis æquantis rectam a d baseos g m l i, esse ad positionem rectæ a d, condicta ratione æquale dicylindraceo illi cuius sectiones sunt quadrata h e. Igitur non absurdè appellari potest cylindraceum baseos g m l i, altudinis a d, *summa quadratorum* respondentium figuræ d h f, quasi radici ad positionem rectæ a d.

Præterea quoniam in numeris si vt vnitas respondens gradui primo b e, ad radicem respondentem secundo, ita fiat quadratus numerus respondens tertio ad quartum, iste quartus vocatur cubus; & ex ductu vnita-

tis in cubum gignitur idem numerus, qui ex ductu radicis in quadratum numerum; rectangulum verò quòd fit ex extremis nempe ex ductu primæ b e in quartam q t, est æquale rectangulo quod fit ex mediis videlicet ex secunda e h in tertiam i m; patet cylindraceum altitudinis b e vel a d, baseos m t o q esse æquale dicylindraceo genito ex e h, i m gradibus respondentibus radici & quadrato: ergo non malè vocetur cylindraceum altitudinis d a, baseos m t o q, *summa cuborum*. Simili de causa, cylindraceum altitudinis d a baseos f r y p vocari possit *summa quadratoquadratorum*: quia videlicet ex ductu rectæ b e in p r, gignitur spatium æquale illi, quod ex ductu rectæ e h, cui radix respondet, in q t sedem cubici numeri: ex ductu autem radicis in cubum gignitur quadratoquadratus numerus. Igitur ostendimus quid in nostra methodo appellari possit *summa quadratorum, cuborum* &c. nihil enim est aliud quam cylindraceum altitudinis a d, baseos tertij quarti &c. graduum.

COROLLARIVM I.

Ex demonstratis patet non ideo mutari methodum aliquam, quòd retentis rebus alia imponantur nomina; methodus enim his vestita nominibus eadem est cum illa, rectéque illi congruit illud Poëtæ *rebus idem, titulo differt*. Methodus itaque *indiuisibilium* quam vocant, nescio qua de causa, si nihil aliud aduehat in Antiquorum demonstrandi modum, nihil magni momenti præstat, nec de eo multùm laborare debemus. Sicuti nec curandum est quod multiplicari recta in rectam, vel in figuram dicatur; hoc enim nihil est aliud quam voces primò institutas pro numeris transferre ad quantitatem continuam; nam etiam Euclides libri septimi initio, numerorum alios planos, alios solidos appellauit, lateraque illis attribuit, traducendo hæc nomina ex quantitate continua ad discretam. Porrò in istis, gradum A, multiplicari per gradum B, nihil est aliud quàm sumi gradum C, qui tot in ista serie sedibus distet à gradu B, quot distat gradus A à gradu primo dimetientis b e. Nam ad positionem rectæ a d dicylindraceum genitum ex A ducto in B, est condicta ratione æquale cylindraceo genito ex primo in quartum C. Sicuti si primus sit vnitas, & A, B sint numeri; numerus A multiplicabitur in B, si vt vnitas ad A, ita fiat B ad C. Cùm igitur primus gradus repræsentet vnitatem, rectè instituta fuit operatio inter gradus, quæ respondeat multiplicationi numerorum. Hîc verò inculcandum duximus nos isto loquendi modo nolle gradus inter se esse proportionales; sed eorum dimetientes ad positionem rectæ a d sumptas. Dimetientes verò alicuius figuræ, vocamus rectas intra perimetrum ipsius figuræ accommodatas, & parallelas vni cuidam designatæ; quam vocis vim hîc iterum exposuisse, fortasse iuuabit.

COROLLARIVM II.

Istud hîc maximè attendi debet, si quis summam cuborum exempli causa quærat, hoc est quartum gradum, solui quidem vtcunque & facilè, dicendo esse secundum gradum multiplicatum per tertium: sed non

planè solui ad mentem inquirentis, & ad vsum rei quæsitæ intentum. Quæritur enim rotundè exempli causa si d h f e ponatur parua cycloides cuius axis e h, vt determinetur rectilineum æquale quarto gradui.

COROLLARIVM III.

Nos in præsenti propositione posuimus primum gradum esse parallelogrammum, quia illa hypothesis vtilissima est ad negotium quod tractare instituimus; potest tamen cum opus fuerit poni quælibet alia figura. Præterea sicuti in superficiebus contemplati sumus eiusmodi seriem graduum, ita possumus illam considerare in solidis si enim d h f e ponatur basis solidi cuiuslibet geniti, ad positionem rectæ a d, ex ipsa basi ducta in figuram quamlibet d z f e, series eadem solidorum continuabitur, si reliquis gradibus consequentibus altitudo d z f e addatur; eorúmque sectiones ad planum a d f rectæ, basium b e, e h, im &c. erunt proportionales. Abstineo tamen ab illo fusco Arabum cogitatu, satis nunc vsitato ab iis qui indiuisibilium methodo ingredi se profitentur, *magnitudinem genitam ex multiplicatione primi solidi in quartum, esse æqualem magnitudini genitæ ex multiplicatione in se duorum solidorum mediorum*: istud enim crudius est quam vt concoqui possit à stomacho cui cibus ad hunc diem fuit Euclidis, Archimedis & consequentium Græcorum Geometria simul, & Philosophia. Quapropter si quid veri iste loquendi modus continet, reducatur, quæso, ad aliquid intra fines triplicis dimensionis quantitatis continuæ collocatum; quod sanè exigit candor cogitationis Europeæ.

PROPOSITIO II.

IIsdem manentibus (*Fig.* 68.) tertius & quartus gradus inseruiunt proximè ad inuentionem solidi peripherici, geniti circumductu figuræ secundæ d h f e circa basim d f; & ad inuentionem interualli quo centrum grauitatis eiusdem semiperipherici distat à basi d f.

In superiore ostendimus cylindraceum altitudinis a d, baseos g m l i, quæ est tertius gradus, esse æquale dicylindraceo cuius sectiones sunt quadrata e h, basis d h f e: atqui istud dicylindraceum ad periphericum est vt quadratum circumscriptum circulo ad ipsum circulum, vt in tertij octaua, & nona ostendimus; ergo si vt quadratum circumscriptum ad circulum, ita fiat recta d a ad d u, patet cylindraceum altitudinis du, baseos g m l i esse æquale quadranti peripherici iam descripti: ergo tertius gradus proximè conducit ad inueniendum solidum altitudinis d u, quod æquale sit dicylindraceo cuius sectiones sunt quadrata e h, quod erat vnum ex demonstrandis.

Rursus quoniam in corollario octauæ tertij ostendimus libræ planæ axe d f, sustentaculo a c, æquiponderans solido cuius sectiones sunt quadrata e h, esse cylindraceum altitudinis d a, baseos æquantis dimidium quarti gradus n t o q: in sexta autem eiusdem libri ostendimus bessem huius æquiponderantis esse æquale spatio quod iisdem manentibus æquiponderat

ponderat quadranti peripherici: ergo triens quarti gradus eſt baſis cylindracei altitudinis d a, quod æquiponderat quadranti peripherici, ergo duobus quadrantibus peripherici, hoc eſt ſemiperipherico quod ad rectę d f partes h iacet, æquiponderat iiſdem manentibus cylindraceum altitudinis d a, baſeos æquantis beſſem quarti gradûs.

Præterea quoniam b e recta ad d x diſtantiam centri grauitatis ſe habet vt ſuſpenſum ſemiperiphericum ad æquiponderans; illud autem ad iſtud ſe habet vt baſis g m l i, quæ eſt tertius gradus, ad beſſem baſeos m t o q, quæ eſt quartus gradus; igitur cùm vt tertius gradus ad beſſem quarti, ita ſit a d recta ad d x diſtantiam centri, apertum eſt ſi tertius & quartus gradus reducantur ad rectilinea nota, ea proximè conducere ad inuentionem diſtantiæ d x, quod erat ſecundò propoſitum.

COROLLARIVM I.

Hinc apertè patet quod in corollario ſecundo ſuperioris monuimus, ad hoc vt methodus inueniendi diſtantiam d x cenſeatur plenè tradita, requiri vt figuræ n t o q, ſiue quarto gradui, ſiue ſummæ cuborum, inueniatur rectilineum æquale; & aliud figuræ g m l i ſiue tertio gradui, ſiue ſummæ quadratorum. Quod ſi adhuc multiplicatio aliqua reſtet facienda per aliquem gradum, problematis ſolutionem plenam nondum eſſe datam. Nam iuxta explicationem traditam harum vocum, ex multiplicatione oritur deſcenſus ad alium gradum inferiorem, qui aliquando eſt difficillimus inuentu, licet proximè ſuperior ſit rectilineo noto æqualis. Dettonuillæus tamen aliquando multiplicationem ita accipit vt per illam tranſitus fiat ad magnitudinem alterius dimenſionis, exempli cauſa ex figura d h f e per rectam a d multiplicatam, intelligit gigni ſolidum baſeos d h f e, altitudinis d a. Optandum eſſet vt omnes Geometræ vterentur Antiquorum vſitatis loquendi modis, nec vllum excogitarent, niſi neceſſitate cogente; ita enim eueniret, vt res melius intelligerentur, nihil Lectorem remorante vocum nouitate.

COROLLARIVM II.

Aduertendum eſt iſta ſerie non exhiberi figuram planam æqualem radici, ſiue ſecundo gradui d h f e, ideóque inueniendam eſſe methodum illius gradûs quadrandi, qui eſt veluti baſis reliquorum. Iſtud qua ratione ſtatim aſſequuti fuerimus, vbi propoſita ab Anonymo fuere problemata, conſtat ex libello tunc edito viginti de cycloide propoſitionum, qui eſt primus huius Operis, nempe per quadraturam cuneati, ſiue vngularis ſolidi vnius, & per quadraturam alterius dimidiati, vt monemus in corollario decimæ libri eiuſdem. Videndum nunc nobis eſt quo pacto id Gregorius à S. Vincentio & Dettonuillæus inuenerint.

PROPOSITIO III.

ESto (*Fig. 69.*) circulus b c n m centro a deſcriptus, cuius diametri b n, c m ſecent ſe ad angulos rectos: ſumptus ſit in qua-

drante b d c, quilibet arcus b p (etiamsi punctum p congruat puncto c) & per p ducta sit p o parallela rectæ b a : arcui p d b intelligatur insistere superficies cylindrica recta, ita vt perpendiculares punctis d insistentes æquent applicatas d i ad semidiametrum a c. Istam superficiem esse cuneatam vel vngularem monstrauimus in octauâ secundi libri propositione; eamque esse æqualem rectangulo c a o ostendisse diximus P. Gregorium à S. Vincentio propositione 45. & 54. libri noni quadraturæ circuli, editi anno 1657. Istud ipsum demonstrat Dettonuillæus in suo illo de cycloide libro quem præsenti anno vulgauit, *tractatûs de sinibus propositione prima.*

Nunc ostendendum suscipio eadem methodo id vtrumque præstitisse, & in hoc solùm esse discrimen, quod postquam statutum est fundamentum sufficiens ad id concludendum celebri illa Antiquorum methodo, quæ procedit per reductionem ad impossibile, Gregorius à S. Vincentio id toto illorum Antiquorum & Geometriæ apparatu præstiterit; Dettonuillæus verò rem contraxerit, intelligendamque Lectori reliquerit; quod solent Recentiores aliqui iam præstare sine vllo veritatis damno, dummodo constet cætera, quæ ad id necessaria sunt, rectè esse constituta.

Gregorius à S. Vincentio propositionem trigesimam libri noni iam laudati monet esse Pappi vigesimam secundam in Collect. Mathemat. ea verò demonstratur, quantumuis exigua sit recta e d e tangens in puncto d, si ex e demittantur perpendiculares e r, rectangulum contentum sub ordinatim applicata d i & sub tangente e e esse æquale rectangulo contento sub radio a c & sub recta r r. Ex eo autem quod (vbicunque sumatur punctum d, & quamlibet parua sit recta r r) id perpetuâ lege euincatur, sequitur cætera posse in circulo apparari ad concludendum more Antiquorum; sicuti ab illa trigesima septima ad quadragesimam quintam apparatum istum Geometricè explicat Gregorius. At verò Dettonuillæus ita succinctè rem tractat, vt nullius mentione facta assumat in Lemmatium, propositionem quam ad Pappum referendam esse diximus, & sine qua quod propositum fuit ostendi non posset illâ saltem methodo. *Ducendo*, inquit, *ab omnibus punctis d tangentes d e, quarum qualibet tangat sibi proximam in punctis e, & demittendo perpendiculares e r: patet vnumquemque sinum d i multiplicatum per tangentem e e, æqualem esse vnicuique distantiæ r r multiplicatæ per radium a b.* Equidem hoc loco non semel suspexi huius Autoris acrem ingenij vim, qua statim vidit id, quod Gregorius à S. Vincentio deriuasse se à Pappo candidè fatetur: imprimis verò admiratus sum eius fœlicitatem in inueniendo illo ipso quadraturæ superficiei illius cylindricæ problemate scitu dignissimo, eadem prorsus viâ, quam Gregorium te-

nuiſſe conſtat iam ab annis vndecim; tot enim fluxere ex quo eſt editum illius volumen. Nam ſi illam viam à Gregorio antè fuiſſe factam agnouiſſet, id pro ſuo candore nullatenus diſſimulaſſet.

Gregorius quidem quadrat illam ſuperficiem cylindricam nondum expanſam, ſed adhuc arcuatam; Dettonuillæus autem conſiderat illam iam expanſam: attamen aſſumit æquales eſſe expanſam & contractam, neque id probat: quapropter potuiſſet id quoque aſſumi à Gregorio, ſi expanſam voluiſſet quadrare. An autem ſint æquales expanſa & contracta diximus in ſcholio illius octauæ propoſitionis ſecundi libri, & in corollario propoſitionis vigeſimæ libri quinti ſuperioris.

PROPOSITIO IV.

Intelligatur (*Fig. 69.*) curua quælibet p d b in plano p o a, intercepta inter parallelas rectas d o, b a, quas ſecet recta o a; intelligatur ſuper recta o a inſiſtere figura quædam ad planum l a b recta, & ſuper curuâ p d b inſiſtere altera, ita reſpondens illi quæ ſuper o a erigitur, vt quæcunque duo plana parallela rectæ b a, & recta ad planum c a b ſecent duas illas figuras, portiones earum inter illa interceptæ, ſint inuicem æquales; quantumlibet earum ad planum c a b perpendiculares, plano eidem parallelo reſpondentes ſint inæquales. Super eadem a o vel ſuper curuâ p d b intelligatur alia quælibet figura inſiſtere perpendiculariter.

Oſtendendum eſt ſi poſtuletur & concedatur ſingulas iſtarum duarum figurarum multiplicatas ad poſitionem rectæ b a per tertiam aliquam gignere æqualia ſpatia; ſummam quadratorum, cuborum, & quadratoquadratorum eſſe rectè aſſignatam à Dettonuillæo propoſitionibus ſecunda, tertia & quarta *tractatûs ſinuum*.

Aduertendum eſt licet iſtud non poſtuletur à Dettonuillæo; poſtulari tamen aut demonſtrari debere, vt rationes eius cogant. In methodo, quam indiuiſibilium dicunt, iſtud ego deprehendo à Geometria alienum, quod paſſim & tacitè vſurpantur propoſitiones tanquam euidentes & certæ, quæ neque ab vllo adhuc demonſtratæ ſunt, nec monentur Lectores vim demonſtrandi fundari in vno quod tamdiu poſtulandum ſit, quouſque demonſtretur; vel certè quod ita euidens ex ſe ſit, vt inter principia per ſe nota collocari debeat.

Iſto ergo poſtulato & conceſſo, ſit vt in propoſitione ſuperiore p d b arcus circuli aſſumptus, & illi inſiſtat ſuperficies cuneata, ita vt ex puncto d perpendicularis in planum c a b excitata ſit æqualis ſinui i d: ſuper recta a c conſtructum ſit quadratum inſiſtens eidem plano c a b. Igitur ex ſuperiore propoſitione duæ iſtæ ſuperficies ita ſe habet vt earum portiones interceptæ inter quælibet duo plana parallela ad rectam h l, & recta ad planum c a b, ſint æquales: ergo per poſtulatum iſtud, ſi rectæ c a

insistere intelligatur quadrans circularis centro a descriptus, & per istum quadrantem multiplicentur duæ illæ figuræ, prodibit æquale vtrinque spatium; & ratione figuræ insistentis rectæ o a, illud spatium est cylindraceum altitudinis a b, baseos o p d b a, vt patet, cùm figura insistens rectæ o a sit parallelogramma rectangula. Porrò illa multiplicatio debet ita intelligi vt sicut radius a c est ad dimetientẽ figuræ insistentis super recta a o cadentem perpendiculariter in rectæ o c punctum i; ita fiat dimetiens quadrantis circularis respondens puncto i, ad quartam eidem puncto i insistentem perpendiculariter ad planum c a b. Quapropter cùm radius a c æquet dimetientem figuræ parallelogrammæ insistentis super recta a o; patet quartam figuram ex hac multiplicatione genitam super basi a o esse æqualem portioni quadrantis circularis super eadem a o erecti. In curua autem p d b illa multiplicatio ita debet concipi, vt sicut radius a c est ad dimetientem figuræ insistentis super curua p d b cadentem perpendiculariter in curuæ p d b punctum d; ita fiat dimetiens figuræ insistentis super curuâ, respondens puncto d, ad quartam eidem puncto d insistentem perpendiculariter ad planum c a b. Figura itaque cuius basis est curua p d b, dimetiens verò est ista quarta iam reperta, est æqualis alteri figuræ cuius basis est a o, dimetiens verò est quarta illa proportionalis antè reperta. Istæ verò figuræ vtrinque prodeuntes ex generatione vel multiplicatione iam exposita habent vt patet proprietatem quam præsens propositio requirit. Vocentur *figuræ coniugatæ primæ generationis*. Figuræ autem vnde generantur vocentur *coniugatæ radices, basium recta & curua*.

Porro figuræ illæ coniugatæ primæ generationis cùm habeant proprietatem quam requirit postulatum, si intelligantur rursus insistere, vna quidem curuæ p d b vnde ortum habet, altera verò rectæ o a vnde prodiit, & intelligantur pari prorsus modo multiplicari per eandem figuram o p d b a (quæ est eadem cum illa portione quadrantis circuli insistentis super radio c o, interceptâ inter parallela plana per o d, a b rectas ducta) prodibit æqualis vtrinque figura coniugata secundæ generationis. Cùm itaque figura quæ primò in rectâ o a prodiit, sit ipsa o p d b a, & ponatur multiplicari in se ipsam, prodibit secundò ratione figuræ insistentis super o a, tertius gradus, cuius primus ad positionem rectæ a b sit quadratum b a c, secundus sit quadrans circularis: ac proinde si intelligatur alius ordo graduum quorum primus sit parallelogrammum mixtum altitudinis æquantis rectam a b, baseos curuæ p d b; secundus sit cuneata vel vngularis superficies illi insistens, eueniet mirabili prorsus duplicis istius seriei affinitate, vt primus gradus illius æquet secundum istius; secundus tertium; tertius quartum, & ita deinceps progressu quantocunque. Cæterùm gradus omnes primæ illius seriei (data quadratura circuli pro illis qui paribus numeris computantur) quadrauimus in libello ea de re nondum edito vt in scholio quadragesimæ quartæ quinti superioris libri

monuimus; in editis verò tertium & quartum quadramus, vt constat ex quadragesima secunda eiusdem libri quinti.

Superest vt ostendamus Dettonuillæum rectè statuisse de summis quadratorum, cuborum, & quadratoquadratorum dato hoc postulato. Ait enim summam quadratorum esse æqualem figuræ o p d b a multiplicatæ per radium a b, quod patet ex iam demonstratis, cùm sit æqualis parallelogrammo insistenti super a o multiplicato per portionem quadrantis circularis insistentis super c a, illa autem portio, vt diximus, sit ipsa o p d b a: ergo summa quadratorum est rectè constituta ab illo Autore, dato præsenti postulato.

Præterea idem Dettonuillæus ait summam cuborum esse æqualem summæ figuræ o p d b a multiplicatæ per quadratum radij b a; quod manifestum est ex iam demonstratis; est enim æqualis tertio gradui primæ seriei, ille autem gignitur ex multiplicatione o p d b a per quadratum radij b a, hoc est, parallelogrammi insistentis super recta a c. Hîc tamen annotari debet, quod in illo corollario secundo primæ propositionis diximus; istos nimirum soluendi problemata modos dare locum vlteriori solutioni problematum, antequam ad postremam rei propositæ exequutionem perueniri possit.

Denique ille idem Autor asserit summam quadratoquadratorum esse æqualem summæ figuræ circularis o p d b a cubicè sumptæ, & multiplicatæ per radium o a. Figura enim circularis o p d b a cubicè sumpta est æqualis cylindraceo altitudinis æquantis radium, baseos quæ sit quartus gradus primæ seriei: ergo demonstratis consonat assertio Dettonuillana; sed, vt ad vltimam rei decisionem veniatur, eget vlteriore solutione, vt iam annotauimus; neque ex huius solutionis inopia vitio vllo laboraret eius liber; ea enim ex eius tractatu *solidorum circularium* erueretur: ergo &c. quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Istud ego postulatum pro præsenti cycloideos causâ facilè concedo, adductus ad id conuenientiâ quam deprehendi inter meas problematum eorundem solutiones, quas in tertio libro tradidi, & inter eas quæ ex hoc postulato euincuntur. Porrò meæ illæ solutiones nullatenus pendent ex illo postulato, vt examinanti patebit. Quod si postulatũ sit verum in cycloideos causâ, non apparet ratio cur in vniuersum admitti non possit.

PROPOSITIO V.

SI postuletur, iisdem manentibus (*Fig. 69.*) vt duæ illæ figuræ quarum vna insistit curuæ p d b, altera rectæ o a manentes vt iacent, habeant centrum grauitatis in eodem plano ad planum c a b recto, & parallelo rectæ h l; concessio illius nihil pugnabit cum demonstratis aliunde a nobis, in istis de cycloide problematis.

Ista consonantia liquet ex vigesima secunda superioris libri; ibi enim ostendimus cuneatæ istius superficiei hinc & inde arcubus c d b, c g n, in-

ſiſtentis ad oppoſitas partes plani c a b, ac proinde & ſuperficiei ſphæricæ deſcriptæ motu ſemicirculi b c n circa c a manentem, centrum grauitatis eſſe in puncto quod bifariam ſecat radium a c. Id verò liquet ex poſtulato præſenti; namquadrati inſiſtentis ſuper recta c a, & alterius ad partes oppoſitas inſiſtentis ſuper eadem recta c a, centrum grauitatis eſt vt patet, in eodem puncto, quod bifariam ſecat radium a c. Ita quoque, cùm ibidem oſtenderimus, ſi ſumatur peripheria intercepta inter planum per a b ductum, & inter aliud per biſectionem rectæ a c, quorum vtrumque ſit rectum ad planum c a b; centrum grauitatis eſſe in biſectione portionis radij c a, interceptæ inter illa plana: patet id ad vnguem congruere iam demonſtratis ex illo poſtulato: ex quo illud generale obtinetur; *Centrum grauitatis portionis ſuperficiei ſphaericæ interceptæ inter duo qualibet plana dicto iam modo parallela, eſſe in biſectione portionis radij a c, interceptæ inter eadem plana.* Ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Poſtulatum, vt cernis, eſt *centrum vtriuſque ſuperficiei vt iacet manentis, eſſe in eodem plano ad planum c a b recto & parallelo ad rectam a b*: ſed ſi hoc ipſum centrum grauitatis in eadem ſectione plani paralleli, & figuræ inſiſtentis ſuper curua retineri velis, poſtquam figura illa expanſa fuerit; longè errabis, nec poſtulato iſto tuum errorem iure excuſare poteris.

COROLLARIVM II.

Iſtud poſtulatum poteſt demonſtrari ex ſuperiore; nam ambæ ſuperficies habent centrum in eodem illo plano; ſi, cùm ſint figuræ æquales, habeant quadratrices ſiue ſpatia æquiponderantia æqualia, libræ planæ axe o d; habent autem quadratrices æquales ex quadrageſimâ ſuperioris libri, ſi ad poſitionem eiuſdem plani multiplicata per triangulum quodcunque o u a rectilineum, dent æquale ſpatium; atqui ex ſuperiore dant æquale ſpatium; ergo ſuperiore poſtulato ſemel conceſſo, non poteſt negari iſtud.

PROPOSITIO VI.

NOſtra quadratricum generatio proponitur, explicatur, conferturque cum Dettonuillana.

Eſto (*Fig. 66.*) in ſchemate quadrageſimæ ſuperioris libri b c d a quælibet figura ad poſitionem rectæ a d inſiſtens baſi b a; eſto quoque, vt ibidem præſcriptum fuit, figura a n b m ita genita vt ſicut g a ipſi b a æqualis ſe habet ad a m quamlibet portionem abſciſſam ex g a producta, ita ſit m o dimetiens figuræ b c a d parallela rectæ a d, ad m n dimetientem figuræ a n b m, quam quadratricem primam iam olim appellamus; & ita quoque ſit m n ad m r dimetientem figuræ a r b m, quam ſecundam quadratricem appellare ſolemus.

Oſtendimus in ſeptima ſecundi tetragoniſmicorum, librâ grammicâ

g b ſuſpensâ ex a, perpendiculo a d, brachio g a, æquiponderans aptatum puncto g eſſe æquale quadratrici a n b m: ſimiliterque æquiponderans quadratrici primæ, eſſe æquale quadratrici ſecundæ a r b m; & ita de tertia comparata ad ſecundam; deque quarta ad tertiam; & ſic deinceps. Oſtendimus autem illud methodo Archimedeâ perreductionem ad impoſſibile; ideóque in antecedentibus præparauimus quæ neceſſaria erant, ad iſtud concluſionis genus. Si quis verò nunc temporis quæ tantùm ſunt neceſſaria ad illum deducendi modum aſſumat, vel etiam interpolet, & reliquum apparatum, veluti ſyrma Geometriæ longius, præcidat, inferatque illud ſpatium æquiponderans eſſe æquale quadratrici; cuius etiam nomen immutet; næ ille exiguam operam Geometriæ præſtet, & probrum ſibi multum potiùs quam laudis quicquam creet.

Quoniam verò vt g a brachium ad a m; ita eſt m o ad m n; & ita eſt m n ad m r; patet primò rectangulum ſub extremis g a, m n eſſe æquale rectangulo ſub mediis a m, m o, vel q m, m o; ac proinde, poſito quod triangulum a b c ſtet rectum ſuper plano b a d, cylindraceum altitudinis g a, baſeos a n b, eſſe æquale dicylindraceo q m o, progenito ex triangulo c a b & ex figura a d c b, ad poſitionem rectæ a d. Patet ſecundo Dettonuillæi *ſummam triangularem* reſpondentem figuræ a d c b inchoando ex puncto a, eſſe dicylindraceum illud: nam in prima proprietate tractatûs ſcripti de *proprietatibus ſummarum ſimplicium, triangularium, & pyramidalium* pag. 1. monet ſummam rectangulorum a m in m o nihil aliud eſſe quàm ſummam triangularem omnium m o (hoc eſt figuræ a d b m) initio ſumpto ex a. Hoc ipſum diſertè docuerat in epiſtola ad D. de Carcaui pag. 16. ipſum etiam ſolidum dicylindraceum q m o, quod æquiualet cylindraceo altitudinis g a, baſeos m n, appellare ſolet eodem nomine ſummæ triangularis. Perſpicis apertè, Lector, nomen *ſummæ triangularis* eſſe quidem nouum, cogitationem tamen rei illi nomini ſubiectæ noſtram tunc ſaltem fuiſſe, cum libros tetragoniſmicos ante decem ferme annos ederemus: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

In lineis Dettonuillæus eodem pacto explicat ſummas iſtas, nimirum per quadrataria ſpatia parallelogrammorum illis inſiſtentium; ſicuti ſummas in planis figuris explicuit per quadrataria ſpatia cylindraceorum illis inſiſtentium, quod fieri poſſe oſtendimus in quinquageſimæ propoſitionis libri quinti corollario ſecundo; id tamen non eſſe neceſſarium niſi pro lineis; quod, cùm aliunde rei difficultatem augeat, nunquam vſurpamus, vbi dantur quadrataria ſpatia eiuſdem cum ſpatio ſuſpenſo generis. Cur enim ad aliud genus recurramus, ſi neceſſitas nulla ad id cogat. Dettonuillæus tamen perpetuò adhibet magnitudines alterius generis; vnde fit vt pro ſolidis trinæ dimenſionis excogitet quædam ſolida quaternarum dimenſionum.

PROPOSITIO VII.

QVadratricum nostrarum subcontrariarum proprietas declaratur illa ipsa, quam summis suis triangularibus subcontraiis Dettonuillæus adscribit.

Propositione nona secundi libri tetragonismicorum ostendimus (*Fig.* 66.) si ex g b auferatur b u ipsi a b æqualis, ita vt tres rectæ, g a, a b, b u sint æquales, quadratricem respondentem brachio b u esse ipsam b c d a n, hoc est ipsam a d c b imminutam quadratrice subcontraria a n b m. Inde verò fit, si per centrum grauitatis figuræ a d c b ducatur m o parallela perpendiculo a d, vt est quadratrix brachij g a, nempe a n b m, ad quadratricem brachij b u, nempe ad b c d a n; ita esse longitudinem a m ad m b. Nam ex lege libræ demonstrata ab Archimede, vt a m recta ad rectam a g; ita æquiponderans aptatum puncto g, ad figuram suspensam a d c b: ita pariter vt brachium b u vel g a ad longitudinem b m; sic est eadem figura suspensa ad æquiponderans aptatum puncto u, hoc est ad figuram b c d a n: ergo ex æquo, vt recta a m ad m b, ita est quadratrix genita brachio g a, ad quadratricem genitam brachio b u; hoc est, ita est triangularis summa initio sumpto ab a ad triangularem summam initio facto à b. Dettonuillæus rectam a b vocat *libram*, & longitudines a m, m b appellat *brachia*; vnde in epistola ad D. Carcaui pag. 9. asserit summam triangularem incipiendo à puncto b, esse ad summam triangularem cuius initium sumatur à puncto a, vt brachium b m ad brachium m a. Ecce miram concordiam cogitationum antiquarum & recentium; en vt duo homines de eadem re cogitabundi sæpe sæpius in eadem inuenta conueniant, esto in nominandis & appellandis illis discrepent: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

QVid Dettonuillæus nomine *summarum pyramidalium* intelligat, & quid inuentis, quæ ante se extabant, addat.

Quod in corollario sextæ superioris monuimus, hîc iterum & paulò fusiùs nobis censemus narrandum. Tria sunt tam apud Physicos quàm Geometras genera magnitudinis siue ποσότης, (quam in Scholis *quantitatem* appellamus) Linea, superficies, & corpus. Linea est vnius dimensionis, siue vt ait Euclides longitudo latitudinis expers; superficies pari pacto definietur longitudo & latitudo absque profunditate; corpus denique triplici illa dimensione est præditum, longitudine, latitudine, & profunditate. Rerum per se natura exigere videtur, vt quadratrix lineæ, sit linea; superficiei, superficies; solidi, solidum. Quia tamen lineæ quadratrix nulla in eodem genere excogitari potest, mutuò illam accipit à secundo genere, nempe à superficie parallelogrammâ rectilineâ, vel mixtâ, vt explicatum fuit in quinquagesimæ superioris libri corollario secundo.

cundo. Nos pro lineis curuis mutuati sumus quadratrices aliunde, quia illas in eodem genere non reperimus; at verò pro superficiebus & solidis, natiuas eis & congenitas intra idem genus assignauimus.

Reciproca libræ lex, qua vt suspensum a d c b (*Fig. 66.*) ad quadratricem a n b m, ita est baachium g a ad a m distantiam, qua figuræ a d c b centrum grauitatis distat à perpendiculo a d, non habet locum, quoties suspensum & quadratrix eius, sunt generis diuersi; sicuti enim punctum rationem nullam habet ad lineam, ita neque linea ad superficiem; neque superficies ad solidum trinæ dimensionis; neque istud ad aliud quaternæ, aut quinæ &c. dimensionum; si quis illas capiat cogitando. Quadratrix tamen diuersi generis non erit continuò repudianda veluti prorsus inutilis; nam quoties superiori *quantitatis* generi simul & inferiori eadem proprietas competere demonstratur, toties quod in superiori demonstratum fuerit, locum habebit in inferiore. Ita cùm ostenderimus parallelogrammi mixti hanc esse proprietatem vt si per grauitatis eius centrum ducatur recta parallela lateribus, punctum in quo secabitur planum baseos curuæ, sit grauitatis centrum eiusdem curuæ; non inutiliter quæritur quadratrix parallelogrāmi mixti; & satis speciosè,vt patet, ista quadratrix dicitur pertinere ad lineam curuam; quamuis enim non propriè pertineat, commodatur tamen illi ad præsentem vsum. Simili prorsus pacto euenire potest vt per quadratrices proprias solidorum inueniantur centra grauitatis basium; nam si per centrum grauitatis cylindracei cuiuslibet duxeris rectam parallelam rectæ cuius motu superficies illius cylindracea descripta fuit, punctum in quo ista parallela secat basim, est eiusdem baseos centrum grauitatis; potest itaque per quadratrices solidi cylindacei haberi centrum grauitatis baseos, & eatenus quadratrix solidi poterit inseruire basi. Pari prorsus pacto si basis ista, verbi causa, a d c b non tantùm multiplicetur in rectam p a (quod accidit iuxta istum Recentiorum loquendi modum quando ponitur basis cylindracei habentis altitudinem a p) sed in quadratum, vel cubum, &c. rectæ a p, solido inde genito quaternæ vel quinæ vel senæ &c. dimensionis, respondebit quadratrix baseos a n b (quæ est propria quadratrix figuræ a d c b, genita brachio g a, perpendiculo a d) multiplicata in quadratum, vel cubum &c. rectæ eiusdem a p. Vnde liquet si baseos a d c b multiplicatæ in quadratum a p habeantur mutuatæ quadratrices illæ quas subcontrarias diximus in propositione septimâ, & istæ subcontrariæ habeant bases multiplicatas in idem quadratum a p; ex earum ratione, obtineri, (si recta m o transeat per greuitatis centrum baseos a d c b) rationem rectarum a m, m b, vt ex illa septima liquet. Non igitur inutiles sunt, dummodo suspensum & quadratrix ista reuocentur ad solida earundem (quotcunque illæ fingantur) dimensionum; nam cùm suspensi basis fuerit a d c b, basis quadratricis illius erit quadratrix a n b m nostrâ methodo reperta. Quorsum, inquies, illa solida tot supra ternarium dimensionum, si eorum

tantummodo bases quæruntur? numquid fatius foret illa adeo obfcuræ fabricationis corpora prætermittere? Refpondeo fatius quidem foret, fi aliter & commodiore machina veritas è puteo illo veterum fabulis celebratiſſimo extrahi poſſet; ſed qui Algebriſmum in Geometriam introduxerunt, illóque vtuntur ad veritatem indagandam, non poſſunt quin ſæpe iſtis ſolidis vtantur in progreſſu demonſtrationis; quod in curſu demonſtrationis eiuſmodi eſto illis cōceſſum, dummodo, cum ad metas eius peruentum fuerit, reductione omni peracta, res redeat ad quadratrices ſimplices & natiuas, quas ſolas noſtra methodus parit. Solida iſta ὑπερστερεοδιαστατικὰ, (hanc vocem nouam in re noua deſignanda fingere liceat) quorum baſes ſunt quadratrices noſtræ ſecundæ, Dettonuillæus Algebriſmi iſtius ſectator, vocat *ſummas pyramidales*. Hinc autem manifeſtum fit, ſi nobis notæ olim fuerint iſtæ ſecundæ quadratrices, notas pariter fuiſſe ſummas pyramidales Dettonuillanas, ſaltem quod ad earum nucleum attinet excretum à reiectaneo putamine. Sed veniamus ad rem propoſitam, liceatque nobis in præſentis propoſitionis demonſtratione eiuſmodi ſolidis, quæ ſuperant τρίτην διάστασιν, more Dettonuillano, vti.

In epiſtola ad D. de Carcaui pag. 16. docet expreſsè (*Fig. 66.*) bis ſummam pyramidalem ordinatarum m o initio ducto ab a, eſſe æqualem ſummæ ſolidorum effectorum ab iiſdem ordinatis m o ductis ſigillatim in quadratum a m; vnde patet iſtud ſolidum eſſe quartæ dimenſionis; ſubiungit verò ſtatim neminem offendi debere hac quarta dimenſione, cùm reduci poſſit ad vnam ex tribus notis & receptis apud omnes.

Quoniam autem ex generatione à nobis traditâ primæ & ſecundæ quadratricum, vt eſt g a recta ad a m, ita eſt ordinata m o ad m n; & ita quoque eſt ordinata m n ad m r; ergo vt g a recta ad a m rectam, ita eſt a m in m o, ad a m in m n; cùm a m in m o, & a m in m n ſint eadem altitudine a m prædita, ac proinde rationem habeant baſium m o, m n; quæ eſt ipſa rectarum g a, a m. Igitur habemus quatuor magnitudines proportionales prima eſt recta g a, ſecunda eſt recta a m, tertia eſt rectangulum a m in m o, quarta rectangulum a m in m n, vel illi æquale g a in m r, cùm vt recta g a ad rectam a m, ita ponamus eſſe m n rectam ad m r rectam. Ergo ſolidum genitum ex prima g a & ex extrema g a in m r, hoc eſt ſolidum g a in g a in m r, eſt æquale ſolido genito ex ſecunda & tertia, hoc eſt, ſolido ex a m in a m in m o; hoc eſt ſolido genito ex m o in a m quadratum. Igitur ſolidum quartæ dimenſionis genitum ex m r in g a quadratum, eſt æquale ſolido genito ex ordinata m o in a m quadratum.

Quoniam igitur ſumma pyramidalis Dettonuillana cuius initium ſumatur à linea a d eſt, vt ipſe ſtatuit, dimidium ſolidi geniti ex ordinatim applicata m o in quadratum a m, patet eſſe quoque dimidium ſolidi geniti ex m r ordinatim applicata ſecundæ quadratricis in quadratum g a; quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM I.

Quoniam Dettonuillæus eo loco vbi ex professo tradit naturam summæ pyramidalis constituit eam esse dimidium summæ ordinatarum m o in quadratum a m initio facto ab a, idemque admonet sub finem tractatûs solidorum circularium, & passim alibi; quod affirmat in prima proprietate tractatûs *de summis simplicibus, triangularibus, & pyramidalibus* pag. 2. *summam pyramidalem omnium m o initij a d, esse summam omnium m o in m a quadratum*, emendari debet, ne pugnantia in eodem libro scripserit.

COROLLARIVM II.

Hinc sequitur præterea nomen summæ pyramidalis fuisse quidem antea inauditum, rem tamen ipsam reductione peracta, nihil aliud fuisse quàm dimidium quadratricis secundæ m r ductum in quadratum g a; illud autem dimidium ita sumi debet vt omnes ordinatæ m r bifariam secentur limbo diuidente quadratricem a r b m in duas partes æquales.

COROLLARIVM III.

Patet ex demonstratis cùm quadratrix secunda ad positionem rectæ a d sit ad primam vt est prima ad radicem; ipsam secundam esse quadratricem primam respectu primæ; ac proinde, cùm ordinatæ omnes m n inchoando ab a, habeant summam triangularē siue cuneum quadratarium, æqualem cylindraceo altitudinis p a, vel b e, baseos a r b m; manifestum est summam triangularem rectangulorum contentorum sub ordinata m n & sub perpendiculari ex m excitata ad planum b a d, æquante altitudinem a p, esse æqualem omnibus m r ductis in quadratum a p. Ergo cùm omnes m n ductæ in altitudinem a p sint summa triangularis omnium m o, vt ostendimus in superiore, apertum est summam triangularem summæ triangularis omnium m o, esse summam illam quam Dettonuillæus *pyramidalem* appellat. Cùm igitur, mathematicè demonstratum sit, summam triangularem summarum triangularium ad m o ordinatam attinentium gigni ex m o in quadratum a m; non video qua ratione istud concordet cum pronuntiato Dettonuillæi in epistola illa pag. 1. *summam pyramidalem esse summam triangularem summarum triagularium*, nihilominus tamen *non esse nisi dimidium ordinatarum m o in quadratum a m*.

COROLLARIVM IV.

Non tamen inde inferre vllus debet negari à nobis quod Dettonuillæus affirmat *triangulares numeros hanc habere proprietatem vt duplum eorum imminutum numero exponente, sit æquale quadrato numeri ipsius exponentis*; concedimus enim id lubenter; imò addimus non fuisse confugiendum ad triangulares numeros, vt ostenderet summam eorum ad Geometrica ista applicatam esse dimidium quadrati a m; id enim in Geometria clarissimum est ipsis tyronibus, nempe triangulum a m q esse dimidium quadrati a m vel m q, quoties a b e f est quadratum. In Geometria quoque illud certum est, triangula a m q, esse inter se vt rectas l m; ac proinde ipsa

etiam quadrata a m esse inter se vt rectas l m. Id tamen nihil obstat, vt demonstrauimus, quominus omnes m o ductæ in quadratum a m æquent summam triangularem summæ triangularis omniũ m o. Sed hac controuersia seposita, sumamus quod magis constanter asseritur, à Dettonuillæo *summam pyramidalem* eam esse quæ æqualis est dimidio summæ factæ ex m o ordinata in quadratum a m; vel ex dimidio quadratricis secundæ a r b m per nostram methodum inuentæ, & ex quadrato a b. Hæc secunda quadratrix vocetur *summa pyramidalis nostræ methodi*, vt distinguatur à summa *pyramidali Dettonuillana*.

PROPOSITIO IX.

QVadratricum nostrarum in solidis, superficiebus & lineis, altera proprietas & generatio demonstratur.

Iisdem manentibus (*Fig. 66.*) intelligatur recta b e esse perpendicularis ad planum b a d, & æqualis rectæ a b. Cylindraceum altitudinis b e, cuius basis sit quadratrix prima a n b æquale esse cuneato solido cuius basis sit figura a d c b m, altitudo verò triangulum a e b, ostendimus in quarti tetragonismicorum libri propositione vigesima prima. Porrò cuneatum solidum siue vngulare, vt definiuimus ibidem, est portio cylindracei (quod perspicuitatis maioris causa ponimus esse rectum) intercepta inter basim a d c b, & inter planum e a d. Potest quidem cylindraceum non esse rectum; potest quoque inclinatio plani e a d esse alia; sed illa omnia satis intelliguntur, si istud cuneatum, quod *primarium* appellamus, rectè cogitetur.

Præterea ostendimus in vigesima secunda eiusdem quarti libri ipsum cuneatum esse dimidium solidi dicylindracei, cuius hæc est proprietas, vt sectiones eius omnes parallelæ plano e b a, vel p a b, sint quadrata quorum latera sint rectæ intra figuram b c d a accommodatæ ad positionem rectæ b a. Cuneatum istud solidum in cylindro contemplatus est & quadrauit primus, quem sciam, noster Gregorius à S. Vincentio initio libri noni per propositiones octoginta: in cylindraceo verò cuius basis sit parabola, idem Gregorius à propositione octogesima per consequentes viginti quatuor summa eruditione: in cylindraceo denique cuius basis sit hyperbola, quinam illum in parallelepipedum verterint, narrauimus in præfatione libri præsentis. Istud solidum vocauit Gregorius *vngulam*; Dettonuillæus in Gallico scripto *Vnguletum vel Ongletum*; Andreas Tacquet *portionem cylindricam*; Nos *cuneum*, *vel cuneatum solidum*. Istud autem solidum cuneatum esse ad positionem plani p a d vel e b A æquale condicta ratione cylindraceo baseos b a n, altitudinis a p vel b e, ostendimus in vigesima quinta, & vigesima sexta quarti tetragonismicorum, necnon in quadragesima superioris libri. Vnde patet vtrumque appellari posse quadratricem figuram solidam cylindracei habentis basim a d c b, altitudinem a p; ex quo fiat vt si planum q m o ponatur duci per centrum gra-

uiratis cylindracei, vt eſt brachium g a ad longitudinem a m, ita ſit cylindraceum ad quadratricem figuram ſolidam alterutram, & ita quoque ſit baſis b c d a cylindracei ſuſpenſi ad baſim a n b m figuræ quadratricis eadem altitudine præditæ.

Quadratrix ſolida cuneata, ſiue vngulare corpus baſeos b a d c comprehenſum inter plana c a b, c a d & ſuperficiem cylindricam baſimque b a d c, intelligatur ſecari plano ad baſim parallelo; ita vt in plano c a b ad planum b a d recto faciat ſectionem q M parallelam rectæ a b, & per q interſectionem rectarum c a, q M ducto plano ad planum p a d, vel c b A parallelo, eius ſectiones cum planis c a b, b a d ſint rectæ q m, m o parallelæ rectis c b, a d. Patet ſectionem vngularis iſtius ſolidi, ſiue quadratricis cuneatæ ſolidæ effectam plano per q M ducto æquidiſtanter baſi b a d c, eſſe ſimilem, æqualem & ſimiliter poſitum baſeos b a d o c b portioni o c b m: Atque hæc eſt proprietas quæ demonſtranda erat in ſolida quadratrice cuneata, vnde eius generatio tradi poteſt.

Simillima autem intelligi poteſt (*Fig.* 57.) in quadratrice parallelogrammi mixti b l m e c h; eius enim quadratrix b i e c h, talis eſt vt quocunque per i plano ad ſuppoſitum planum b h c o parallelo ſecetur, ſectio illa ſit parallela, ſimilis, æqualis, & ſimiliter poſita atcui h c. Quod non minus verùm eſt ſi b h c non ſit curua ſed recta: ergo in ſuperficiebus & ſolidis oſtendimus proprietatem alteram quadratricis, ex qua ipſius generatio peti poſſit, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Hinc patet Dettonuillæum pronuntiaſſe quidem in tractatûs *de trilineis & Vngulettis* propoſitione ſeptima, ſummam quadratorum trilinei eſſe æqualem duplo ſummæ triangularis eiuſdem trilinei inchoatam à puncto a; ſed id problema longè antea vulgatum fuiſſe.

COROLLARIVM II.

Cùm ex vnguletto ſiue vngula aut cuneo habeatur ſolidum periphericum, & vngula ſit quadratrix figura ſolida cylindracei iam deſcripta; quadratrix autem apud nos ſit quod Dettonuillæo dicitur ſumma triangularis & pyramidalis; patet cauſa cur in problematum de periphericis ſolutione toties apud Dettonuillæum mentio fiat vngulettorum & ſummarum triangularium, aut pyramidalium; & cur quæ per vngletta ſoluuntur, ſolui etiam poſſe aſſerantur per ſummas triangulares & pyramidales.

COROLLARIVM III.

Patet tertiò quadratrices primas ſolidas reductas ad cylindraceum habère ſuum cuneum vngularem, qui ſit quadratrix ſolida ſecunda cuneata; & iſti quadratrici cuneatæ ſecundæ reſpondere pariter æquale ſolidum cylindraceum altitudinis eiuſdem a p, baſeos a r b m, quæ eſt quadratrix ſecunda baſeos b c d a attinentis ad cylindraceum primum. Hoc verò pa-

cto pergere possumus ad tertias, quartas &c. quadratrices, vt ex demonstratis liquet.

PROPOSITIO X.

AD proprietatem suprà expositam quadratricum, exiguntur Dettonuillanæ definitiones *summæ triangularis, & pyramidalis.*

Ponendum est, quod suprà monuimus, Dettonuillæum superficiei b a d c assignare solidum pro summa triangulari, sicuti & rectæ superficiem; vnde fit vt solido excogitet summam triangularem quaternæ dimensionis. Istud in Epistola ad D. de Carcaui pag. 17. expresse docet ex lineis videlicet attinentibus ad summá triangularem linearum, confici superficiem; & ex superficiebus quibus componitur summa triangularis superficierum, constitui solidum; atque ex solidis pari methodo sumptis gigni summam pyramidalem. Istas porrò summas (*Fig. 66.*) ita extruit: summa triangularis superficiei a d c b incipiendo ab a, vel à recta a d, est solidum insistens super basi b a d c, cuius hæc est proprietas, vt si secetur plano q m o ad planum p a d recto, & incedente per rectam m o parallelam rectæ a d, eius sectio sit æqualis figuræ b c o m. Istud solidum esse æquale cuneato solido vel cuneatæ quadratrici solidæ superioris propositionis, interceptæ inter plana e a b, e a d, b a d, & sumptæ secundum sectiones parallelas basi b a c d, nunc contendo. Nam sectio quæ est in plano ad basim b a d c parallelo, ducto per q M rectam, est per constructionem æquale portioni b c q m ex basi b c d a per planum q m o abscissæ ad partes b; ergo cùm rectæ a b, a e secentur proportionaliter per planum q m o, & huius plani cùm illis solidis sectiones ponantur æquales; ita tamen vt sectio à plano per q M ducto effecta in solido superioris propositionis sit inclinata ad planum d a e inclinatione anguli b a e; sectio verò à plano q m o effecta in solido præsentis propositionis sit perpendicularis ad planum b a d c: ergo est æquale, si ob inclinationem tantum minui debeat solidum superioris propositionis, quantum augetur propter basim in plano e a d constitutam & comprehensam sectione cylindraceæ superficiei & rectis a d, a e. Atqui ista basis ad basim b a d c est vt recta e a ad a b (istud enim probatur vt in cylindro perfecto) ex inclinatione verò illa fit vt solidum ita inclinatum sit ad aliud quod iisdem sectionibus perpendiculariter erectis ad basim constaret, sicut est recta eadem b a ad e a: ergo quantum crescit ob maiorem basim, tantumdem decrescit ob inclinationem: manet igitur æquale; & summa pyramidalis superficiei b c d a respondens, initio facto ab a b, est æqualis quadratrici cuneatæ solidæ superioris propositionis.

Similiter si ad figuræ b a c d axem b a ordinatim applicatæ omnes a d, m o &c. concipiantur produci & ex illis ita productis intelligantur abscindi rectæ æquales arcubus d c b, o c b, & sic de aliis, gignetur figura quam incipiendo ab a d Dettonuillæus appellat summam pyramidalem curuæ

d c b, & quam nos in definitionibus decimæ sextæ quinti libri superioris appellauimus *quadratricem mixtam expansam.* Nostra verò quadratrix reperta ex methodo superioris, cùm sit *quadratrix mixta conuoluta*, quam definiuimus, & cùm in corollario quinquagesimæ secundæ eam ostenderimus esse æqualem expansæ; patet summam triangularem respondentem lineis curuis esse illam ipsam quam nos quadratricem mixtam rectanguli mixti nominauimus.

Quoniam igitur Dettonuillæus initio epistolæ ad D. Carcaui pag. 6 & 16. definitionem summæ triangularis pro lineis & superficiebus tradit per proprietatem in præsenti propositione expositam, eaque ipsa competit figuris quadratricibus repertis in superiore propositione, patet nostras quadratrices figuras non nisi nomine discrepare à summis triangularibus & pyramidalibus Dettonuillanis. Atque adeo cùm proprietas alia summarum istarum quam in sexta propositione expendimus quadret quoque nostris quadratricibus, vndecunque euidens esse summas illas Dettonuillanas quantum ad rem & vsum præcipuum attinet, & notas fuisse Geometris, & libris iam ante aliquot annos editis consignatas, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Summas pyramidales non attigi hîc speciatim, eo quod similem generationem habeant, vt ipse Dettonuillæus disertè admonet pag. illâ 17. *Ita pariter* inquit, *summa pyramidalis earundem ordinatarum m o* (Fig. 66.) *gignit planum, compositum ex totidem solidis, quot sunt portiones in axe a b inter se æquales; quæ quidem solida formantur singula per summas triangulares particulares, quarum summa tota constituit summam pyramidalem. Nam earum summa pyramidalis sumitur in hunc modum. Primò sumptâ summâ omnium triangulari, quæ vnum solidum conficit modo iam explicato; tum reliquarum excepta prima omnium sumitur summa triangularis, eaque efficit aliud solidum &c. & ita quot erunt diuisiones in axe, tot erunt solida, quorum singula cum multiplicata fuerint per particulam vnam earum in quas diuisus fuerit axis, dabunt totidem plano-plana eiusdem altitudinis, quæ omnia simul complent plano-planum de quo agimus.* Cernis plano-planum esse Dettonuillæo solidum quaternæ dimensionis, & in illius generatione eandem seruari methodum, quæ tradita est pro summis aliis que trinam dimensionem non excedunt. Si quid itaque difficultatis extraordinariæ experimur in huius solidi generatione, id oritur ex dimensione illa quadruplici, quam cum nostra methodus, nosterque intelligendi modus non ferant, non est mirum quod illam speciatim persequi detrectemus, præcipuè cùm de eiusmodi summæ cum quadratricibus nostris comparatione satis egerimus in octaua, ibique vsurpato loquendi & demonstrandi more Dettonuillano, ostenderimus rei istius medullam nihil aliud continere præter quadratrices nostras secundas. Quod si summas pyramidales curuæ lineæ contemplemur, illæ erunt cuneata solida trium dimensionum; quia cùm ipsæ lineæ sint vnius dimensionis, earum summa triangu-

laris erit duorum; summa verò pyramidalis, trium tantùm iuxta leges huius generationis à Dettonuillæo præscriptæ; iuxta quam patet cylindri suummam triangularem esse debere quaternarum dimensionum; & pyramidalem, quinarum.

PROPOSITIO XI.

SVmma cuborum definita in propositione prima præsentis libri est tripla summæ pyramidalis sub finem corollarij proximè superioris descriptæ.

Reuocetur ex tertio libro schema propositionis octauæ (*Fig.* 25) in quo describitur a h g b figura comprehensa rectis a b, b g & quacunque linea a h g, ita vt omnes parallelæ ad rectam a b ex ipsa a h g demissæ in rectam b g cadant inter b & g; omnes item parallelæ ad rectam b g ex ipsa a h g demissæ in rectam b a, cadant inter b & g, & non secent lineam a h g nisi in vno puncto. Libra a c suspensâ ex b perpendiculo b g, brachio b c posuimus describi quadratricem secundam b x a o figuræ b g h a; præterea posuimus seriem graduum ad positionem rectæ b a, quorum primus sit parallelogrammum b c e g, secundus figura b a h g, tertius figura c f e d, quartus figura c t e d, quæ vt ex prima propositione huiusce libri liquet est summa cuborum, sicuti quadratrix secunda b x a o est summa pyramidalis sub calcem corollarij quarti superioris definita. Quoniam in illa octaua propositione tertij libri ostendimus quartum gradum esse triplum quadratricis secundæ; quartus verò gradus in hoc libro appellatur *summa cuborum*; secunda verò quadratrix nominatur summa pyramidalis; patet summam cuborum esse triplam summæ pyramidalis, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Nostra illa demonstratio est Geometrica, & prorsus cogit ad assensum; si tamen placet rem calculo experiri in exemplis facilibus, pone primò figuram b a h g esse quadratam, & similem æqualemque figuræ b c e g, quartus gradus in hoc casu erit æqualis ipsi quadrato, ac proinde quartus gradus erit tres trientes quadrati b g vel b a. At prima quadratrix erit triangulum quod est dimidium quadrati b a h g, sicuti ex 42. superioris libri constat, secunda verò quadratrix erit ceratoides parabolica ex eadem illa propositione, illa verò ceratoides per quadraturam parabolæ, est triens quadrati b g: ergo in hoc casu quartus gradus est triplus secundæ quadratricis.

Secundò pone lineam a h g esse rectam, & a b g h esse triangulum rectangulum, cuius latera a b, b g sint æqualia & comprehendant angulum rectum. Ex 44. libri quinti superioris constat quartum gradum esse æqualem quadranti vel tribus vnciis quadrati b g, nam secundus est æqualis dimidio, tertius trienti, quartus quadranti. Præterea prima quadratrix trianguli b a g initio ducto ab a, brachio æquante rectam a b, est vt iam diximus,

diximus, æqualis trienti quadrati a b, & secunda quadranti eiusdem quadrati; ergo cùm initio ducto à puncto b secunda quadratrix sit ex decima ipsum suspensum b a h g auctum secunda quadratrice initij a, & imminutum duplo primæ quadratricis initij a, patet secundam quadratricem initij a esse dimidium quadrati b a auctum quadrante eiusdem & imminutum duobus eiusdem trientibus, hoc est compensatione facta, esse vnciam vnam quadrati a b g: sed quartus gradus est æqualis tribus eiusmodi vnciis: igitur quartus gradus in isto etiam casu est triplus secundæ quadratricis, ac proinde summa cuborum est tripla summæ pyramidaliis.

COROLLARIVM II.

Dettonuillęus ait in tractatu de trilineis & vnglettis *summā cuborum* esse æqualem sextuplo *summa pyramidalis*. Cuius pronuntiatum vt verum sit, intelligere debet nomine *summa cuborum* solidum aliquod quartæ dimensionis; cùm nomine *summa pyramidalis* designet solidum eiusdem generis; nec possit esse æqualitas nisi inter ea quæ eidem generi supponuntur. Si igitur intelligat per summam pyramidalem dimidiū secundæ quadratricis b x a o multiplicatum per quadratum rectæ b g; & per summam cuborum designet quartum gradum c t e d ductum in quadratum rectæ eiusdem b g; verissima est eius assertio. Sed quid ipse velit, cùm liquidò mihi non constet, suspenso hic incedo gradu; dubium verò istud de mente Dettonuillæi fecit, vt de mea dubitari noluerim, ideóque huc reuocarim, quamuis aliis verbis, propositionem illam.

PROPOSITIO XII.

REducatur ex tertio libro schema propositionis vigesimæ (*Fig. 32.*) vbi duæ quælibet rectæ b a, a c secant se ad normam, & ad positionem rectæ a c insistit rectæ b a figura quæcunque b i c a, & eadem b i c a ad positionem rectæ b a insistit rectæ a c iuxta cautiones superioris propositionis. Intelligitur solidum cuius sectiones sunt quadrata rectæ h i parallelæ ad rectam b a, æquidistantia plano x a b recto ad planum b a c; intelligitur præterea aliud solidum cuius sectiones parallelæ plano x a c sunt quadrata rectæ f i parallelæ ad rectam a c. Ex rectis a c, a b abscinduntur e a, a e inter se æquales.

Ostenditur in illa vigesima propositione solido sectionis quadratæ genito ad positionem plani x a c æquiponderare, brachio d a, idem spatium quod solido alteri, brachio e a; hoc est quadratarium spatium siue triangulares summas vtriusque solidi esse easdem. Istud demonstat quoque Dettonuillæus tractatu de *trilineis & vnglettis* propositione quinta pag. 5.

Propositionem præsentem huc reuocandam esse duximus duabus de causis, quarum prima est quod eius methodus sit generalis, & vtilissima

nobis fuerit ad solutionem problematum propositorum obtinendam. Altera causa est quòd cùm calculum nostrum initio præsentis anni edidissemus (statim videlicet vt accepimus primas epistolæ ad D. Carcaui quatuor pagellas e prælo recentes, & ad nos missas seorsum ab aliis postea cudendis) appendicem historiæ suæ addidit Dettonuillæus 20. Ianuarij 1659. qua vitiosum esse nostrum calculum quæsiti potissimum sexti contendebat. Respondimus extemplo vitium illud esse Typographi, & emendari satis potuisse ex comparatione quinti quæsiti cum sexto, cùm ex methodo huius propositionis vigesimæ, in vtroque quæsito secundus numerus proportionalis qui repræsentat æquiponderans siue quadratarium spatium, esse debeat idem, & de facto sit idem vtrobique pro primo casu tractato, pro altero autem verba repræsentantia secundum numerum sint vtrobique etiam eadem, nisi quod in sexto quæsito pro *quintuplum* ex quæsito quinto aduocandum, adscriptum fuit *quadruplum*. En responsionis nostræ ipsa verba.

Antonii Laloveræ *Societatis* Iesv *responsio ad nouissimam Historiæ Cycloideos appendicem.*

Solidi circa axem circumductu totius semicycloideos geniti centrum grauitatis in *Quæsito* nostri iam editi Calculi sexto non rectè consignatum fuisse obiicit Autor Historiæ Cycloideos in Appendicula recenti. Ad quod respondeo emendato voculæ vnius errato, tolli ansam carpendi calculum centri illius difficillimum. Nam in quæsito sexto si pro voce *quadruplum* legas *quintuplum* restitutos habes primarij istius casûs numeros. Ita autem legi oportere liquet ex vigesima propositione tertij libri primo quoque die edendi, vbi demonstratur in quæsitis quinto & sexto secundos quatuor proportionalium numeros esse vtrobique eosdem; quod & à nobis obseruatum esse liquet ex nudâ calculi inspectione. Nam in quæsito quinto secundus numerus primi casûs est *quadrans tertij auctus quatuor trientibus secundi, & imminutus sexdecim nouenis primi*: secundus verò numerus secundi casus est *quintuplum tertij imminutum centum viginti & octo nouenis primi*, qui numeri iisdem verbis resumpti iacent in sexto quæsito castigatâ illa voculâ. Cæterò istud erratum prouidentia Numinis prorsus singulari euenisse agnosco: nam Autor illius Historiæ eo deprehenso calculum saltem istum, quia spurium illum esse credidit, de meo esse concedit, alioquin repugnaturus.

Lubens accipio quod dat; plurimúmque etiam gaudeo centri calculum alterius à me editum illi probari; nam meæ illum esse inuentionis, clarius est quàm vt seriò negari possit. Cùm autem difficultatis apex, de sententia etiam Aduersarij, sit in calculo centri semisolidorum; ille, si vitio caret, similia errata (si quæ forte irrepserint in aliorum minùs difficilium ratiocinia) satis superque purgabit, saltem vsquedum prodeant (quod breui nec vti speramus inutiliter fiet) nostri de Cycloide libri, ad

quorum methodum calculus à nobis euulgatus exigatur à computandi peritis, & si opus fuerit etiam castigetur. Tolosæ 15. Februarij 1659.

Hæc tunc respondi, nunc verò addo vnum quod mihi exciderat dum falsam illam Anonymi de me criminationem repellerem. Doctos homines quæsisse sæpe causam cur Dettonuillæus vbi reprehendisset calculum nostrum in duobus omnium difficillimis casibus, illos non emendarit substituendo veros ex suo rationario abaco depromptos. Sicuti enim vnum & idem non sunt agnoscere vitium quadraturæ circuli, & illam minimè fucatam apud se habere; cùm Archimedes docuerit Posteros methodum vitij detegendi, nec tamen quadraturam ipsam germanam vspiam dederit: ita in præsenti negotio euenire facilè potest. Certè nos in tertij libri propositionis vltimæ scholio primo tradidimus modum non vnum explorandi numquod calculis istis de Cycloide initis vitium subsit; nec continuò, si ille modus verus est, confecimus cætera longè difficillima.

Porrò quamuis in illa responsione significarim tetragonismum circuli mihi à me inuentum videri, absit vt inde velim inuentæ eiusmodi quadraturæ laudem mihi arrogare; vel si quis ante me illam posthac in lucem prompserit, ausim illius laudis minuendæ causâ iactare, apud me solutum iam extitisse problema illud vsque à nascentis Geometriæ temporibus sedulò quæsitum. Expertus enim noui multa credi reperta, quæ ab ipso etiam Inuentore, dum supremâ diligentia examinantur, comperiuntur esse falsa. Quamuis verò non comperirentur esse falsa; inuentionis tamen lex æquissima id præscribit, vt illi qui primus propalam posuerit alicuius rei diu perquisitæ solutionem, nemo obstrepat hac voce, *ego in scriniis iamdiu occultabam inuentum illud.* Ita enim obuiam itur mille laudis alienæ detractionibus; ignauúmque fucorum pecus procul arcetur ab aluearibus, ne prædatitiò laboriosarum apicularum melle ditetur.

PROPOSITIO XIII.

Declaratur quo pacto ex vna quadratrice data, & ex data suspensa magnitudine eruantur aliæ quadratrices, vndecunque suspensio fiat.

De hoc Dettonuillæus agit in tractatu *summarum simplicium, triangularium, pyramidalium*; quem aliis examinandum, & in praxim reducendum relinquimus; nobis enim id non planè licuit. Iamdiu demonstrauimus in secundi libri tetragonismicorum decima propositione (*Fig. 66.*) si figura a d c b, postquam suspensa fuit ex a perpendiculo a d, brachio a g, ponatur suspendi ex x per recessum ab ipsâ, brachiumque par retineatur, & perpendiculum priori parallelum, quadratrici primæ a n b m addi oportere spatium, quod ad suspensum a d c b sit, vt recta a x ad a g, ad hoc vt fiat quadratrix pro suspensione ex puncto x. Quòd si intelligatur per accessum suspensio fieri ex m, reliquis seruatis; vt fiat æquiponderans res-

pondens huic suspensioni, oportere demi eidem quadratrici a n b m spatium, quod ad a d c b sit, vt accessus a m ad a g.

Præterea quoniam in septima ostendimus figuræ suspensæ a d c b m quadratricem respondentem brachio b u, esse ipsam a d c b m imminutam prima quadratrice a n b m; quadratrix quoque respondens ipsi a n b m, brachio eodem b u, erit ipsa prima quadratrix a n b m imminuta quadratrice secunda a r b m. Cùm ergo toti b c d a m æquiponderet figura ipsa b c d a m imminuta quadratrice prima anbm: ipsi autem b n a m æquiponderet ipsa b n a m, demptâ secunda b r a m, si de æquiponderante toti a d c b m dematur æquiponderans parti a n b m, relinquetur æquiponderans alteri parti a n b c d, nempe figura a d c b m imminuta duplo primæ quadratricis a n b m, & aucta quadratrice secunda a r b m. Igitur cùm a n b c d sit quadratrix prima totius a d c b m posito brachio b u, & ipsi a n b c d æquiponderet ipsa a d c b m dempto duplo primæ quadratricis a n b m, & addita semel quadratrice secunda a r b m, patet posito brachio b u figuræ a d c b m quadratricem secundam esse ipsam a d c b m, dempto duplo primæ quadratricis a n b m, & addita semel quadratrice secunda a r b m. Non multum absimili methodo possemus inuenire secundam quadratricem ex secundâ datâ a r b m, vbicunque statuatur secunda suspensio, sed illud satis constat ex nostris principiis olim demonstratis, istudque sufficit præsentis libri instituto.

Hoc tamen omitti non debet ex octaua secundi tetragonismicorum istas quadratrices haberi, si brachium a g mutetur in quodlibet aliud a x; nam vt recta a x ad a g, ita reciprocè est æquiponderans brachij a g ad æquiponderans brachij a x. Illud quoque obiter dico ex prima quinti tetragonismicorum constare methodum inueniendi æquiponderans quocunque perpendiculo per a ducto, & suspensione ex a factâ, si detur æquiponderans figuræ adcb brachio a g perpendiculo a d, & eidem æquiponderans aliud brachio f a perpendiculo a b. Ergo &c. quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XIV.

VSus libræ planæ à nobis inuentæ & expositæ in vigesima octaua quarti libri tetragonismicorum iterum inculcatur, ostenditúrque quibus illum verbis Dettonuillæus expresserit.

Libra plana, prout à nobis proposita fuit in quarto libro iam laudato, insigne præstat officium, dum quadratricem ad positionem perpendiculi in librâ grammicâ inueniendam, docet reperire ad positionem ipsius libræ grammicæ quæ ad rectos angulos secat ipsum perpendiculum. Porrò istud perpendiculum conuertitur in axem ipsius libræ planæ, prout eo loci explanata istius nostri inuenti methodus docet: nec frustrà illud esse crediderîs: aliquando enim non solùm compendiosiùs per illam inueni-

tur quadratrix vel summa triangularis: sed necessariò etiam, cùm non rarò nulla occurrat via illam inueniendi per libram grammicam.

Cæterùm Dettonuillæus hoc ipsum vsurpat demonstrando summam triangularem esse æqualem singulis sectionibus parallelis libræ grammicæ multiplicatis in sua brachia, siue in distantiam suorum grauitatis centrorum à perpendiculo eiusdem grammicæ libræ, quod in axem libræ conuertitur. Vide ipsum tractatu de trilineis propositione 13. & 14. & de arcubus circuli propositione 18. vide etiam quæ scripsimus in corollario quadragesimæ quartæ libri superioris. Res ergo ante Dettonuillæum non erat incomperta, sed illis nominibus non denotabatur; ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XV.

AN methodus qua Dettonuillæus vtitur & quam à se inuentam profitetur extiterit ante ipsum, visque illius agnita fuerit.

Quæ hactenus præsenti libro demonstrauimus quemlibet cogunt fateri eiusmodi methodum antea cognitam & in vulgus editam fuisse. Ne quis verò putet vim illius methodi à nobis iam olim vulgatæ, incognitam tunc nobis ipsis fuisse, indicamus corollarium secundum vigesimæ tertiæ quarti libri, vbi ita scripsimus de quadratario spatio quod ex vngulari vel cuneato deduximus *præsens theorema planam viam facit ad plurima problemata abstrusa pariter & vtilia*: quod in corollario primo decimæ nonæ primi libri huius Operis inculcauimus; in corollario verò tertiò eiusdem propositionis agentes de proportione quam habent peripherica genita circumductu quodam sectionis conicæ ab Archimede intentato, diximus *eius inuentionem alia via esse difficillimam, nec adhuc quantum recordamur ab vllo inuentã:* & paulò post asseruimus, pari pacto assignari posse proportionem innumerorum eiusmodi periphericorum ex parabolæ circumuolutione natorum, *ad quam si clauso isto tramite tentes ire, mirum est si aliud inueneris præter dumeta & sentes densissimas, quæ te cæco inextricabilique errore impediant.* Mirabilem verò esse quadraturam *cunei* vel vngulæ satis nuper indicauimus in scholio duodecimæ propositionis primi libri, qui seorsum ab aliis prodiit anno superiore: sed longè antè illud prænuntiaueramus in tetragonismicorum librorum quarti propositione vigesima sexta, in cuius scholio hæc verba exarata extant, quibus innuimus tunc, quousque nos in quadraturæ instituto progressos esse existimaremus: *neque exiguum profecisse nos putamus dum ad cunei noti præsentem quadraturã Deo dante peruenimus, hoc enim est veluti dimidium facti iam habere.* Quod si aliis ista iam semel inuenta facilia iudicentur, id nihil detrahit de inuentionis difficultate, siquidem quid non est aditu facile, postquam ad illud semel explanata patet via?

Stet itaque istam methodum si eius originem altiùs repetamus deductam esse ab Archimedeis inuentis; si eius amplificationem, eam longè ante Dettonuillæi literas de Cycloide, agnitam & publici iuris factam

esse; si eius vtilitatem, maiorem certè eam esse quàm credi primo aspe-ctu possit, ad ea quæ ad hunc vsque diem irreperta latuerant, inuenienda. Huc pertinet quod Dettonuillæus de hac methodo agens pag. 4. *Historiæ Cycloideos* scribit de se ipso. *Tunc ego ipse mihi pro dimensione & centro grauitatis solidorum, superficierum tam planarum quàm curuarum, nec non linearum curuarum eas excogitaui methodos, quibus pauca admodum posse se subducere indicaui.* Quæ quidem huius Autoris verba non tantùm prædicant quanti apud ipsum momenti sit illa methodus, verùm indicant etiam ipsum sibi ascribere inuentionem illius. Sed quam certum est posse illum esse inuentorem istius methodi absque vllius alterius Geometræ auxilio, tam certum quoque est ipsum non posse nunc dici primum illius inuentorem, postquam manifestum sit decem fermè antè annis elementa tetragonismica, quibus continetur, in lucem prodiisse. Ex quo patet quàm cautè quisquis aliquid de suo inuenit promere debeat vocem illam Vatis.

Primus *ego ingredior.* ———
———. *Opus hoc de monte Sororum*
Detulit intactâ *pagina nostra* viâ.

Ergo &c. quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XVI.

QVid de methodo *indiuisibilium* quam Dettonuillæus in suo opere sequi se profitetur sentiamus, præcipiuè si cum methodo Antiquiorum comparetur.

Primò quidem nomen ipsum *Geometriæ indiuisibilium*, quod ab annis circiter viginti auditur inter Geometras, improbaui in secundâ appendice Elementorum tetragonismicorum sub finem; vbi scripsi, cur magnus ille Caualerius suam methodum debuerit appellare *Geometriam indiuisibilium* potiùs quàm *diuisibilium*, à me nesciri. Post hæc scripta gauisus sum in meam sententiam conuenisse C. V. Ismaëlem Bullialdum in libro de lineis spiralibus proposit. 42. *obiter hîc notabimus*, inquit vir ille insignis, *tam perperam ac improprio nomine indiuisibilium methodum, nouum suum artificium appellauisse Caualerium, quàm subtili ac mirabili sagacitate, profundaque mentis indagine illud inuenisse. Nulla enim quantitas est indiuisibilis. Debuerat Caualerius animaduertisse artificium eiusmodi, aliud nihil esse, quàm eiusdem mensuræ, vel eiusdem proportionis, per omnes duarum positarum magnitudinum partes, continuam similemque in infinitum applicationem. Ita vt appositè magis illam excellentissimam methodum ὁμοιοσυμμετρίαν appellauisset quàm* indiuisibilium.

Secundò si Geometria indiuisibilium ea sit in qua quidlibet assumi possit, absque vlla demonstratione, tanquam certum; ea omnibus Geometris improbanda iure meritò iudicabitur: lege (si lubet) quæ in quadragesimæ quartæ progressu scripsimus hac de re. Quod si non assumat nisi certa apud omnes, vel nisi vt *postulata*; non erit eatenus contemnenda. Præterea si in demonstrationibus quæ fiunt *per reductionem ad impossibile*

omittat tractum illum longiorem quidem; sed antiquæ Geometriæ majestate dignissimum, cuius in tertia propositione meminimus; nihil inde probri contrahet, præsertim cùm id posse fieri iam demonstratum sit à Bullialdo in opere cui titulus, *exercitatio circa demonstrationes per inscriptas & circumscriptas figuras*, & ante ipsum à Gregorio à S. Vincentio libro 2. de progressionibus Geometricis; nec non ab Andrea Tacquet in Elementis Geometriæ: curandum tamen est vt omnia rectè præparentur, sicuti annotauimus in tertia illa propositione. Denique si in modo demonstrandi admisceat illam quam, vocant Speciosam Algebram, adhibendo regulas multiplicationis, diuisionis, additionis, & subductionis, res adhuc obscurior euadet, faciléque fieri poterit vt problema solutum putetur, cùm adhuc solutionem desideret. Nisi enim purgetur ab illis solidis quaternæ dimensionis, & aliarum omnium supra trinam excurrentium, solutio problematis Geometrici non est perfecta: quapropter hoc illam nomine nolim accusare nisi ad summum obscuritatis & Arabismi non necessarij.

Tertiò si methodus indiuisibilium vocetur illa quæ, demonstrata in genere linearum, transfert ad genus superficierum; & in isto probata traducit ad solidorum supremum genus; non potest dici veritatis secura, nisi in iis quæ per methodum Antiquorum demonstrari possunt; ita in illa tunc appendice scripsimus, itáque etiam nunc censemus cum Reuerendo P. Andrea Tacquet, libro primo *Cylindricorum & annularium* prop. 12. & libro secundo propositione secunda in scholiis; vbi rectè appellat illam methodum *per heterogenea*, antiquam verò *per homogenea*. Nam illa, id quod magnitudinibus vnius generis, verbi causa, lineis competere demonstratum fuerit, transfert in magnitudines alterius generis, nempe in superficies; quod sanè consequens non est, & si quando cohærentia ista duo appareant, id propterea tantùm fit, quòd ex propriis eiusdem generis principiis idem illud consequamur. Istæ verò omnes cautiones etsi accuratè obseruentur, in confesso adhuc est apud eos etiam qui illa vtuntur, methodum Antiquiorum esse Reginam cui ista famulari teneatur: vnde Dettonuillæus in Epistola quam præmisit tractatui *de æqualitate lineæ spiralis cum parabolica*, ait se illam demonstraturum methodo Antiquorum, reiectâ illâ *indiuisibilium*, *vt res in posterum firma stet*, *& citra vllius controuersiæ motum*. Hinc verò apertè constat quam fallantur illi qui iactant solam methodum indiuisibilium esse nunc in pretio, & audent etiam scribere *nunc demonstrationes lineares sperni à summis quibusque viris*. Id enim falsum est, cùm Geometria antiqua dignitatem suam apud omnes retineat, & Algebræ etiam speciosæ ita domina sit, vt eam regat fere in omnibus. Quot enim sunt quæ ex mera Geometria passim aduocantur in subsidium ancillæ istius? Ergo &c. quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XVII.

AN quæ hodiè soluuntur problemata sint difficiliora iis quæ olim soluta sunt à Principibus Geometris. Nonnulla præterea narrantur ad historiam horum problematum pertinentia.

Huius examinis ansam præbuit nobis Autor epistolæ ad Dettonuillæum quæ præmittitur eius de Cycloide seu de *rotatrice*, vel *rotatricula* Operi, ibi enim suam de hac quæstione mentem ita explicat. *Quamuis si ingenij magnitudinem æstimes, nullus fortasse Antiquiorum superarit Archimedem; indubitatum tamen est, si difficultas problematum pendatur, hodierna longè difficiliora esse antiquis. Vt manifestum erit comparanti figuras vniusmodi, & vt ita dicam vniformes, quas Archimedes contemplatus est, cum figuris quæ hodie considerantur à Geometris, præcipuè verò si conferantur cum cycloide & eius solidis, cum scalario, & cum aliis superficiebus solidisque, quorum omnium Tu solerter detexisti proprietates; vt nulla extiterit ætas adeo apta examinandis problematum difficillimis. Cæterum nullius eorum quæ Tu vt difficilia proposueras vidimus adhuc solutionem, licet viderimus eorum quæ iam ante denuntiaras esse faciliora, nempe inuentionem centri grauitatis lineæ curuæ & dimensionem superficierum, quibus solida illa continentur, quam D. VVren misit ad nos literis datis 12. octobris, & D. de Fermat suis etiam in literis, vbi methodum pulchram admodum & generalem pro dimensione superficierum periphericarum tradit. Sed nullam prorsus vidimus solutionem difficillimorum illorum Geometriæ ænigmatum, videlicet* centri grauitatis solidorum, & semisolidorum, eorumque superficierum. *Aliis equidem potius quàm Tibi (tua enim modestia id vetat) sincerè dixerim quanta inde iudicata sit difficultas tuorum problematum, & quarum ingenij virium is qui ea soluerit.*

Hactenus ille; ego tamen primò planè assentior Gregorio à S. Vincentio qui in propositione 18. lib *de progressionibus Geometricis* ita scribit. *Sed hæc in gratiam antiquitatis dicta sint, quam venerari omnes deberent: illius enim sæculi virorum labores & ingeniorum parta hucusque non vidi à Recentioribus adæquata* Hæret enim menti memoria auiculæ illius quæ. vt sapienter fingitur, dorso æquilæ incumbens defertur ad nubes vsque, inde verò nisu proprio vehementem se alitem superuolitat, quasi primas sublimis volatûs partes illi præreptura: sed merito pensandum est, num tanto superuolet, quanto ab ima terra fuit euecta.

Secundò fateor non pauca hac ætate reperta esse quæ Archimedis æuo ignota fuerunt, vel non ita elucidata. In hoc numero pono Algebram speciosam quam magni facio, ipsamque etiam, si placet, Geometriam *indiuisibilium*; dummodo ambæ stipendia mereantur sub Antiqua, solidaque Geometria, & illam ab Arabismo quodam inextricabili purissimam seruent. Sed quod mihi ad inuentionem multò potentiùs videtur, est libra instaurata: negari enim non potest quin illius vsus hoc nostro sæculo instauratus, & non parum amplificatus fuerit; quod vtique luculentiùs patebit, si inde prodeat quadratura illa circuli & hyperbolæ, quam diu parturit

parturit mens nostra, nec dum tamen aut parit, aut partam euulgat.

Tertiò non nego quin Cycloideos cogitatio pertineat tota ad præsens nostrum sæculum, & quin proposita circa illam problemata sint mirum in modum difficilia, etiam si tententur ab eo qui principiis libræ non vulgaribus sit instructus: sed an tanto interuallo nunc superes communem Geometrarum industriam promendo eorum solutionem, quanto Archimedes superauit suæ ætatis captum Geometricum, iure merito dubitetur: vt enim illa problemata fuerunt à Dettonuillæo totius Europæ Geometris summis proposita; statim ego qui longè absum ab eorum ordine, primum huius operis librum inueni, & intra præscriptos tres menses reliquorum omnium solutionem excogitaui. Quod autem exigui homo ingenij tam citò repererit, quis dicat in tanta Geometrarum nostræ ætatis luce abstrusum & reconditum, quam quod maximè?

Quartò postea quam primum librum in lucem dedimus, misimusque Romam, Parisios, Lugdunum &c. Anonymus, cùm sine discrimine omnia problemata proposuisset *præstantissimis toto orbe Geometris*, nec distinxisset quæ à Tyronibus, quæ à Magistris illis & summè doctis Viris exigeret, mussitauit tamen per suos, istud quod nos primi dederamus carêre difficultate: postquam verò fluxit tempus quod soluendis quæstionibus suis præscripserat, tresque alij insuper menses, in prima Dettonuillani libri fronte, hoc est, in epistola illa cuius fragmentum iam relatum est, exaratum conspeximus, *non fore necessarium vt Dettonuillæus fusius exponat problemata illa quæ tanquam facilia proposuisset, sed quæ vt difficilia, hoc est centra grauitatis solidorum & semisolidorum Cycloideos, eiusque partium tam circa axem quàm circa basim, quibus ipse in primis literis præmium pecuniarium annexum esse voluisset.* At vbinam, & quando tanquam facilia illa proposuit? & cur de facilibus atque obuiis interrogauit *præstantissimos toto orbe Geometras?* nempe illa omnia facilia illi fuerunt, vbi dubitare non potuit quin à nobis, qui magni Geometræ profectò non sumus, inuenta essent.

Quintò idem ille Autor (vt sub calcem quarti libri monuimus) initio huius anni quatuor primas pagellas suæ ad D. de Carcaui epistolæ adhuc è prælo madidas seorsum misit, monens reliquorum editione prælum distineri. Ibi cùm legissemus omnium casuum calculum primo quoque die ex Typographi officina proditurum, vnius verò numeros interim exhiberi, prompsimus ex tempore nostros casuum omnium calculos, & typis cusos ad Geometras insignes misimus Parisios, Romam, Lugdunum & ad alias Europæ Vrbes primarias: miramur verò etiam nunc calculos illos ex illa officina tunc non prodiisse, cum integer liber inde emissus est. Nec satisfecit Dettonuillæus in tractatu generali *rotatricis* vel *rotatriculæ* (quam nos cycloidem magnam hactenus appellauimus) dum, vbi visus sibi ipse est tradidisse methodum soluendi problemata à se anno superiore proposita, tractatum clausit his verbis. *Facile erit toti orbi per methodum iam traditam inuenire calculum omnium casuum.* Ego certè id facile non reperi vn-

quam ex quo ille liber venit in manus meas, quod totum adscribi mearum ingenij virium imbecillitati velim: & hanc esse causam cur ab illius laude cumulata abstineam. Hoc certò affirmo, magnam lucem ex illo calculo, si omissus non fuisset, deriuandam fuisse in ipsam Autoris memoriam; plurimumque dolere me subreptam mihi facultatem eius comparandi mei calculi pro singulis casibus cum Dettonuillano; id enim sine vllo dubio præstitissem in reliquis, sicuti in vno illo quem dedit, iam ab huius anni initio præstiti.

Sextò tacere non debeo Antimum Farbium; euulgato nostro calculo, suum de Cycloide Opusculum edidisse Romæ; quod è prælo recens R.P. Bauguillius quarto mensis Martij anni labentis 1659. ad nos beneuolè misit, redditúmque fuit vno post mense, nempe tertio Aprilis. Suspexi subtilitatem ingenij illius eximam, ægreque tuli non licuisse illi impendere se inquisitioni centrorum grauitatis pro solidis omnibus & semisolidis: ex animo autem complexus sum & veneratus singularem illam Viri humanitatem, qua & viginti nostras propositiones superiore anno Romam missas, & calculum initio præsentis postea transmissum legere non solùm non contempsit, sed iam lecta sibi etiam mirificè probari testatus perurbanè sæpiusque est nostro Bauguillio.

Decimò ne actum agam, plura ad hanc historiam attinentia si te iuuant, vide scholia apposita sub finem primi libri; decimæ propositionis libri secundi; vltimæ propositionis libri tertij & quarti; vigesimæ tertiæ libri quinti; & quæ in duodecima præsentis scripsimus.

DEFINITIONES.

SIt (*Fig. 70.*) circulus, b e d f cuius diametri b d, e f secent se ad normam in centro c; in axe d b producto sumptum sit quoduis punctū a, & per a ducta sit a h parallela axi e f. Circa axem a h manentem intelligatur moueri planum h a d in quo est peripheria circuli b e d f; superficies quam peripheria b e d f motu suo describit vocatur à nobis *corona annularis*, vel *annulus*. Si loco circuli b e d f ponatur ellipsis, gignetur corona elliptica, si parabolæ segmentum sint e b f, e d f, appellanda erit *parabolica*; si segmenta sint hyperbolica, vel cuiuscunque alterius figuræ, inde nomen aduocandum illi erit; methodus enim huius quadraturæ est generalis, vt patebit. *Semicoronam interiorem* voco eam quæ describitur motu figuræ e b f c; *exteriorem* verò, quæ gignitur motu figuræ e d f. Posuimus autem rectam a h nec secare nec tangere figuram e b d f, ad hoc vt corona *internè aperta* gignatur: nam si tangat illam, fiet corona sine foramine, quam *clausam* appellamus. Quod verò circuli vel annuli nomen magnam habeant in significando affinitatem liquet ex eo quod ad illam allu-

dendo Poëta scripserit, *Maiore quisquam circulo coronetur*. Cæterum hæc corona si rectè attendatur nihil est aliud, quam differentia duorum peripheticorum circa manentem rectam a h descriptorum motu figurarum [illegible] d f X, h c b f X, quarum latera h e, X f æquidistant rectæ b d, & constituunt parallelogrammum h e f X; peripheticorum illud vocetur *maius*; istud *minus*. Itaque cùm ex methodo tradita in tertio huius Operis libro obtineamus calculos singulorum peripheticorum; indidem constabit eorum differentia, quam nominamus *coronam*.

PROPOSITIO XVIII.

PONO (*Fig.* 70.) r d s esse superiorem partem semicycloideos paruæ, cuius basis r c, axis c d, & illi ad partes oppositas super eadem basi respondere alteram superiorem partem semicycloideos paruæ r b s, cuius axis b c erit æqualis axi c d. Pono præterea rectam a c habere rationem numeri ad numerum, & rectam a c non esse minorem ipsa b c. Ex puncto c excitata sit c l perpendicularis ad planum e c d, æqualis ipsi c d.

Ostendendum est coronam integram esse æqualem cylindraceo altitudinis c l, baseos æquantis tot octonarios circulorum descriptorum diametro b d, quot vnitates continet numerus respondens rectæ a c. Ita vt si ex recta b c auferantur b o, o p, p q, q a, & ita deinceps in infinitum, corona clausa, nempe quando a congruit puncto b, æquet cylindraceum altitudinis c l, baseos æquantis vnum octonarium circulorum; si a congruat puncto o, duos octonarios; si puncto p, tres; si puncto q, quatuor, & ita consequenter secundum progressionem arithmeticam.

Per b, d, o, p agantur b i, d x, o u, p z parallelæ ad rectam a h vel c r; ponatur circa rectam b i generari corona clausa motu figuræ d r b s. Libræ planæ axe c r sustentaculo b i æquiponderans cycloidi paruæ r d s est quadrans circuli genitoris b c d f per primi libri decimam sextam; ergo per decimam secundi tetragonismicorum si axis c r mutetur in b i, & sustentaculum b i in o u, æquiponderans eidem suspenso erit ipsum suspensum semel sumptum, sed auctum æquiponderante prioris suspensionis. Ratio verò cur semel sumatur est quia recessûs b c interuallum æquat longitudinem brachij b o, quapropter cum recessus erit c o, sumetur bis; cum c p, ter; cum c q, quater &c. semper verò augebitur æquiponderante primæ suspensionis. Similiter semicycloidi paruæ r b s axe r s, sustentaculo d x, æquiponderans est quadrans circuli genitoris; ergo per nonam secundi tetragonismicorum, si axis c s mutetur in b i, & sustentaculum d x in o u, æquiponderans semicycloidi paruæ r b s erit ipsa semicycloi-

des r b s semel sumpta, sed imminuta parte æquiponderante; perpendiculo autem o u erit eadem r b s bis sumpta, detracto æquiponderante eodem; perpendiculo autem p z, ter sumpta, dempto eodem &c. ipsa verò semicycloides æquat bis quadratum b c per duodecimam primi huius.

Rursus completis parallelogrammis b c r i, b c s t, i t m u, r m n z, quoniam axe i t, sustentaculo u m, æquiponderans parallelogrammo r s t i est dimidium ipsius parallelogrammi; ipsum verò dimidium æquat, per tertiam libri primi, dimidium circuli genitoris; æquiponderans toti figuræ i r d s t erit tres quadrantes circuli genitoris aucti duobus quadratis semidiametri b c; vel si progressionis perspectæ ponatur primus terminus quadratum b c; secundus verò termius sit b e d f circulus, æquiponderans istud erit tres quadrantes secundi termini perspectæ progressionis, & insuper bis primus terminus. Æquiponderans autem figuræ i r b s t erit tres quadrantes secundi termini, deducto bis primo.

Ad rectam c l æqualem radio c d recta c y sit vt circulus ad quadratum suæ diametri, vel, sicut initio tertij libri ostendimus, vt quadrans secundi termini perspectæ progressionis ad primum terminum. Igitur per methodum decimæ octauæ primi libri, periphericum maius est cylindraccum altitudinis c y, baseos æquantis octuplum eius quod æquiponderat figuræ i r d s t, axe i t, sustentaculo u m: periphericum verò minus est cylindraccum altitudinis eiusdem c y, baseos æquantis octuplum æquiponderantis figuræ i r b s t, iisdem positis. Quoniam igitur corona est differentia periphericorum, si ex basi cylindracei maioris auferatur basis cylindracei minoris, residua fiet basis cylindracei æquantis coronam, & præditi eadem altitudine c y. Leges porrò subductionis postulant vt quoniam in basi minoris cylindracei sunt quadrantes addititij tres secundi termini, & in basi maioris totidem etiam addititij, se se elidant & nihil remaneat ex æquiponderante primæ suspensionis factæ axe r s; quod, vt patet, est generalissimum, quæcunque sit figura r d s b, modo parallelæ ad rectam b d, secentur bifariam occursu rectæ r s, ac proinde sint ordinatim applicatæ ad ipsam r s. Quia verò basis cylindracei minoris habet duplum primi termini sed ablatiuum, basis autem maioris habet illud ipsum sed addititium, patet ex subductionis Algebricæ præscripto, relinqui quatuor primos terminos addititios, hoc est, suspensum b r d s, quod æquale per primi duodecimam est quadruplo quadrati b c, hoc est, quadruplo primi termini. Igitur cùm si ex æquiponderante totius i r d s t auferatur æquiponderans partis i r b s t relinquatur æquiponderans alterius partis r d s b; patet compendiosiùs (quæcunque sit figura r b s d, habens proprietatem suprà dictam) obtineri basim cylindracei æquantis coronam, si inueniatur æquiponderans figuræ r d s b; quæ cùm habeat grauitatis centrum in recta r s, æquiponderans illius, axe b i, erit semel suspensum; axe o u, bis; axe z p ter &c. octuplum autem istius æquiponderantis erit basis quæsita.

Habemus ergo ex iſta libræ noſtræ methodo coronam genitam figura qualibet r d ſ t, eſſe æqualem cylindraceo altitudinis c y, baſeos quæ ad octuplum figura r d ſ b ſuſpenſæ ſit vt c o diſtantia axis cuiuſlibet u o, ad v p diſtantiam axis & ſuſtentaculi, quæ in iſtis omnibus ponitur eſſe æqualis dimidio rectæ b d. Quoniam igitur in cauſa præſenti figura r b ſ d eſt quadrupla quadrati b c, vel eſt quater primus terminus, patet coronam clauſam genitam reuolutione figuræ b r d s eſſe æqualem cylindraceo altitudinis c y, baſeos æquantis triginta duos primos terminos; genitam deinde circa o u & apertam vtrinque interuallo rectæ o b, bis triginta duos; genitam deinde circa p z & apertam vtrinque interuallo rectæ p b, ter triginta duos; & ſic deinceps.

Denique quoniam vt eſt l c recta ad c y, hoc eſt, vt primus terminus progreſſionis perſpectæ ad quadrantem ſecundi, ita ſunt triginta duo primi termini ad octo ſecundos patet ex reciprocationis lege cylindraceum altitudinis c l vel c d, baſeos æquantis octo ſecundos terminos, vel circulos genitores, eſſe æquale cylindraceo altitudinis c y, baſeos æquantis triginta duo primos terminos: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Propoſitionis methodum eſſe generaliſſimam patet; concordiam autem eſſe omnimodam cum demonſtratis à R. P. Andrea Tacquet, examinatori cuilibet planum erit. Vnde confirmatur principiorum libræ veritas, eorúmque compendioſa methodus admirationem perito cuique Geometræ non vulgarem facit.

COROLLARIVM II.

Si b e d f ſit circulus, coronæ clauſæ æquale erit cylindraceum altitudinis c y, baſeos æquantis ipſum circulum ſiue ſecundum progreſſionis perſpectæ terminum octies ſumptum; ergo per reciprocationis leges iſta corona clauſa erit æqualis cylindraceo altitudinis c l, baſeos æquantis octo quadrantes tertij termini, ſiue duos terminos tertios perſpectæ progreſſionis: & ſi gignatur circa manentem o u, bis duos illos terminos; ſi circa p z, ter; &c.

PROPOSITIO XIX.

Iiſdem manentibus pro parua cycloide (*Fig. 70.*) periphericum maius genitum motu figuræ i r d ſ t circa manentem b i, intelligatur diuiſum bifariam à plano incedente per rectam b t, & parallelo ad planum l c r; in præſens verò conſideretur pars illa quæ ad partes d iacet, & eſto A grauitatis centrum partis illius; quod, vt patet, iacebit in recta b d. Intelligatur præterea progreſſio perſpecta cuius primus terminus ſit, vt ſuprà, quadratum b c, ſecundus, circulus b e d *t*.

Oſtendendum eſt, vt tres decimæ ſextæ partes tertij termini perſpectæ progreſſionis, auctæ dimidio ſecundi, ſunt ad vndecim nouenas primi, auctas ſecundi quinq; vnciis, ita eſſe rectã b c vel b o, ad h A.

Quoniam ex decima nona tertij libri axe b i, perpendiculo plano per b i ducto, æquidiſtanter plano l c r, ſuſtentaculo m u, æquiponderans portioni peripherici, quæ ſuper baſi i r d b & infra ipſam inſiſtit eſt cylindraceum altitudinis c l, baſeos æquantis quatuor nouenas quadrati c d; æquiponderans ſoli portioni quæ inſiſtit ſuper baſi i r d b erit cylindraceum eiuſdem altitudinis, baſeos æquantis duas nouenas quadrati b c: ergo ex ſexta eiuſdem libri, æquiponderans dicylindraceo, cuius ſectio ſit quadratum habens pro latere ordinatim applicatam ad baſim c r, eſt tres ſemiſſes prioris æquiponderantis; ac proinde eſt cylindraceum eiuſdem altitudinis, baſeos æquantis tres nouenas, vel trientem quadrati c d. Igitur ex corollario quarto octauæ libri eiuſdem, duplum huius baſeos, nempe bes quadrati c d, eſt ad poſitionem rectæ b c quartus gradus, quorum primus eſt parallelogrammum dimetientis b c, ſecundus figura c d r. Præterea ſi in alia ſerie primus gradus ponatur parallelogrammum dimetientis b c; ſecundus verò componatur ex primo & ex figura c d r, ex corollariis poſtremis decimæ tertiæ tertij libri liquet tertium gradum huius ſecundæ ſeriei eſſe primum, auctum bis ſecundo primæ ſeriei, & ſemel tertio eiuſdem & ſeriei: quartum verò ſecundæ ſeriei eſſe primum, auctum ter ſecundo primæ, ter tertio primæ, & ſemel quarto eiuſdem primæ.

Rurſus primæ ſeriei primus terminus, eſt rectangulum i b c r, ſiue dimidium circuli b e d f; ſecundus i r d b eſt æqualis quadrato c d ratione portionis r d c, ex duodecima primi; & dimidio circuli b e d, ratione parallelogrammi i b c r; tertius eſt æqualis quadranti circuli b e d f, nempe duplo æquiponderantis reperti in decima ſexta primi; quartus denique eſt bes quadrati b c. Igitur in ſecunda ſerie quartus gradus eſt vndecim trientes primi termini progreſſionis perſpectæ, quam in ſuperiore aſſumpſimus, & ſimul quinque quadrantes ſecundi termini. Ergò axe i t, ſuſtentaculo u m, perpendiculo plano per t i ducto æquidiſtanter plano l c r, æquiponderans dicylindraceo genito ex figura i r d b t ad poſitionem plani l d c genito, eſt per corollarium quartum octauæ tertij libri, æquale cylindraceo altitudinis b c, baſeos ęquantis dimidium iſtius quarti gradûs, nempe baſeos æquantis vndecim ſextantes primi termini, auctos quinque octauis ſecundi progreſſionis perſpectæ. Ergo per ſextam eiuſdem tertij, cylindraceum altitudinis b c, vel c l, baſeos æquantis beſſem baſeos poſtremò conſignatæ, eſt æquale ſpatio quod iiſdem manentibus æquiponderat peripherici parti ſuper baſi i r d b inſiſtenti; eiuſmodi autem bes eſt vndecim nouenæ primi termini, auctæ quinque vnciis ſecundi perſpectæ progreſſionis.

Præterea per methodum traditam habemus tertium gradum in ſecunda ſerie eſſe primum primæ ſeriei auctum bis ſecundo & ſemel tertio eiuſdem ſeriei: ergo tertius in ſecunda ſerie gradus eſt tres quadrantes ſecundi termini, aucti duplo primi: igitur figuræ i r d b iiſdem poſitis æquiponderat dimidium eiuſdem ſpatij; ergo ex methodo decimæ nonæ primi libri, portio peripherici inſiſtens ſuper baſi i r d b eſt æqualis cylindraceo altitudinis c y, baſeos æquantis duplum æquiponderantis vltimò collecti. Igitur dicylindraceum iſtud eſt æquale cylindraceo altitudinis c y, baſeos æquantis tres quadrantes ſecundi termini auctos duplo primi; & cùm ex demonſtratis initio vigeſimæ quintæ libri tertij recta l c ad c y ſit vt ſecundus terminus perſpectæ ad primi quadrantem, per reciprocationis legem eſt æquale cylindraceo altitudinis c l, baſeos æquantis tres decimas ſextas tertij termini, auctas dimidio ſecundi. Suſpenſum igitur ad æquiponderans eſt, vt baſis cylindracei iſtius ad baſim cylindracei illius, quod oſtendimus eſſe eiuſdem altitudinis c l, & æquale ſpatio æquiponderanti.

Quoniam igitur vt ſuſpenſum ad ſuum æquiponderans, ita ex lege libræ eſt brachium o b ad b A; patet o b ad b A eſſe vt ſunt tres decimæ ſextæ partes tertij termini auctæ dimidio ſecundi, ad quinque vncias ſecundi auctas vndecim nouenis primi: ſed quod accidit in ſuſpenſo aſſumpto, nempe in quadrante totius ſuſpenſi propoſiti, contingit quoque in quatuor quadrantibus ſiue in toto, vt patet: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

COmpleatur iiſdem manentibus pro circulo (*Fig.* 70.) parallelogrammum e f H D, & intelligatur circa D H manentem circumuolui figura D e d f H, gignique periphericum, cuius dimidium vt in ſuperiore contemplamur: planum per A ductum æquidiſtanter plano l c r, tranſeat per grauitatis centrum dimidij illius peripherici.

Oſtendendum eſt rectam o b vel b c ad b A eſſe, vt decima ſexta pars tertij termini progreſſionis perſpectæ ſupra expoſitæ, aucta quinque ſemunciis ſecundi termini, eſt ad primum, auctum quinque decimis ſextis ſecundi.

Iſtud oſtenditur methodo eadem, qua ſuperiorinam figuræ D e d b libræ planæ axe b D, ſuſtentaculo o ii æquiponderant quinque vnciæ primi termini, & inſuper ſemiquadrans ſecundi: ergo cylindraceum altitudinis c y, baſeos duplæ, nempe æquantis quinque ſextantes primi, auctos quadrante ſecundi, æquat dicylindraceum genitum ex figura D e b d ad poſitionem plani l c d: ergo peripherici portio quæ inſiſtit ſuper baſi D e d b eſt cylindraceum altitudinis c y, baſeos eiuſdem; vel per reciprocationis le-

ges, altitudinis c l, vel c d, baseos æquantis decimam sextam partem tertij termini, auctam quinque semunciis secundi.

Rursus in prima serie primus terminus est æqualis quadrato b c e D; ac proinde est æqualis primo progressionis perspectæ termino; secundus est c d c, nempe quadrans secundi termini progressionis eiusdem; tertius ex secunda quarti tetragonismicorum est bes primi; quartus ex corollario vigesimæ octauæ quarti libri præsentis Operis est tres vigesimæ quartæ partes secundi; igitur quartus gradus in secunda serie mixta, erit ter primus, auctus quindecim decimis sextis secundi. Quoniam igitur quarti dimidium est tres semisses termini primi progressionis perspectæ, aucti quindecim trigesimis secundis secundi: huius verò dimidij bes est primus auctus quinque decimis sextis secundi, patet id in quadrante suspensi propositi verum esse quod probandum suscepimus: ergo id pariter verum est in toto, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI.

Iisdem manentibus pro cycloide parua (*Fig.* 70.) circa axem it manentem intelligatur circumuolui figura i r b s t, & gigni periphericum, cuius dimidium ad partes d iacens contemplamur in præsens; esto A grauitatis centrum eiusdem.

Ostendendum est rectam o b vel b c esse ad b A, vt tres decimæ sextæ partes tertij termini progressionis eiusdem perspectæ, deducto dimidio secundi, sunt ad quinque secundi vncias, subductis vndecim nouenis primi.

Istud ostenditur eodem pacto quo decima nona superior, posita semel doctrina quam in corollariis decimæ tertiæ tertij libri tradidimus; quia enim in secunda serie primus gradus ponitur parallelogrammum i b c r, secundus verò figura figura i r b, hoc est † primus terminus primæ seriei – secundus eiusdem seriei; tertius in secunda serie erit † primus primæ seriei – bis secundus eiusdem primæ † tertius semel: quartus verò † primus – ter secundus † ter tertius – semel quartus eiusdem primæ seriei. Igitur cùm in decima nona superiore ostenderimus hos gradus primæ seriei, methodúmq; eos transferendi in calculum præsentem, si quis illi insistens supputet casum propositum, inueniet suspensum esse cylindraceum altitudinis c l, vel b c, baseos æquantis tres decimas sextas partes tertij termini progressionis suprà constitutæ, deducto dimidio secundi: æquiponderans autem esse cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis quinque vncias secundi, subductis vndecim nouenis primi: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII.

Iisdem manentibus pro circulo (*Fig.* 70.) circa axem D H manentem intelligatur circumuolui figura D c b f H, & gigni periphericum,

phericum, cuius dimidium ad partes d iacens contemplamur in præsens: esto A grauitatis centrum eiusdem.

Ostendendum est rectam o b vel b c esse ad b A, vt quinque semunciæ secundi termini, imminutæ parte decima sexta tertij termini progressionis perspectæ sunt ad primum imminutum quinque decimis sextis secundi.

Præsens propositio eodem prorsus pacto ostenditur, positâ semel vigesimâ, quo superior est demonstrata ex decima nona; itaque ne longum sit referre superuacanea; missa ea facimus, & vsitata clausula inferimus id esse demonstratum, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIII.

Iisdem manentibus pro cycloide parua (*Fig.* 70.) intelligatur duci planum per t i æquidistanter plano l c r, & per illud diuidi corona cycloidica in duas partes, quarum quæ ad partes d spectat, habeat centrum grauitatis in puncto A; eiusmodi enim centrum patet esse in recta b d.

Ostendendum est rectam b o vel b c ad b A esse, vt terminus secundus progressionis eiusdem perspectæ est ad viginti duas nouenas primi.

Quoniam ex methodo decimæ octauæ hæc corona est periphericum maius subducto minore, coronæ dimidio illi æquiponderans erit ipsum maioris æquiponderans deducto æquiponderante minoris. Rursus quoniam in propositionibus proximè antecedentibus, secundus terminus proportionalis est basis æquiponderantis parti quartæ totius suspensi peripherici, ille terminus quater sumptus dabit basim cylindracei altitudine c l præditi, & æquantis spatium æquiponderans toti suspenso peripherico. Cùm igitur pro cycloide propositio decima nona det vndecim nouenas primi termini auctas quinque vnciis secundi, & propositio vigesima prima det illas easdem quinque vncias secundi imminutas illis iisdem vndecim nouenis primi; & cùm ex decimæ nonæ basi debeat auferri vigesimæ primæ basis, residua fiet basis æquans viginti duas nouenas primi termini, cuius quadruplum erit basis quæsita nempe octoginta octo nouenæ primi termini. Cùm igitur, per decimam octauam, coronæ dimidium quod contemplamur sit æquale cylindraceo altitudinis c l vel c d, baseos æquantis quater secundum terminum, vel viginti quatuor sextantes termini secundi; & cùm suspensum ad æquiponderans sit vt basis ista ad basim illam; vt autem suspensum ad æquiponderans, ita sit brachium b o ad b A, patet rectam b o vel b c ad b A esse vt quadruplum secundi termini ad octoginta octo nouenas primi: vel vt est terminus secundus ad viginti duas nouenas primi; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Notandum est in quocunque cuiuslibet figuræ casu partes desumptas ex propositionibus 19. & 21. quæ addititiâ notâ præditæ sunt per subtractionem se se consumere; nec residuum fieri nisi duplum alterius partis addititium.

PROPOSITIO XXIV.

Iisdem manentibus (*Fig.* 70.) pro circulo intelligatur planum per ti duci vt suprà, & diuidere coronam ex circulo genitam in duas partes, quarum quæ ad d spectat, consideretur in hac propositione: punctum A sit grauitatis centrum partis eiusmodi.

Ostendendum est rectam o b vel b c ad b A esse vt est tertius terminus perspectæ progressionis ad quatuor terminos primos.

Methodus superioris propositionis inseruit demonstrationi præsentis. Si igitur ex basi reperta in vigesimâ pro æquiponderante maioris peripherici auferatur basis vigesimæ secundæ pro æquiponderante peripherici minoris, relinquitur duplum primi termini progressionis perspectæ; quadruplum huius residui sunt quatuor termini primi. Sed ex corollario decimæ octauæ tota corona habet pro basi duos tertios terminos; ergo dimidio coronæ tribui debet vnus tertius terminus: vt igitur vnus tertius terminus ad quatuor terminos primos, ita est recta b c ad b A, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXV.

Iisdem manentibus (*Fig.* 70.) superficies coronæ genitæ ex superiore parte cycloideos magnæ est æqualis spatio quod ad sexdecim circulos genitores sit vt diameter quadrati ad latus eiusdem.

Recta r s ponatur basis superioris partis cycloideos magnæ r d s, & in ea sumptum sit quoduis punctum V, per quod ducta sit P T complens parallelogrammum P b d T, occurrens limbis b r, d r in R, S. Patet ordinatim applicatas V R, V S esse æquales; æquales igitur sunt P R, S T, ac proinde duæ simul P R, P S æquant totam P T, vel b d. Cùm igitur P S sit semidiameter sectionis peripherici maioris factæ per planum parallelum plano l c d incedens per rectam P T; P R verò sit semidiameter sectionis factæ in peripherico minore, patet duorum istorum circulorum peripherias simul esse æquales peripheriæ circuli semidiametro P T descripti. Ergo superficies coronæ non tantum cycloidicæ, sed cuiuslibet alterius nominis, est ad parallelogrammum mixtum altitudinis b d insistens super curuâ r d s, vt peripheria circuli ad semidiametrum.

Quoniam igitur curua r S d in superiore parte cycloideos magnæ est per trigesimam sextam superioris libri, æqualis rectæ, quæ media sit inter c d & octuplam ipsius c d; tota linea r d s erit media inter c d & rectam quæ ad ipsam c d sit longitudine vt 32. ad 1. vel quæ ad quadruplam

rectæ c d sit, vt diameter quadrati ad eiusdem latus. Rectangulum igitur sub b d & sub curua r d s, (hoc est parallelogrammum mixtum) est æquale rectangulo sub c d & sub recta quæ ad octuplam rectæ c d sit, vt diameter quadrati ad latus eiusdem.

Quoniam igitur hoc spatium est ad superficiem periphericam vt semidiameter circuli ad peripheriam eiusdem, vel vt primus terminus adiunctę ad bis secundum, patet periphericam superficiem huius coronę esse æqualem spatio quod ad sexdecim circulos genitores sit vt diameter quadrati ad latus eiusdem, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Cùm in antecedentibus supputauerim coronam genitam ex paruæ cycloideos parte superiore, hîc magnæ partem superiorem computare coactus fui, nempe quia parallelogrammum mixtum in parua cognitum non habeo, sicuti in magnâ ; neque qui me id doceat adhuc inueni vllum.

PROPOSITIO XXVI.

Iisdem vt in proximè superiore, pro circulo manentibus (*Fig.* 70.) superficies coronæ circularis est æqualis quadruplo termini tertij progressionis perspectæ.

Per superioris methodum, inueniri debet parallelogrammum mixtum, cuius basis sit e d f altitudo b d ; illud verò ex tertia primi libri est bis circulus e d f b, siue bis terminus secundus progressionis perspectæ. Secundò ex eadem methodo vt est primus terminus adiunctæ progressionis ad bis secundum, ita est parallelogrammum mixtum ad superficiem quæsitam ; ergo cùm parallelogrammum mixtum æquet duos terminos progressionis perspectæ, & perspectæ ratio sit eadem cum ratione adiunctæ, patet superficiem illam coronalem æquare quatuor terminos tertios progressionis perspectæ, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam in priore propositione ostendimus si superficies coronalis secetur quocunque plano ad planum l c d parallelo, sectionem esse æqualem peripheriæ circuli semidiametro b d descripti ; liquet eiusmodi superficiei centrum grauitatis ad positionem plani l c d iacêre in plano ducto per centrum grauitatis parallelogrammi mixti. Est enim hæc superficies, quod ad istud pertinet, simillima superficiei parallelogrammi mixti intercepti inter eadem plana ad positionem eandem intercipientia portionem superficiei illius, cuius centrum grauitatis quæritur.

PROPOSITIO XXVII.

Reuocetur (*Fig.* 65.) schema propositionis quinquagesimæ septimæ libri prioris, & in eo punctum g bifariam secet rectam a b, ita vt g congruat centro e, & figura d a g sit semicycloideos magnæ pars superior. Intelligatur circa axem c b manentem circumuo-

lui figura t d a b, & superficiei quam describit curua d a consideretur ea portio quam ad partes a relinquit planum T b c: Ponatur autem similis & æqualis superficies ad rectæ a b partes z, vt eius centrum grauitatis iaceat in recta a b.

Ostendendum est, si ex b a abscindatur b E, quæ contineat octoginta sex centesimas partes rectæ ad quam radius b a sit sicut quadrãs peripheriæ circularis ad suum radium, punctum E esse grauitatis centrum superficiei illius compositæ.

Libræ planæ axe g h, sustentaculo b z, patet ex methodo quinquagesimæ septimæ suprà laudatæ æquiponderans figuræ parabolicæ a g h esse duas quintas partes ipsius, quæ cùm sit bes rectanguli a g h, eiusmodi æquiponderans erit quatuor decimæ quintæ partes rectanguli a g h. Ergo si b u secetur bifariam in μ, per recessum axe t b, sustentaculo μ G, parallelo ad axem b t, æquiponderans eidem figuræ parabolicæ erit quatuor decimæ quintæ partes rectanguli a g h, auctæ suspensi siue rectanguli eiusdem besse, hoc est, erit quatuordecim decimæ quintæ rectanguli a g h. Rursus rectangulo b g h r, iisdem positis, æquiponderat dimidium ipsius, cùm b μ, b g rectæ ponantur æquales: ergo toti figuræ b a h r axe br, sustentaculo u l æquiponderat dimidium illius æquiponderantis ex octaua secundi tetragonismicorum: primo igitur gradu posito parallelogrammo t H u b ad positionem rectæ u b; secundo, figurâ b a h r; tertius æqualis erit duplo æquiponderantis aptati sustentaculo u l; ac proinde erit ipsum æquiponderans aptatum sustentaculo μ G, videlicet octoginta sex sexagesimæ rectanguli a e h. Præterea quoniam figura a b r h, ratione partis a g h continet bessem rectanguli a g h, vel g b r h; addita altera parte g b r h, tota figura a b r h continet quinque trientes rectanguli a g h, vel centum sexagesimas partes illius rectanguli.

Quoniam igitur ex methodo illius quinquagesimæ septimæ, figura a b r h est certo quodam modo ibi præscripto æqualis portioni cuneatæ superficiei insistenti super arcu d a; & æquiponderans illi ita insistenti est idem cum tertio gradu suprà relato; insistens figura ad æquiponderans axe b t, sustentaculo u l erit vt centum sexagesimæ partes rectanguli a g h, ad octoginta sex easdem partes; erit ergo vt 100. ad 86. Per methodum igitur eiusdem propositionis si recta b E contineat octoginta sex centesimas partes rectæ, quæ ad b a sit vt radius ad quadrantem peripheriæ circularis eodem radio descriptæ, erit E grauitatis centrum peripheriæ propositæ, prout erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam adiunctæ progressionis secundus terminus est, ex definitionibus traditis initio tertij libri, dimidium totius peripheriæ circularis, quadrans totius peripheriæ erit dimidium secundi termini adiunctæ, & primus erit radius b a: ergo cùm vt secundus adiunctæ ad primum, ita

sit primus ad secundum subadiunctæ, patet rectam ad quam radius b a sit vt dimidium secundi adiunctæ ad primum, esse duplam secundi termini subadiunctæ, posito primo b a; ergo b E est 172. centesimæ partes secundi termini subadiunctæ.

PROPOSITIO XXVIII.

Iisdem manentibus (*Fig. 65.*) recta r d producta occurrat tangenti a o in λ; circa axem a o manentem figura a d λ comprehensa arcu d a, & rectis a λ, d λ, intelligatur volui, & describere superficiem cuius dimidium hîc spectamus, illud scilicet quod planum per a λ ductum æquidistanter plano T b c, relinquit ad partes b. Intelligatur altera superficies similis, æqualis & similiter posita ad axis b a partes z, vt grauitatis centrum superficiei compositæ sit in recta a b.

Ostendendum est, si ex recta a b resecetur a θ æqualis sexaginta centesimis partibus secundi termini subadiunctæ, punctum θ esse grauitatis centrum superficiei periphericæ.

Figuram a h n esse æqualem vngulari superficiei quam planum per a o ductum abscindit ex cylindracea superficie quam lineæ d s æquidistans descripsit incedendo per limbum d a, patet ex corollario primo decimæ octauæ quinti libri, vbi ostendimus duas cuneatas subcontrarias esse simul æquales parallelogrammo mixto: ergo cùm parallelogrammo mixto æquale sit expansum a b r n, & cuneatarum vni æqualis sit expansa a h r b; alteri cuneatæ æqualis erit expansa a g h n. Ex methodo autem quinquagesimæ septimæ libri superioris liquet si ex b a abscindatur a Q ipsi æqualis, & agatur Q S æquidistans rectæ a n, bis æquiponderans figuræ a h n vt iacet manenti, axe a n, sustentaculo Q S, esse æquale spatio quod cuneatæ isti figuræ æquiponderat iisdem positis. Cùm igitur h a n sit triens rectanguli a g h, vt ex quadratura parabolæ liquet, cuneata superficies erit æqualis trienti rectanguli a g h. Rursus quoniam ad positionem rectæ a b si primus gradus ponatur rectangulum a g h, & secundus triangulum rectilineum a h n, tertius est figura parabolica a h n, vt patet ex libri prioris quadragesimæ primæ propositionis methodo; ex quadragesima quarta eiusdem libri quintus gradus erit æqualis quintæ parti rectanguli a g h, & dimidium quinti gradûs æquiponderabit tertio, axe a n, sustentaculo ducto per dimidium rectæ a Q: ergo dimidium huius dimidij æquiponderabit eidem tertio, sustentaculo Q S; ergo dimidium quinti gradûs, siue decima pars rectanguli a g h æquiponderat cuneatæ figuræ. Igitur suspensa figura ad æquiponderans spatium est vt triens ad decimam partem, vel vt 100. ad 30. & si vt 100. ad 30. ita dupla secundi termini subadiunctæ de quo agit corollarium superioris, sit ad a θ; erit, per similem methodum superioris, θ centrum grauitatis superficiei propositæ. Igitur cùm vt 50. ad 30. vel vt 100. ad 60. ita ex constructione sit se-

cundus terminus subadiunctæ ad rectam a θ; patet quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam figura b a h r est æqualis quinque trientibus rectanguli a g h, & ceratoides parabolica a h n est æqualis vni trienti; apertum est superficies superioris & præsentis propositionis esse vt quinarium & vnitatem; sunt enim æquales illis figuris, singulæ singulis.

PROPOSITIO XXIX.

ESto (*Fig.* 70.) r d s & r b s pars superior cycloideos magnæ, cuius circulus genitor b e d f; circa manentem i t intelligatur motu figuræ r d f b descripta corona, cuius superficies secetur bifariam plano per i t ducto æquidistanter plano l c r; eius verò superficiei partem quæ ad d spectat, hoc loco contemplamur.

Ostendendum est si secundus terminus subadiunctæ progressionis, de quo egimus in superioris corollario, diuidatur in quindecim partes; ex recta autem b d resecetur b M continens vigintitres eiusdemmet modi, punctum M esse grauitatis centrum superficiei coronariæ, quam hîc spectamus.

Hanc superficiem coronalem, quam modo tractamus, componi ex duabus duarum priorum propositionum manifestum est. Sit ergo N grauitatis centrum repertum in vigesima septima pro maiore parte huius coronalis; sit A centrum in vigesima septima inuentum pro minore; ergo si M sit centrum totius, vt maior ad minorem, ita debet esse A M recta ad M N, ex lege reciproca libræ; Ergo per corollarium superioris recta A M ad M N est, vt quinarius ad vnitatem; ac proinde recta A N ad M N est vt senarius ad vnitatem.

Rursus quoniam ex vigesimæ septimæ corollario recta b N ad secundum subadiunctæ terminum, cuius primus sit b d, est longitudine sicut 172. ad 100. secundus verò iste terminus est, per superiorem, ad b A sicut 100. ad 60.: ergo ex æquo, vt 172. ad 60. ita longitudine est b N ad b A: ergo si secundus terminus diuidatur in centrum partes æquales, eiusmodi 172 conficiunt rectam b N; rectam b A 60. rectam A M 112. Si igitur secundus terminus tribuatur in 600. partes æquales; b N erit partium talium 1032. & M N partium 112. ergo b M erit partium 920. qualium secundus terminus est 600. Secundus igitur subadiunctæ terminus ad b M est longitudine vt 920. ad 600. vel contractiùs, vt 23. ad 15. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ex corollario vigesimę sextę liquet planum ductum per centrum grauitatis cylindracei mixti, vel, quod idem est, curuę r d s parallelum plano l c r transire per grauitatis centrum superficiei istius coronalis quę ad

plani l c d partes r iacet; ergo cùm per quęsitum secundum quinquagesimę nonę superioris libri, eiusmodi planum obtineatur, habetur inde calculus centri grauitatis attinentis ad dimidium superficiei illius, cuius centrum in pręsenti propositione indagauimus.

COROLLARIVM II.

Hinc apertè constat methodus calculi pro aliis casibus coronę cycloidicę, siue clausa fuerit, siue aperta; & siue sumatur integra, siue quę libuerit eius portio ad positionem plani l c d. Calculus enim istorum omnium ita pendet ex demonstratis in superiore libro; vt illa falsa esse necessarium sit, si calculus iste ruinoso nitatur fundamento. Sed vt finis initio cohęreat, centrum semisuperficiei coronalis clausę ex circulo genitę, restat computandum.

PROPOSITIO XXX.

Circularis coronæ (*Fig.* 70.) clausæ semisuperficies proposita habet centrum M in recta b d ita collocatum, vt si quadratum b c ponatur primus perspectæ progressionis terminus, secundus verò sit circulus b e d f: & consequenter si adiunctæ illi progressionis primus terminus sit radius b c; secundus, dimidium peripheriæ b e d f; recta b M sit tripla secundi termini progressionis subadiunctæ.

Istud demonstratur methodo nonnihil diuersa à superiore, quia calculus rotundiùs exit per hanc quam per illam viam; alterutra enim vtrobique iniri potest. Ex corollario vigesimę sextę liquet vtramque simul superficiem maiorem & minorem esse ęquales parallegrammo mixto cuius altitudo ęquet peripheriam circuli semidiametro b d descripti. Pręterea ex communibus librę principiis constat duo simul ęquiponderantia duarum istarum superficierum esse ipsum ęquiponderans superficiei propositę. Vnde vltrà fit vt parallelogrammum mixtum ad duo simul ęquiponderantia, ita esse rectam b d vel b p ad b M.

Præterea ex methodo quinquagesimæ septimæ superioris libri habemus, (*Fig.* 65.) duplum æquiponderantis figuræ b a h r (ponimus iam a h z b esse semicycloidem paruam circulo b q a genitam) axe b z, sustentaculo u l; vel æquiponderans eidem axe μ G, esse æquale spatio quod æquiponderat cuneali superficiei insistenti super arcu q a, & abscissæ à plano obliquo incedente per b c rectam; rectæ autem e q, g h iacent in directum in hypothesi præsente. Eo autem ita constituto, æquiponderans figuræ g a h, (quæ est pars superior paruæ semicycloideos) est axe b r, sustentaculo μ G, vt ex decima septima & decima octaua primi libri liquet, tres octauæ partes secundi termini progressionis perspectæ, cuius primus sit quadratum b c, auctæ primo. Pari pacto inuenitur æquiponderans figuræ a h g axe a n, sustentaculo bifariam secante rectam A Q, tres octauæ secundi termini primo imminutæ; summa igitur ex duobus istis

æquiponderantibus collecta est dodrans secundi termini progressionis iam dictæ. Suspensum autem, siue parallelogrammum mixtum altitudinis b d insistens super e d curuâ est æquale secundo termino, vt ex tertia primi libri colligitur. Vt igitur (*Fig.* 70.) suspensum siue secundus terminus progressionis perspectæ ad summam illam siue ad dodrantem perspectæ progressionis, ita est p b vel b d, vel bis primus adiunctæ terminus, ad tres semisses primi termini subadiunctæ progressionis. Rursus vt dimidium secundi perspectæ ad primum, ita tres semisses primi subadiunctæ se habent ad triplum secundi subadiunctæ, progressionis. Atqui ex methodo quinquagesimæ septimæ libri superioris, hæc est magnitudo rectæ b M; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quoniam ex corollario primò vigesimæ propositionis libri quinti habemus calculum centri grauitatis pro arcu e d, patet ex corollario superioris, inde obtineri centrum grauitatis pro dimidio superficiei coronalis illius, cuius hîc grauitatis centrum inquisiuimus.

COROLLARIVM II.

Potest superioris propositionis calculus tractari methodo præsentis in hunc modum. Spatium æquiponderans propositionis vigesimæ septimæ continet (*Fig.* 65.) 86. sexagesimas rectanguli a g h; æquiponderans propositionis vigesimæ octauæ complectitur 6. sexagesimas eiusdem modi: summa est 92. sexagesimæ. Suspensum est 120. sexagesimæ: ergo suspensum ad æquiponderans est vt 120. ad 92. ergo ex præsentis methodo (*Fig.* 70.) recta b M ad secundum gradum subadiunctæ progressionis, cuius primus est b c, se habet longitudine sicut 184. ad 120. vel compendiosiùs sicut 23. ad 15. quod aptissimè quadrat demonstratis in vigesima nona.

PROPOSITIO XXXI.

Explicatur generatio cycloideon aliarum, & quæ sit in illis specialis difficultas.

Initio primi libri generationem dedimus cycloideos magnæ, quam hactenus semper eo nomine designauimus: Nunc de aliarum, quas *productas & contractas* vocant Recentiores, genesi aliquid nobis censemus antè dicendum, quàm præsenti libro finem imponamus. Tunc igitur ibi (*Fig.* 1.) cycloidis magnæ ortum traximus à duabus lationibus, vna circuli c e f o per parallelogrammum c f a x, ita vt diameter f c quamdiu fertur, vsque maneat parallela lateri a x, quoad ipsi congruat in termino lationis; altera, puncti A per peripheriam c e f; ita vt eodem tempore pars arcûs decursa sit ad totum arcum c e f, sicut erit pars rectæ f a æquantis peripheriam ad ipsam f a. Nunc verò si maneant duæ illæ lationes, illaque proportio partis quam punctum A decurrit in peripheriâ c e f, ad partem quam punctum f decurrit in semibasi f a; nempe vt pars arcûs diuersa

perpetuò

perpetuò ſit ad partem ſemibaſeos decurſam, ſicut arcus c e f ſe habet ad ſemibaſim f a; ſi peripheria c e f ſit maior ſemibaſi f a, vocatur *cycloides contracta*; ſin minor, dicitur *producta*. Quando autem eſt æqualis, dicitur abſolutè *cycloides magna*, vel *cycloides magna primaria*. Certum eſt figuram ex differentiis, cuius dimetientes ad poſitionem baſeos a d ſunt z p, b e, r s eſſe ad figuram ex differentiis primariam, vt eſt recta a f ad arcum f e c; idque probari poteſt, illa ipſa methodo, qua vſi ſumus in prima illa primi libri: quapropter ſi illa proportio detur, problemata tertij & quarti libri ſolutionem ſuam conſequentur ex methodo illorum librorum. At problemata quinti libri ſolui omnia non poterunt niſi habeantur parallelogramma mixta, vngulares ſuperficies, quæ ſunt eorum quadratrices, vt in corollario quinquageſimæ nonæ monuimus, & inſuper iſtarum vngularium aliæ quadratrices, quas ſecundas appellauimus. Nemo autem quem ſciam dedit iſtas ſuperficies; vnde liquet methodos illas quæ *generales* eſſe iactantur, indigere plurimis aliis admodum abſtruſis, vt per illas ad exitum dedúcantur problemata propoſita; quod ſæpius dici debet, quia ſæpius videmus multos iſtis amplis titulis ſubjicere longè plurima, quæ penitus illis non ſubſunt. Cùm ad ſoluenda problemata quinti libri in cycloidibus ſecundariis nota eſſe debeant tria (datâ cùm opus erit circuli quadraturâ) nempe dimenſio mixti rectanguli, ſuperficiei cuneatæ, & alterius quam ſecundam quadratricem mixtam appellauimus; ne primum quidem eorum licet reliquis facilius videatur, adhuc cognitum extat. Dettonuillæus in epiſtolâ ad D. Hugguens de Zulichem contendit arcum d c z a eſſe æqualem dimidio perimetri ellipſeos, cuius maior & minor axes inueniantur hac methodo. *Vt circumferentia circuli generatoris ad compoſitam ex ipſa circumferentia & ex baſi cycloideos, ita eſt diameter circuli eiuſdem ad maiorem ſemiaxem ellipſeos quæſitum. Vt autem eadem compoſita ſe habet ad differentiam duarum partium ipſam componentium, ita eſt ſemiaxis maior ad ſemiaxem minorem quæſitum.* Iſtud, vt concedatur eſſe verum, non tamen adhuc ſatis eſt ad inueniendum rectangulum mixtum: cùm neſciatur ratio quam illa ellipſeos perimeter habet ad peripheriam circuli, vel ad rectam, quod tamen opus eſt ad conuerſionem illius rectanguli mixti in rectilineum, vel in circulum. Vt, inquam, verum eſſe concedatur; noui enim huius artis peritiſſimos, qui contendunt demonſtrationem adductam à Dettonuillæo vim non inferre, nec cogere ad aſſenſum. En vt modus iſte demonſtrandi ab antiquo diſcrepans non ſemper extorqueat conſenſum; ſuperfluum igitur non fuiſſet ſi veterum ineluctabili methodo iſtud demonſtraſſet; poterat enim id ita facere; *facilè mihi* (inquit pag. 7.) *foret præſentem methodum ad antiquam reducere, & afferre demonſtrationem illi ſimilem, quam protuli de æqualitate linearum ſpiralis & parabolicæ. Sed illam quamuis iam exarata apud me ſit, quia paulo longior foret & ſupervacanea, prætermitto, contentus in ſpirali & parabolica ſpecimen huius conuerſionis dediſſe.*

Iſti porrò acres ac diligentes Iudices, hoc tantùm pronuntiant, intelle-

ctum non cogi adductis à Dettonuillæo rationibus; expectandúmque esse vt maiorem quadam insuper machina vim faciat. Id verò non est refellere tanquam falsum, quod ille ad probandum sibi proposuit, sed solum probandi modum rejicere hoc edicto, *nondum id esse demonstratum, quod erat demonstrandum.* Explicuimus igitur generationem aliarum cycloideon, earúmque specialem difficultatem, prout nobis propositum fuerat.

COROLLARIVM. I.

Hinc patet si virtutes motrices punctorum A & f non sint inter se vt lineæ c e f, f a percurrendæ; siue, si spatia decursa in lineis c e f, f a non sint perpetuò sicut ipsæ lineæ c e f, f a; tramitem puncti A non esse vllius generis cycloidem; sed aliam quamdam lineam. Itaque cycloides est trames puncti A, quoties in hypothesi facta spatia decursa in lineis c e f, f a sunt perpetuò sicut ipsæ lineæ. Vel breuiùs, quoties vti spatia c e f, f a ita sunt virtutes motrices. Intelligimus autem virtutes motrices non impeditas ab effectûs sui plena consecutione.

COROLLARIVM II.

Quamuis ponamus puncta A & f moueri per lineas c e f, f a æquabiliter; hoc est, punctum A in percurrendis æqualibus partibus peripheriæ c e f, impendere æquales temporis partes: punctum item f in decurrendis partibus rectæ c f æqualibus consumere partes temporis æquales. Non propterea existimandum est idem euenire in percurrendis partibus curuæ c z c æqualibus. Si enim sumantur quotcunque æquales a r, r b, b z, tempus quo percurritur a r est maius tempore partis r b; & istius, tempore partis b z.

PROPOSITIO XXXII.

PRoponitur difficultas quædam physica, quæ ex generatione illarum cycloideon oritur.

Posuimus in propositione superiore (*Fig.* I.) cycloidem generari ex duplici latione, quarum vna deferatur circulus c e f o intra parallelas c x, f a, ita vt diameter c f æquidistet semper lateri a x; altera deferatur punctum A per peripheriam c e f. Intelligatur secunda superficies plana congruere primæ superficiei a f c, & in illa iacêre punctum A, atque ex centro g, describi circulus secundus semidiametro g A; ergo huius circuli secundi peripheria congruet peripheriæ c e f o. Intelligatur punctum A fixum in illa peripheriâ secundâ, ita vt dum ipsum mouetur latione suâ per peripheriam c e f primi circuli, peripheria cui affixum est vertatur circa centrum g radio g A circumducta. Hoc posito istud accidit vt circuli secundi diameter alia ex alia succedat in locum diametri c f, attinentis ed circulum primum; ac proinde vt peripheriæ secundæ aliud & aliud punctum congruat puncto f per rectam f a delato. Hinc igitur fit vt peripheria secundi circuli æqualis peripheriæ c e f applicetur tota rectæ f a, ita vt quodlibet eiusmodi peripheriæ punctum reperiat in recta f a pun-

ctum cui durante motu congruat diuersum à punctis quibus congruunt reliqua peripheriæ puncta. Non enim in idem lineæ f a punctum conueniunt duo peripheriæ puncta, nec idem peripheriæ punctum vindicat sibi duo puncta in linea f a: cùm vt istud fieret, deberet cessare motus puncti A, & vt illud accideret, cohibendus esset motus puncti f per rectam f a: neutrum autem fit, salua hypothesi, & generatione ista cycloideos.

Difficultas verò physica statim occurrit; nam circuli secundi peripheria vnica & eadem applicatur rectæ f a, & *successiuè* congruit illi: atqui recta f a est nunc æqualis peripheriæ f e c, nunc maior, nunc minor, prout in superiore ostendimus: ergo eadem recta coextenditur modo longiori, modo breuiori rectæ: ergo est ęqualis modo maiori, modo minori rectę; quod repugnat, cùm vtrobique maneat eadem, eiusdémque longitudinis. Coextensio enim illa videtur commensurationem & ęqualitatem inferre; sicuti si filum puncto c figas, & illud rotę c e f o curuaturę eo vsque applices successiuè dum redeas ad punctum c; omnes intelligunt longitudinem fili esse ęqualem peripherię c e f o. At, inquies, filum applicatur quidem successiuè, sed quod applicatum semel fuit, manet interea applicatum & cohęrens curuaturę, dum alię fili partes admouentur consequentibus peripherię partibus. Verùm istud nondum satisfacit; quid enim ad ęqualitatem probandam facit quod quæ successiuè admotæ fuerunt, maneant applicatæ? certè nihil, si rem præcisè expendamus. Fac enim eo modo quo filum applicatur, erigi & extendi in rectam versus c, & non manere arcuatum; perinde erit curuatura illi æqualis ex vi præcisè illius applicationis. Quid igitur, inquies, confert alligatio fili in puncto c? respondeo id vnicum, vt virtus fili motrix & (vt ita dixerim) *applicatiua*, eo pacto attemperetur, quo debet, vt peripheriæ non admoueatur nisi æqualis longitudo fili. Potest enim talis esse virtus qua longius peripheriâ filum applicetur; potest & talis, qua breuius. Totum igitur id referri debet in virtutis motricis diuersitatem quandam. Sicuti si virtus motrix puncti f ad a eodem tempore deferat illud per lineam breuiorem arcu illo per quem virtus motrix puncti A defert ipsum A; maior arcus applicatur minori lineæ rectæ; sin eadem virtus motrix puncti f deferat per longiorem, minor arcus applicatur maiori rectæ lineæ. Vnde liquet explicatione adhuc maiori egere solutionem R.P. Tacquet p. 234. *Cylindricorum & annularium. Respondeo,* inquit, *quamuis tota successiuè circumferentia, totam successiuè in plano lineam se maiorem, minoremve tetigerit; non tamen ei commensurata seu coëxtensa fuit; quod ad commensurationem successiuam totius cum toto requiratur, vt partes partibus successiuè applicentur & congruant. Hic autem nulla circumferentiæ pars vlli parti lineæ, in plano peragrata applicata fuit; sed continuus fuit contactus indiuisibilis, siue non quantus.* Ex hactenus enim dictis liquet ex continuo illo contactu rectè inferri æqualitatē, & ex modo quo contactus ille perficitur; quando nimirum virtutes illæ motrices tales sunt vt singulæ æqualibus temporibus puncta f & A deferant per spatia æqualia.

Respondeo itaque illud quod assumitur *quæ sibi coaptantur inter se sunt æqualia*, falsum esse in vniuersum: verum esse tamen in iis quæ sibi coaptata quietè manent, quia causa inæqualitatis prouenit ex varia virtute motrice quæ in quiete deest; hoc autem sensu assumitur ab Euclide initio Elementorum. Quæ verò in motu sibi per tactum coaptantur, ea sunt æqualia quoties vno manente, aliud admouetur per duplicem virtutem quarum quælibet seorsum moueret per æquale spatium. Quando autem audis duplicem virtutem, intellige vel duas re ipsa diuersas, vel vnicam quæ duabus æquiualeat, & ita attemperet applicationem, vt pares extensiones paribus aptentur. Proposuimus igitur difficultatem physicam ex generatione cycloideon ortam, prout nobis propositum fuit.

COROLLARIVM I.

Ex superioribus liquet non posse affirmari peripheriam c e f componi ex certo quodam numero punctorum. Si enim componeretur ex mille verbi causa, intelligi non potest quo pacto posset applicari rectæ compositæ ex bis mille punctis, vel etiam rectæ compositæ ex quingentis tantùm; ita vt diuersa peripheriæ puncta sortirentur diuersa rectæ lineæ puncta, & singula singulis congruerent. Cùm autem quod infinitum est excedat humani ingenij limites, mirum non esse si ista planè & perspicuè non intelligamus, vbi coacti sumus admittere partes in magnitudine qualibet infinitas.

COROLLARIVM II.

Patet ex iisdem parem difficultatem intelligi in ellipsis, parabolæ, & hyperbolæ perimetris, & vno verbo, in applicatione successiua cuiuscunque curuæ ad rectam. Quapropter qui, vt fugiat laborem soluendi istius nodi, negauerit circulum, cylindrum & sphæram esse possibilia; debet etiam negare omnem lineam curuam ess possibilem; solúmque rectam affirmare esse possibilem; solùm corpus planis circumscriptum, esse possibile; omnia demum quæ nobis apparent sphærica & conuexa, esse terminata planis exiguis & minutulis. Sed hoc dicto incidet, vt reor, in aliquid absurdius; nulliúsque assensum obtinebit; esto fortasse dimoueri inde scholastica nequeat disputatione. Porrò in rectis etiam lineis ista successiua applicatio maioris ad minorem objici potest. Pone enim (*Fig. 66.*) in parallelogrammo quolibet rectangulo f a b e diametrum a e ductam, & latus a b moueri ad latus f e, ita vt quamdiu mouetur, parallelum maneat ipsi f e. In hac hypothesi latus b a ita percurrit totam diametrum e a, vt singula lateris b a puncta inueniant singula quibus aptentur in diametro; nullúmque assignari possit in diametro maiore, cui suum non responderit & aptatum fuerit ex latere a b. Id verò accidit semper cuiuscunque longitudinis sit f a. Igitur coaptationis successiuæ difficultas non tollitur, sublatis curuis lineis, si rectis parcatur.

COROLLARIVM III.

Si quis semel admiserit corpora curua & plana; non poterit, vt patet, euadere difficultatem admittendo quietis morulas in motu. Nam curua cylindri superficies, exempli causa, non potest admoueri plano; nisi aliqua, esto exigua pars illius, successiuè & absque mora vlla applicetur superficiei planæ.

COROLLARIVM IV.

Nonnulli sunt qui id vnum inter respondendum curant, nempe vt ibi (siue in Veri, siue in Falsi solo perinde id habent) pedem figant, quo instantis aduersarij tela creduntur non esse peruentura. Audiui ego nonnullum, qui elusum iri à se iactitaret difficultatem, negando posse conuenire duas illas virtutes motrices ad efformandam cycloidem longiorem, vel breuiorem. Sed vbi hoc dixit, statim obieci illi, dum cycloides primaria gignitur motu circuli secundi: in eodem eiusdem circuli plano designari posse innumeros circulos inæquales, quorum peripheriæ admouentur ad rectam æquantem spatium f a (*Fig.* 1.) idque iam olim vidisse Aristotelem in Mechanicis, 24. alias 25. quæstione à nobis laudata §. 5. prolegomenon ad elementa tetragonismica; nec id non vidisse Recentiores, quorum vnus Galilæus mirè se torquet, vt nodum istum physicum iuxta sua physices principia dissoluat. Euidens verò est innumeras generari cycloides vno eodemque tempore quo principalis c z a gignitur, habentes basim æqualem rectæ f a, illam nimirum rectam, quæ tanget vnumquemque concentricum, & æquidistabit rectæ f a. Intelligatur concentricus quilibet diametro y t descriptus; quem t u latus parallelogrammi u a f t tangat in t, occurratque rectæ l h in B. Quando centrum g secundi circuli in quo sunt A & t delatum fuerit in m, circulum diametri y t tanget recta b u in B, sicut circulum b z l tangit recta f a in l; & cùm recta g y sit portio radij g A, radiusque g A ponatur migrasse in radium m z; punctum quoque y circellum concentricum circulo h z l describens, erit in radio m z, & radius g y translatus erit in radium m D ipsi g y æqualem. Eodem igitur tempore puncta A & y decurrerunt arcus h z, E D similes, habentes inter se rationem rectarum m h, m B, vel g A g y; sed arcus h z est æqualis rectæ f l, ex generatione primariæ cycloideos c z a; ergo arcus D E est perpetuò ad rectam f l, vel t B decursam, vt est recta g A ad g y: ergo per corollarium primum superioris, linea quam describit punctum y est cycloides non primaria; sed, si punctum t cadat extra g & f, contracta; vel producta, si cadat inter g, & f. Æqualibus igitur rectis t u, f a, eodem tempore aptantur successiuè peripheriæ circulorum semidiametris g f, g t inæqualibus descriptorum; ac proinde & ipsæ quoque inter se inæquales.

COROLLARIVM V.

Quoniam negari non potest quin idem arcus successiuè admoueatur &

aptetur lineæ rectæ, prout suprà explicuimus, modo maiori, modo minori; non debet explodi illa physicorum longè plurimorum sententia, quæ *rarefactionem & condensationem* explicat dicendo eandem magnitudinem esse aptam ratione diuersæ virtutis à qua mouetur, occupare modo maius, modo minus spatium; quasi aliquid dicant inauditum in aliis quæstionibus physicis. Patet enim ex superioribus simile quid omnibus esse concedendum.

COROLLARIVM VI.

Aristoteles eo loci quæstionem soluit dicendo attendendum esse quis circulorum concentricorum moueatur per se, quis per accidens. Si enim maior moueatur per se, minoris peripheria applicabitur, & successiuè coëxtendetur maiori rectæ: sin minor feratur per accidens, maioris ipsius rotunditas percurret minorem lineam. Vnde liquet Philosophum ita explicandum esse, vt per se moueri is dicatur circulus cuius duæ lationes seorsum sumptæ æquali temporis spatio, per æquales lineas ferunt puncta f, & A. Galilæi solutionem referre supersedeo, quia minimè satisfacit, cùm ipsa re proposita multò obscurior videatur; nec miror reiectam eam, veluti inanem, fuisse à P. Tacquet pag. 240.

PROPOSITIO XXXIII.

AN sphæra, siue circulus, dum per commune planum materiale liberè voluitur, lineam percurrat suæ circumferentiæ æqualem; & cur, si hoc experientia docet, ita fieri debeat.

Reuerendus Pater Tacquet in propositione octaua dissertationis physico-mathematicæ pag. 247. primam huius propositionis partem esse veram ponit; inquirendam enim proponit tantùm huius euentûs caussam. Vnde statim rem aggreditur his verbis, *Hoc ita euenire qui aliter quam ab experientia probet; & cur ita eueniat, caussam qui aperiat, non inuenio.* Planum materiale commune definit definitione 6. esse illud *quod non caret omni inæqualitate, ac scabritie, cuiusmodi nostra sunt omnia.* Ego verò nonnullos circa ista patior scrupulos. Primò quidem non satis intelligo quid sit circulum aut sphæram *liberè volui.* An sponte sua & ex virtute ingenitâ? at in plano horizontali quiescit. An in plano decliui, ita vt nihil obstent velocitatis incrementa quæ fiunt, ea prout certis probat fieri experimentis accuratissimus P. Ricciolus lib. 9. Almagesti eruditissimi cap. 16. n. 23. pag. 392. An liberè volui tunc dicetur sphæra cùm semel à motoris externi contactu discesserit? Certè ipse in propositione nona contendit (Fig. 1.) euenire posse vt successiuè percurrat lineam maiorem aut minorem, si nempe vnus imprimat motum magnitudini A, circumagendo circulum secundum circa centrum g, alter verò circulum primum cui affixus hæret secundus agat præscripto modo super tangente f a. At numquid poterit imprimi virtus circulo vel solido quæ æquiualeat duobus illis motoribus, & quæ tantisper vigeat semotis motoribus iisdem? Fateor itaque hærere

mihi animum, nec videre satis quo sensu dicatur hîc planum liberè volui.

Præterea licet Autorum qui ita rem euenire statuunt nomina non referat, non est dubium quin hæc opinio in animis hominum iam olim inoleuerit. Ille ex recentioribus, cuius in prolegomenis suprà laudatis, memini, ita sentiebat; cùm, vt recta æqualis perimetro circuli haberetur, rotæ per planum semel volutæ vestigium assumi vellet. Sed Vitruuius inter Veteres scriptores hoc ipsum apertè velut à maioribus profectum assentitur libri decimi capite duodecimo, alibi decimo quarto; ibi enim edocturus *qua ratione rhedâ vel naui vecti peractum iter dimetiamur. Transferatur,* inquit, *nunc cogitatus scriptura ad rationem non inutilem; sed summa solertia à maioribus traditam; qua in via rhêda sedentes, vel mari nauigantes, scire possumus quot milliaria numero itineris fecerimus. Hoc autem erit sic. Rota quæ erunt in rheda sint lata per mediam diametron pedum quaternûm & sextantis; vt cùm finitum locum habeat in se rota, ab eóque incipiat progrediens in solo via facere versationem, perueniendo ad eam finitionem, à qua ceperit versari, certum modum spatij habeat peractum pedes duodecim.* In eodem capite docet quadringentenas versationes rotæ efficere spatia passuum mille; quod esse nequit nisi curuatura rotæ sit pedum duodecim & semissis. Vnde vt 22. ad 7. iuxta computationem Archimedeam, ita fient 25. semisses pedis vnius ad diametrum rotæ quaternorum pedum, quadragesimâ quartâ parte pedis vnius demptâ. Manifestum igitur est mendosum esse textum: corrigíque debere iuxta numeros iam positos.

Porrò naui similem rotam adiungi solitam testatur, sed eius curuaturâ pinnis instructâ, vt ita illarum incursu in vndas extimas, versatio fieret. Vtrobique autem patet versationem rotæ euenire ex eo quod allisio rotæ ad solum vel ad aquas curuaturam cohibeat ne motum centro impulsum sequatur, ac proinde illam cohibendæ curuaturæ vim æquiualere virtuti rotatrici circa centrum. Cùm itaque hæc vis cohibens possit esse maior & minor, manente eadem virtute vel equorum, vel ventorum trahentium centrum rotæ: non video qua ratione hæc methodus possit esse certa & constans. Fernelius tamen ea se vsum narrat in Cosmotheoria sua ad dimensionem Globi terrestris, & vt refert Furnerius noster lib. 12. Hydorgraphiæ cap. 35. pag. 609. Claudius Flamingus Machinis Ducis Vvittembergensis præfectus, non alio vtebatur instrumento in dimitiendis agris. Fernelij methodum refert P. Ricciolus Almagesti lib. 10. sect. 5. prob. 15. aitq; à loco primæ obseruationis ad locum secundæ, vno gradu dissitum à primo, reuolutiones fuisse 17024. rotæ ambitum fuisse pedum 20. diametrum pedum 6. ac digitorum 6. vnde conficitur gradui vni terrestri competere milliaria 68. Idem verò Ricciolus lib. 2. cap. 7. schol. 4. vocat istud Fernelij experimentum *valde lubricum*, idque libro Geographico se ostensurum prænuntiat. Profectò tam lubricum est, quàm quod maximè, vel ob solam istam incertitudinem vtrum resistentia orta ex collisione rotæ

cum solo, æquiualeat virtuti qua centrum rotæ trahitur ab equis; potest enim ita contingere, potest & aliter, vt suprà aduertimus. Itaque de constanti huius experimenti veritate non possum non vsque dubitare, dum certius aliquid de eo mihi constet.

Sed faciamus ita rem se habere, vt possimus ad examen reuocare causam à R. P. Tacquet assignatam, ait enim ex illo principio *natura, cum nihil agit frustra, quemadmodũ breuissima agit via, ita modo etiam facillimo*, fieri vt circulus in plano communi materiali volutus lineam percurrat suæ circumferentiæ æqualẽ. Cùm enim planum sit asperum & scabrum, circulus in minutas inæqualitates incurret, iis verò vt quàm minimè offendatur, oportet vt pari celeritate se circa centrum suum circumagat versus punctum à quo incepit motus volutationis; illa enim subductione pari, quam minima euadet offensio. Hic ego duo præsertim subdubito. Primò cùm tota causa huius euentûs dicantur esse minutulæ inæqualitates, & quasi monticuli interpositi, vbi cessabunt isti monticuli, ibi quoque cessabit causa effectûs eiusmodi: ergo quis dicat quota sit illa pars itineris quæ subductis offendiculis est plana? quis asserat hanc asperitatem esse vbique & constantissimè æqualem? numquid etiam ipsa rota habet suas inæqualitates; quis autem dicat illas esse constanter & vbique easdem & simillimas? nam si tam in plani, quàm in circuli materialis communis superficie, nulla seruetur lex harum inæqualitatum, sed sint veluti insulæ in mari sparsæ, modo, denso agmine, sporadum in morem, modo raræ; modo altiores, modo depressiores; quis aliquid constans inde inferat, quantum ad modum offensionis mutuæ attinet? quid verò si manente eadem viæ difficultate, assumatur multò grauior aut multo leuior rota, lex eadem an inuariata perstabit? Præterea idem quærendum restat de superficie istarum quasi insularum aut verrucarum, vtrum sit læuis & sine asperitatibus: an potius & ipsa suas habeat valliculas, monticulósque. Neque dixeris istas quæstiones esse superfluas, cùm asperitates & tubercula ista non cadant sub oculos, aut tactum. Nam cùm exiguitas istarum rerum non obstet quo minus tu illi istum effectum sensilem de quo instituta est controuersia, attribuas; ita neque impedire debet, quin ego vtiliter de illis quæram ea quæ vel faciunt contrarios effectus sensiles, vel tui effectûs constantiam tollunt. Itaque de ista secunda propositionis parte idem affirmo, nempe non satis explicatam mihi videri rationem illam ex asperitatibus petitam, vt repugnantem intellectum vincat. ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO XXXIV.

DVm verus & perfectus globus vel circulus, grauis tamen, solum perfectè planum contingendo premit, si compressio illa in tactu ponatur æquiualére cuidam nexui, quo fiat vt absque vi aliqua speciali raptari circulus nequeat super illo plano: reddi potest ratio cur super

cur super perfectè plano, circulus perfectè rotundus volutari debeat, dum per centrum secundum rectam plano parallelam trahitur.

Ponamus rectam f a (*Fig*. I.) esse perfectè rectam, & perfectè curuam esse peripheriam c e f o, attamen grauem, & premere punctum f. Dico compressionē illam esse causam vt dum g trahitur vi equorum, ad partes b per rectam b g, peripheriæ punctum f, vergat ad partes o, & succedat punctum s. Dum enim centrum g virtute equorum trahitur, peripheriæ punctum f quasi agglutinatum lineæ rectæ a f puncto f, non tam facile trahi se sinit quam punctum g: inclinaretur ergo semidiameter g f, vtsi g f arbor foret radicata in f; quia verò propter figuram circularem non potest simul hærere fixa in f & inclinari; cùm tamen vis motrix simul & victrix transferat centrum g ad partes b; figuræ natura se se virtuti impressæ accommodando suggerit aliud punctum in quo fiat contactus; hoc enim minus violentum ipsi propterea est, quia connexio puncti f peripherici cum puncto f pertinente ad rectam a b, orta à compressione impositi grauis, magis resistit raptationi circuli versus a, quàm inclinationi eiusdem circuli versus eundem terminum a. Nam si raptaretur, connexioni illius illi vis fieret maior, quàm dum inclinatur, eo quod dum inclinatur punctum f leuatur pondere centri g, quod incumbit iam alteri puncto, illi videlicet in quo fit tactus: ergo diuulsio puncti f in peripheria positi à puncto f in recta a f iacente, faciliùs fit per volutationem circuli prementis, quam per raptionem. At verò in conscensu montis, centrum grauitatis non est in recta à centro g ducta ad punctum tactûs in decliui positum; vnde etiam accidit vt non tam sponte voluatur rota. Assignata est igitur ratio physica eius quod propositum fuerat.

COROLLARIVM.

Hinc patet, quoties connexio & cohærentia peripheriæ cum recta a f tanta est, quanta est vis trahens per lineam b g; toties peripheriam c e f incumbere successione motûs in rectam f a ipsi æqualem: quoties verò fuerit minor vel maior, toties peripheriam admoueri rectæ maiori vel minori. Quapropter si experientia comprobet rotæ ita tractæ peripheriam successu motûs componi vt plurimùm cum æquali rectâ; dicendum erit vt plurimùm inesse hanc virtutum æqualitatem. Sed hæc omnia, vti vides, physica cùm sint, disputationi obnoxia sunt.

PROPOSITIO XXXV.

AN in reflexione generetur cycloides aliqua, expenditur; & per occasionē aliquid dicitur de causa æqualitatis angulorum incidentiæ, & reflexionis.

R. P. Maignan in Perspectiua sua horaria pag. 305. explicaturus reflexionem, obliquam lucis è speculo plano, postquam posuit radium esse *cuius sectio per axem est parallelogrammum rectangulum*, statuit huius rectanguli

latus ita incurrere in planum obliquo ictu, vt illud contingat vna tantùm suí extremitate, statimque repulsum resiliat non sine aliquo motu vertiginis. Vnde ait sequi vtrumque huius lateris ita repercussi extremum *describere cycloidis cuiusdam, si non primariæ, vt vocant, saltem alterius in alia specie, vt facile possem demonstrare.* Vellem vt id demonstrasset; ego enim non ita obuiam experior eiusmodi demonstrationem: ostendendum enim est non solum illam lineam esse curuam, sed esse de genere cycloideon definitarum in corollario primo trigesimæ primæ. Id verò si quis mathematicè mihi demonstret, curiosè illum audiam. Quod autem idem R.P. ibid. pag. 300. demonstrandam suscipit causam cur radius obliquus reflectatur angulo æquante angulum incidentiæ, indiscussum præterire nolim.

Primò quidem pag. 289. repudians causam quam Vitello & alij Primarij Optices Magistri tradunt, *quod natura agat per breuissimam viam. Clauius*, inquit, *in eadem breuia & ipse impegit lib.* 8. *Geometr. pract. propos.* 7. *Mitto alios qui in hoc excusationem habere posse viderentur, quod post tot & tam celebres autores errauerint; nisi errorem fecissent suum.* Referre placet ipsa Clauij verba in scholio illius propositionis; *quia*, inquit, *natura non impedita, agit per lineas breuissimas, fit vt radius solis vel visualis cadens in planum tersum, cadat necessario in punctum vbi angulus quem Perspectiui angulum incidentiæ dicunt, æqualis efficitur angulo quem reflexionis appellant.* Quod Clauius ibi affirmat verissimum esse contendo, nimirum naturam, *si non impediatur*, agere breuissima via; impeditur autem quoties via breuissima nulla datur, sed quauis datâ potest dari breuior; vt accidit in quodam speculorum concauorum casu: at in casu de quo Clauius agit & datur breuissima via, & illa designatur à solis incidentiæ & reflexionis rectis angulos æquales constituentibus: nulla ergo Clauius impegit in breuia. Sed neque Vitello, vt alibi ostendemus fusiùs; licet enim in propositionis 18. lib 5. affirmet rem visam per speculum quodcunq; sub breuissimis lineis comprehendi à visu, idipsúmque inculcet mentione etiam speculi concaui facta sub initium vigesimæ: sensus illius est iste, *quoties à puncto viso ad centrum visûs possibiles sunt lineæ reflexionis & incidentiæ breuissimæ, res visa in quocunque speculo comprehenditur sub illis lineis.* Sed non est sensus, in quocunque speculo, pro quolibet casu, à puncto viso ad rem visam dari viam omnium reflexam breuissimam. Quando verò non datur breuissimæ, cùm non sit potior ratio cur inter breuiores innumeras eligat hanc potius quàm illam, accipit longissimam vt pote determinatam: fugit enim quod *indeterminatum est.*

Secundò examinanda nunc est physica causa quam ipse P. Maignan tradit in iis quæ loco mouentur, & appulsu ad aliud corpus repelluntur, vnde & pilam lusoriam assumit in exemplum; sub isto tamen exemplo pag. 292. rationem reflexionis vult reddi *ab eo qui radium ita concipere voluerit, quasi sit fluxus & emissio continua globulorum lucis à lucido.* Inter illos verò locum sibi ipse statuit pag. 624. Esto itaque (*Fig.* 2.) circulus c e f o centri g; & ex puncto p per lineam p g emittatur pila in-

cidens in g, & retrocedens per lineam g Q ad punctum s. Experientia constat angulos p g e incidentiæ, & ſ g o reflexionis esse æquales, rectámque p s esse parallelam rectæ b g; huius verò æqualitatis causa assignatur in hunc modum. Ex puncto g excitetur ad rectam p s perpendicularis g y, quæ bifariam secabit ipsam p s, vt ex Euclidis Elementis liquet. Præterea virtus directa impellens per rectam p g æquiualet duabus iuxta Aristotelis demonstrata in Mechanicis cap. 1. quarum vna impellat per rectam p y, de qua suprà, & vocetur *horizontalis*; altera per parallelam rectæ g y; vocetur *perpendicularis*: illa verò erit ad istam vt trianguli g y p, latus p y ad y g. Virtus horizontalis non pugnat cum plano repercutiente, cui ἀδιάφορον est, quod emissum corpus horizontaliter feratur; at verò virtus perpendicularis illi prorsus repugnat; eo enim illa virtus spectat, vt in corpus quod percutit, penitus ingrediatur; quod fieri naturaliter nequit vel sine diuisione illius, vel sine expulsione è loco, quorum vtrúmque vim infert percusso. Itaque in hac quasi pugnâ, percussum ferienti non reluctabitur nisi quatenus feriens ipsi erit contrarium; cùm ergo non sit contrarium nisi per virtutem perpendicularem, eiusmodi virtutem infringet contraria virtute perpendiculari, & quidem æquè vehementi ac intensa; nam vt asserit pag. 297. lemmate 3. quantum à pila incidente patitur planum percussum, tantumdem in pilam reagit planum repercutienss. Cùm igitur pila ex puncto g reiecta versus rectam p s duplicem virtutem habeat horizontalem & perpendicularem pares horizontali & perpendiculari quas habebat quando ex puncto p emissa est in lineam e o; manifestum est angulos p g e, ſ g o debere esse æquales.

Duo sunt quæ maximè dubiam mihi faciunt istam causam. Primum non video vnde probetur vis perpendicularis repellens esse æqualis virtuti pariter perpendiculari, sed impellenti. Planum b z L q esto veluti mensa lusoria inter parallelas z L, b q comprehensa, & ipsis z L, b q insistant plana veluti tabulæ ad repellendos globos compactæ. Intelligatur ex p incipere iactus globi lusorij per rectam p g, & ex g reflecti per rectam g s ita vt anguli p g e, ſ g o sint æquales; ex s rursum ab occurrente tabula z y remitti in oppositam, & sic deinceps in infinitum. Si pari vi globus repellitur ex g, qua ex p emissus primo fuit; pari etiam vi reflectetur ex s, & ita in infinitum globus æqua velocitate perpetuo feretur per angulos hinc & inde ęquales; ponimus enim extrinseca quę hunc effectum impedire possent submoueri. At hoc incredibile mihi videtur; nam experientia suadet minori semper velocitate & virtute fieri istas reflexiones; gratisque dicetur totum id prouenire ab extrinseco aere, vel à defectu quodam tabulæ, globi &c. Præterea ponamus, quod fieri potest, globum à puncto p ad g ferri à motore per velocitatem decrescentem; ergo vt fiat angulorum p g e, ſ g o æqualitas, tabula b g imprimet globo velocitatem contrario prorsus modo crescentem vsque ad punctum s; à puncto verò s tabula z y eodem pacto imprimet decrescentem; tabula verò b g rursus imprimet hac

ipſa lege creſcentem, & ſic alternis ludus continuabitur, qui creditu mihi difficillimus eſt. Vnde enim poteſt habere tabula b g, vt quò longius diſtat globus, eò fortius illum impellat? & cur hæc virtus negatur tabulæ z y ſimillimæ.

Altera dubitandi ratio eſt illud, *virtutem horizontatem non eſſe contrariam percuſſo.* Vel enim eius motus pilæ impreſſus conſideratur fieri extra corpus percutiendum, vel intra ipſum; ſi extra fieri intelligatur, nec illi etiam contrarius eſt perpendicularis; ſin intelligatur ille motus fieri intra, vterque eſt contrarius; nam vis infertur percuſſo, ſiue ſcindatur in profundum, ſiue in latum; imo motus ille ipſe qui dicitur horizontalis & parallelus rectæ e g, fiet ſolido percuſſo perpendicularis, ac proinde etiam per principia ſententiæ Maignanianæ contrarius, ſi miſſile feratur in faciem ſolidi eiuſdem parallelam rectæ g y.

Claudo igitur examen cauſæ allatæ affirmando mihi videri id & obſcurius & incertius eſſe, eo quod erat demonſtrandum; angulos ſcilicet incidentiæ & reflexionis eſſe æquales in proiectu pilæ. Vt omittam cauſam non eſſe vniuerſalem pro quacunque reflexione; cùm detur reflexio qualitatum, quæ non ſunt ſubſtantialiter corpus, vt lucis. Nam lucem non eſſe corpus in Academiis publicè & conſtanter docetur cum Ariſtotele, & probatur longè grauioris momenti rationibus. Vt mirum mihi plane ſit Reuerendum P. Maignan indubitanter affirmare illam qualitem à lucidi ipſius ſubſtantia diſtinctam, *eſſe ſuperfluam & nullatenus probari.* Expendimus igitur id, quod fuit propoſitum.

COROLLARIVM.

Aduertendùm eſt illud Opticæ principium de æqualitate eiuſmodi angulorum potiſſimùm fundari in experimentis opera Organorū ad id conſtructorum ab Alhazeno & Vitellone Optices Principibus; vnde quamuis id demonſtrari per cauſam non poſſet, non deſineret eſſe principium illius artis. Iſtud rectè aduertit Vitello libri 5. propoſitione decima ſeptima his verbis *angulum incidentiæ eſſe æqualem angulo reflexionis per rationalem ſensûs experientiam inuento, ſemper vt vniuerſali principio deinceps in omnibus his ſpeculis vtemur. Et licet hoc, vt quidem huius ſcientiæ principium, ſit experimentaliter declaratum; poteſt tamen per aliquem demonſtrationis modum ad ipſius ſcientiam perueniri: vnde nos ipſum prout diligentiùs poterimus tentabimus demonſtrare.* Optarem vt R. P. Cabæus contra iſtud principium nihil ſcripſiſſet in ſuis Meteorologicis alioqui perdoctis.

SCHOLIVM.

Propoſitiones de motu grauium accelerato *hic Appendicis loco cenſui adſcribendas, cùm vt exoluam fidem ſemel datam illas edendi; tùm vt hæc etiam proprietas globi per decliue labentis, intacta non remaneat. In illo enim lapſu accelerari motum, etiam iuxta illam rationem qua augetur dum liberè per aërem cadit, experimentis accuratè ſumptis teſtatur R. P. Ricciolus ſuprà laudatus in propoſitione trigeſima tertia.*

Porrò dum globus ita in declini per volutationes labitur, potest fieri vt describat cycloidem aliquam; quamuis enim velocitas acceleretur, si cum proportione eadem acceleretur rotatio circa centrum, prodibit tamen cycloides, vt ex corollario primo trigesima prima manifestum sit.

POSTVLATA.

I. In magnitudine graui ante casum & discessionem à puncto quietis dari virtutem motricem ingenitam, quam sensu percipimus omnes, dum ipsam sustinemus pendulam: siue illa virtus sit à generante, siue à terra attrahente, siue à natura ipsius magnitudinis, siue aliunde; & siue illa virtus sit qualitas, siue quiduis aliud. II. cadentis motum esse acceleratum, saltem si comparetur ad eam lineam, quam perpendiculum vocamus; experimento enim certissimo constat perpendiculi partes æquales à graui cadente decurri non æqualibus temporis spatiis, sed in vicinioribus termino discessionis insumi plus temporis, quàm in remotioribus. III. Lineam esse in infinitum diuisibilem, eo saltem sensu, sine quo stare non possent Euclidis Elementa. IV. motum esse continuum, diuisibilémque, vt spatium per quod fit.

DEFINITIONES.

I. Velocitas est *in actu primo* ea virtus motrix quæ ad alteram comparata deferre nata est idem mobile pari tempore per spatium longius, & per idem spatium breuiore tempore; *in actu* autem *secundo*, est executio illius virtutis. II. accelerationē voco velocitatis gradum superadditum gradui velocitatis natiuæ. III. velocitatem totalem voco illam, quæ ex vtraque conflatur. IV. Mensuram velocitatis, vel accelerationis voco magnitudinem in qua sectiones ad certam positionem inter se parallelæ, sunt vt velocitates, vel accelerationes.

PROPOSITIO XXXVI.

Sint duæ figuræ quæcunque f g h b a, e i l d c (*Fig.* 71.) similes & similiter positæ, ita vt si rectæ a b, c d secentur proportionaliter vtcunque in q, f; & per q, f ducantur ordinatim applicatæ q g, f i æquidistantes rectis f a, e c; sicut a b ad c d, ita sit q g ad f i.

Ostendendum est si magnitudo A intelligatur deferri per rectas d c, b a, ita vt mensura velocitatum sint figuræ e i l d c, f g h b a, tempus quo defertur per spatium d c esse æquale tempori quo defertur per spatium b a.

Quoniam enim vt sunt spatia f d, q b, ita ad positionem rectæ f a sunt velocitates f i, q g, vbicunque sumantur puncta f, q, dummodo rectæ a b, c d secentur proportionaliter; patet tempora quibus decurruntur d s, q b esse æqualia, cùm vt spatia decurrenda ita perpetuò sint vires cursus, siue velocitates: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVII.

IDipsum aliter demonstrare (*Fig.* 71.)

Istud quoque demonstrari potest per parallelogramma deficientia vel excedentia descripta: si enim proportionaliter diuidantur a b, c d in segmenta quotcunque, numero vtrinque æqualia a q, q r, r b, & c s, s t, t d; vt est quadratum a b ad c d, ita erit parallelogrammum a m g q ad c o i s, & parallelogrammum q n h r ad parallelogrammum s p l t, & ita de aliis: ergo vt quadratum a b ad c d ita omnia simul parallelogramma priora, ad omnia simul consequentia. Quoniam verò proportio rectæ a b ad ipsam a b componitur ex proportione rectæ a b ad c d, & ex proportione ipsius c d ad a b, tempus autem parallelogrammorum priorum ad tempus consequentium habet proportionem compositam ex iisdem proportionibus, patet tempus parallelogrammorum priorum esse æquale tempori posteriorum.

Cùm igitur tempus parallelogrammorum priorum sit perpetuò idem cum tempore posteriorum, & quò plura vtrinque sunt parallelogramma, eò fiat minus tempus parallelogrammorum priorum deficientium, minusque etiam posteriorum, semperque accedant decrescendo propiùs ad tempus figurarum similium: accederent autem propiùs crescendo si parallelogramma priora forent excedentia a f y q, q g z r, r h D b & posteriora c e u s, s i x t, t l E d. Hoc autem posito patet per reductionem ad impossibile ostendi tempora figurarum æqualium, adhibita videlicet methodo vsurpata sæpius ab antiquis Geometris, cuius compendium extat apud Bullialdum libelli de inscriptis figuris in septima propositione si assumantur deficientia; vel in sexta si excedentia: nam deficientium tempus est maius, excedentium minus: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex demonstrandi ratione iam vsurpata liquet virtutem figuræ alicuius non ita intelligi debere, vt sicut omnes partes illius sunt simul, ita omnes velocitates repræsentatæ per illius dimetientes parallelas rectis f a, c e existant aliquando simul; id enim & alienissimum à mente nostra, & absurdissimum est. Sensus itaque noster est, successiuè esse inter se velocitates, vt dimetientes figuræ: non autem sicuti dimetientes illæ existunt simul, ita existere simul omnes velocitates, quæ per illas repræsentantur. Quæ verò anno superiore de hoc argumento edidimus, ad ista debent reduci sicubi fortè discrepent. Incredibile dictu est quam cautè incedere debeat quisquis tempora, velocitates & spatia inter se geometricè comparat.

PROPOSITIO XXXVIII.

DVæ figuræ (*Fig.* 72.) f g h r a, e i l t c insistant rectis a r, c t & ita sint inter se vt si a r, c t secentur proportionaliter vtcunque

in q, f, sitque vt, a q ad q r, ita c s ad f t; vt f a ad c e ita fit ordinatim applicata q g ad ordinatim applicatam f i.

Ostendendum est si vt c t recta ad a r, ita fiat e c recta ad a x, tempus respondens uelocitati figuræ f a r h g ad tempus figuræ c e i l t esse vt rectam x a ad f a.

Super rectâ a r construatur figura a x d r, similis figuræ e c t l. Ergo per superiorem tempus figuræ x a r d est æquale tempori figuræ e c t l. Præterea quoniam vt f a ad e c, ita ponitur q g ad f i, & vt e c ad x a, ita f i ad q b: ergo ex æquo vt fa ad x a, ita q g ad q b. Quoniam igitur duæ figuræ x a r d b, f a r h g ad positionem rectæ x a sunt condicta ratione vt recta x a ad f a, tempus velocitatis figuræ x a r d b ad tempus figuræ f a r h g erit vicissim vt recta f a ad a x. Istud enim ex eo patet quod perpetua lege sint in illa ratione quam habet recta x a ad a f, ac proinde vt velocitates ita reciprocè debent esse tempora. Quod si cui istud non videatur satis demonstratum, poterit aliam sumere demonstrationem ex methodo qua in 37. propositione vsi sumus ad probandam trigesimam sextam more Antiquorum Geometrarum.

Quoniam ergo vt f a recta ad f a, ita per 35. prop. est tempus velocitatis e c t l ad tempus velocitatis a x b d r, vt autem f a ad a x, ita per præsentem est tempus velocitatis a x b d r ad tempus velocitatis a f g h r: ergo ex æquo vt recta a f ad a x, ita est tempus velocitatis e c t l, ad tempus velocitatis a f g h r: & inuertendo tempus figuræ f a r h g ad tempus figuræ c e i l t est vt recta a x ad f a, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam proportio rectæ f a ad a x componitur ex duabus nempe rectæ f a ad c e, & rectæ c t ad a r, vel e c ad a x: si vt f a ad c e, ita fiat a r ad a y proportio rectæ c t ad a y componetur ex iisdem duabus nempe ex ratione rectæ c t ad a r & rectæ f a ad c e: ergo vt a f ad a x, ita c t ad a y: ergo tempus figuræ f a r h g ad tempus figuræ c t l i e est vt recta a y ad c t.

PROPOSITIO XXXIX.

SI iisdem manentibus (*Fig.* 72.) figuræ f a r h, e c t l sint trapezia, & vt recta f a ad h r, ita sit recta e c ad t l, ostendendum est si a r, c t secentur vtcunque proportionaliter in q, s, rectam q g ad s i esse vt rectam a f ad c e, ac proinde habere proprietatem quam superior propositio assumit adesse in figuris f a r h, e c t l.

Rectæ f h, e l productæ, occurrant rectis a r, c t in m, n. Quoniam vt f a ad h r, ita est e c ad t l, & vt f a ad h r ita etiam est m a ad m r; atque vt e c ad l t, ita n c ad n t; erit vt m a ad m r ita n c ad n t, & per conuersionem rationis vt m a ad a r, ita n c ad c t; & alternando vt m a ad n c, ita a r ad c t: sed vt a r ad c t, ita est a q ad c s: ergo vt m a ad c n, ita a q ad c s, & alternando vt m a ad a q, ita n c ad c s, & per conuersionem ratio-

nis vt m a ad m q, ita n c ad n s; sed vt m a ad m q, ita f a ad q g: & vt n c ad n s, ita e c ad ſ i: ergo vt f a ad g q, ita c e ad ſ i; & alternando vt f a ad c e ita q g ad ſ i, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XL.

Lineæ f g h, e i l ſint parabolicæ (*Fig*. 73.) eaſque tangant rectæ a r, c t in punctis m, n.

Oſtendendum eſt idem quod in ſuperiore.

Ducantur rectæ m f, n e, occurrantque rectis q g, r h, ſ i, t l in punctis b, x, y, z. Quoniam per ſuperiorem vt f a ad e c, ita eſt q b ad ſ y; erit alternando vt f a ad q b, ita e c ad ſ y; ſed vt quadratum f a ad q b, vel vt quadratum m a ad m q, ita per duodecimam tertij tetragoniſmicorum eſt recta f a ad q g, & ita etiam eſt recta c e ad ſ i: ergo vt recta f a ad q g ita eſt recta c e ad ſ i, & alternando vt recta f a ad c e, ita recta q g ad ſ i, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLI.

Lineæ f g h, e i l maneant parabolicæ (*Fig*. 74.) ſed earum diametri ſint m a, n c, & ordinatim applicatæ f a, c e.

Oſtendendum eſt idem quod in ſuperiore & in trigeſima octaua.

Ducantur vt in ſuperiore rectæ m f, n e, occurrantque rectis q g, r h, ſ i, t l in b, x, y, z. Quoniam per trigeſimam nonam vt f a ad c e, ita eſt q b ad ſ y; erit alternando vt f a ad q b, ita c e ad ſ y: ſed vt recta f a ad q b, vel vt recta m a ad m q, ita ex generatione parabolæ eſt quadratum f a ad q g, & ita etiam eſt quadratum c e ad ſ i; ergo vt quadratum f a ad quadratum q g, ita eſt quadratum c e ad ſ i; & alternando vt quadratum f a ad c e, ita quadratum q g ad ſ i; ac proinde vt recta f a ad c e, ita recta q g ad ſ i; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLII.

Recta b d (*Fig*. 75.) ſecta ſit bifariam in c, & ſuper baſibus b c, c d, inſiſtant trapezia a b c n, i c d m æqualia, ſimilia, & ſimiliter poſita: iungatur recta a m occurrens rectæ c i in l: ponatur magnitudo A ferri per rectam d c, primò quidem ita vt velocitatis menſuræ ſint trapezia æqualia & ſimilia, ſecundò verò ita vt velocitatis menſura ſit trapezium a b d m l.

Oſtendendum eſt tempus trapezij a b d m l eſſe duplum temporis trapezij i c d m vel a b c n, & quantum tempus additur tempori trapezij i c d m propter ablationem velocitatis trangularis i l m, tantum demi tempori trapezij a b c n propter additionem velocitatis triangularis l a n ſubcontrariè poſitæ triangulo m l i.

Quoniam

Quoniam trapezia a b d m l, i c d m habent latera a b, d m, & i c, d m proportionalia; per trigesimam nonam propositionem habebunt proprietatem assumptam in figuris trigesimæ octauæ. Si igitur vt c d ad b d hoc est vt vnitas ad binarium, ita fiat c i ad b o; vt est recta b o ad b a æqualem rectæ c i, hoc est vt binarius ad vnitatem, ita per trigesimam octauam erit tempus trapezij a b d m l ad tempus trapezij i c d m, quod erat vnum ex demonstrandis.

Rursus quoniam tempus trapezij a b d m est duplum temporis trapezij l c d m, quod est æquale tempori trapezij a b c n; erit tempus trapezij a b d m l æquale temporibus simul æqualibus inter se trapeziorum i c d m, a b c n: ergo quantùm additur propter ablationem velocitatis triangularis i l m, tantumdem demitur propter additionem velocitatis a n l: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIII.

ESto (*Fig. 76.*) quæcunque figura f a m i h comprehensa sub rectis m a, a f & sub linea curua, vel recta m i h. Intelligatur magnitudo A per lineam f a deferri ea totali velocitate, cuius mensura sit figura f a m i h ad positionem rectæ a m; vt sicut c i parallela rectæ a m se habet ad g h eidem parallelam, ita sit velocitas integra magnitudinis A positæ in quocunque puncto c, ad velocitatem totalem eiusdem consideratæ in quolibet alio puncto g. Tempus eiusmodi lationis sit B.

Ostendendum est si intelligatur eadem magnitudo A retro ferri à puncto a ad f, manente eadem totalis velocitatis mensura f a m i h, moram huius lationis esse æqualem tempori B.

Istud pro axiomate haberi potest, nec apparet vlla diuersitatis moræ causa, cùm eadem sit velocitatis mensura, nisi quod retrogrado ordine sumitur in regressu; sed nihil id obstat, vt patet, quo minus verissimum sit in casu præsenti, quod dici solet, *eandem reipsa esse viam Athenis Thebas, & Thebis Athenas*: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIV.

ESto f a m i h triangulum rectilineum (*Fig. 76.*) cuius latus a b diuisum sit bifariam in c; rectaque f c in g, & f g in e. Intelligatur magnitudo A ferri à puncto quietis f ad a terminum lationis manente eademvelocitatis integræ mensurâ f a m. Tempus quod in latione c g impenditur sit B.

Ostendendum est, tempus quod in latione c a consumitur esse æquale tempori eidem B.

Recta a c diuidatur bifariam in d & compleantur parallelogramma i c

Mm

do, m a d n; recta d o secet rectam m i in l, & puncta n, i iungatur recta n i. Patet triangulo m n l simile esse triangulum i o l & æquale, itemque triangulum f g h, cùm latera homologa m n, o i, g f sint æqualia & parallela, itemque latera homologa n l, l o, h g. Patet quoque cùm o l, l n sint æquales, quæcunque in triangulo o m n agatur parallela basi o n, eam bifariam secari occursu rectæ m l. Idem quoque liquet de triangulo n i o cuius basis o n bifariam secatur occursu rectæ i l. Ad positionem igitur rectæ a m condicta ratione æqualia sunt triangula m l o, m l n inter se, itemque triangula o l i, l n i. Id verò habent triangula o l i, n l m cùm ad verticem l sint constituta, vt subcontrariè iaceant. Ergo si per rectam o i deferatur magnitudo A facto lationis initio in i, & fiat triangulum i o l, vel i l n mensura velocitatis: eadem verò magnitudo feratur per rectam m n posito lationis initio in n, & mensurâ velocitatis triangulo m l n vel m l o, tempus lationis i o erit per superiorem æquale toti moræ lationis n m.

Compleatur parallelogrammum h g a r cuius latus h r occurrat rectis d l, c i in q, s, recta verò i o producta occurrat rectæ a m in p; agantur rectæ p q, o s. Patet igitur trapezio i c g h esse æquale, simile & similiter positum trapezium p a d q, & trapezium o d c s: patet quoque trapezium m a d o ad positionem rectæ am esse duplum condicta ratione trapezij p a d q, hoc est rectæ m a parallelas trapezij illius esse duplas parallelarum trapezij istius: eademque de causa parallelas trapezij n d c i esse duplas trapezij o d c s.

Si igitur magnitudo A feratur à puncto d ad punctum a, & mensura totius velocitatis sit trapezium d q p a; magnitudo verò C eidem A prorsus æqualis feratur per eandem d a, sed mensura velocitatis ponatur trapezium d o m a; tempus quod impendet C in decurrendâ a d erit dimidium temporis quod insumet A in eadem rectâ a d percurrendâ; nam velocitates ad positionem rectæ a m sumptæ in trapezio maiore sunt singulæ duplæ velocitatum sumptarum in trapezio minore: ergo vt velocitates ita reciprocè tempora. Similiter tempus quod impendet C in percurrendo spatio c d erit dimidium temporis impensi currente magniudine A per idem spatium c d. Si igitur magnitudo A feratur per g c velocitate totali notata trapezio h g c i, tempus illius lationis erit æquale tempori quo ferretur per rectam c a lationibus c d, d a quarum mensura forent c i n d, d o m a. Quoniam verò per 42. prop. quantum tempus additur tempori trapezij n d c i propter ablationem velocitatis triangularis n l i, tantum demitur tempori trapezij a m o d propter additionem velocitatis triangularis m o l subcontrariè positæ triangulo n l i; patet tempus quo fertur per g c esse æquale tempori quo fertur per c a: ergo tempus quod in latione c a consumitur est æquale tempori B, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Sicuti oſtendimus tempus quo percurritur ſecunda pars c g eſſe æquale tempori partis primæ a c, ita prorſus oſtendetur tempus tertiæ g e eſſe æquale tempori ſecundæ, & ſic de aliis vt patet: ſingularum igitur partium a c, c g, g e &c. tempora ſunt inter ſe æqualia. Iſtud porrò alia via generaliore oſtendetur in propoſitione quinquageſima.

COROLLARIVM II.

Anonymus hoc ipſum per reductionem, vt vulgò dicunt, ad impoſſibile primus demonſtrauit eximia ingenij ſubtilitate in epiſtola ad Gaſſendum miſſa & inſerta ſub calcem tomi ſexti. Porrò ex demonſtrationis progreſſu liquet ad hoc vt intra finitum tempus percurrantur partes illæ omnes ſpatij proportionales, tempus quod in percurrenda maiore impenditnr debere eſſe maius tempore quod inſumitur in percurrenda minore ſubſequente, non autem æquale vel minus.

PROPOSITI XLV.

Iisdem manentibus (*Fig.* 76.) in percurrendo ſpatio g f plus impenditur temporis quam in percurrendo ſpatio c g.

Quoniam enim velocitas deſignata triangulo h g f habet tempus æquale tempori velocitatis notatæ triangulo i f h æquali, ſimili, & ſimiliter poſito; cùm tempus velocitatis h f i minuatur additione velocitatis h f c g, patet velocitati h g c i reſpondere tempus breuius tempore velocitatis h g f, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVI.

Ex g h producta (*Fig.* 76.) abſcindatur in ſchemate ſuperiore recta h t æqualis ipſi g h & ducatur recta f t occurrens rectæ c i in u; ponatur magnitudo B habere velocitatis ſuæ totalis menſuram triangulum f u c, ſicuti magnitudo A triangulum f h g; ac proinde magnitudo B duplo ſit velocior magnitudine A, & incipiant eodem momento moueri à puncto f.

Oſtendendum eſt tempus quo magnitudo B deferetur ad punctum c eſſe minus tempore quo magnitudo A deferetur ad punctum g.

Quando enim magnitudo B peruenerit ad g, cum velocitas illius t g f ſit dupla velocitatis h g f pertinentis ad magnitudinem A, inſumpſerit tempus æquale dimidio moræ quam inſumit A in percurrenda linea f g: ſed tempus quod B impendit in percurrenda parte g c eſt per ſuperiorem breuius tempore quod inſumpſit in decurrenda parte f g; eſt ergo breuius dimidio temporis quod A ponit in decurſu rectæ f g. Cum igitur B in motu per f g conſumat dimidium temporis competentis magnitudini A pro decurſu ſpatii f g, & in motu per g c impendat minus dimidio, patet totum tempus lationis f c pro magnitudine B eſſe minus tempore lationis f g pro magnitudine A, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex modò demonstratis patet quid responderi oporteat Gassendo dum tomo 3. pag. 568. n. 10. Lugdunensis Editionis ita interrogat. *Quaeso quid impediat quominus illud* (nempe B) *perueniat in e eodem tempore quo istud* (videlicet A) *in g?* Responderi enim debet præsentem demonstrationem illi rei obstare; eandemque obstituram si ingenita virtus motrix & proportionalis addatur vtrique magnitudini motæ.

PROPOSITIO XLVII.

IIsdem manentibus (*Fig.* 76.) ostendendum est magnitudinem A ex puncto f ad partes g deferri non posse si totius velocitatis mensura ponatur esse triangulum f m a, & si certum quo incipiat moueri temporis initium statuatur.

Lata enim si fieri potest sit ad punctum a intra tempus B; recta f a secetur bifariam in c; tempus autem quo percurrit spatium c a sit C; erit B maius tempore C; poteritque C toties repeti, vt multiplex ipsius sit maius tempore B, illud multiplex sit D; numerus verò denominator eiusdem multiplicis vel binarius, vel ternarius, vel quaternarius &c. sit E. Quot habet vnitates E, tot sumantur, a c, c g, g e, e b continuè proportionales in ratione rectæ f a ad f c; hoc est in ratione duplâ: sumi enim possunt cùm sint infinitæ numero. Quoniam temporis spatia quæ in decurrendis rectis e b, e g, g c, c a impenduntur sunt per 44. prop. singula æqualia tempori C, erunt illa simul spatia æqualia tempori D, cùm illa simul sumpta ex vna parte, & D ex alia sint æque multiplicia spatij C. Magnitudo igitur A delata ex puncto b ad a insumpserit tempus D maius tempore B quo percurri ponitur tota f a: atqui B totius lationis tempus esse maius quàm D tempus partis patet: erit ergo maius & minus, quod est absurdum. Non ergo moueri potest ad quodcunque punctum a designatum in linea f g ad partes g, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Magnitudo A incipiat moueri à puncto g virtute motrice ingenitâ g h, quæ in motu augeatur iuxta rationem rectarum parallelarum i s, q l, m r inclusarum inter rectas m h, h r; ita vt idem eueniat in isto casu in percurrenda linea g a quod in alio, solumque discrimen in eo sit quod virtus g h hîc sit ingenita, ibi aduentitia. Ex demonstrationis propositæ methodo liquet non sequi ex hac hypothesi absurdum demonstratū in præsenti propositione. Cùm enim ad punctum h non sint nisi numerò finiti termini progressionis duplæ cuius primus terminus sit a c, non poterunt sumi post primum terminum a c tot termini quot vnitates continentur in numero E: demonstrationis enim ratio ostendit tot posse sumi, quia sunt quotcunque post a c, ita vt nullo numero finito exhauriri possint.

PROPOSITIO XLVIII.

IN casu primi postulati (*Fig. 76.*) dari videlicet virtutem motricem natiuam graui descendenti, non rectè objicitur ex demonstratione superioris propositionis motum fore impossibilem, vel in instanti, si vt contraria opinio vult, acceleratio velocitatis fiat iuxta rationem spatiorum quæ decurruntur.

Ista propositio planè aperta est, ex corollario proximè superioris propositionis, virtus enim motrix natiua repræsentatur parallelogrammo g h r a, cùm punctum g possit vbique designari inter a & f pro modo virtutis natiuæ designatæ latere a r parallelogrammi a r h g. Igitur si incrementa velocitatis fiant juxta rationem rectarum s i, l q vel quod idem est h s, h q aut g c, g d, ratio illa quæ motum fieri non posse probat in superioris propositionis casu, cessat in præsentis casu, quem asserit opinio illa quam Gassendus impugnandam suscepit: ergo &c.

COROLLARIVM.

Ex demonstratis patet liti isti finem adhuc impositum non esse verissimâ illâ demonstratione quam subtilissimus Anonymus Gassendo proposuit, cùm quantumuis vera sit, non vrgeat in casu controuersiæ quem ille, vt patet, aliter se habere assumit. Ponit enim corpus decidens ex se esse ἀβαρὲς, cùm tamen re ipsa sit βάρος ἔχει quem vtrumque casum distinxit Aristoteles l. 3. de cœlo text. 26. & 27.

PROPOSITIO XLIX.

MAneat (*Fig. 77.*) mensura velocitatis triangulum m f a, & magnitudo A intelligatur ferri per rectam f a ita diuisam vt f g sit dupla rectæ f e, ipsiusque f g dupla sit f c, istiúsque f a, & ita deinceps in infinitum: vt segmenta e g, g c, c a sint in proportione continua numerorum 1. 2. 4. &c. Si ergo g c diuidatur bifariam in l, erunt tres e g, g l, l c æquales; & si c a diuidatur quadrifariam in i, h, r erunt illius segmenta æqualia prioribus. Sunt ergo æqualia f e, e g, g l, l c, c i, i h, h r, r a.

Ostendendum est tempora quæ impenduntur in decurrendis partibus æqualibus f e, e g, g l &c. posito motûs initio in f, non decrescere secundum proportionem subduplam, ita vt tempus partis f e sit duplum temporis conuenientis parti e g, & istud duplum temporis competentis parti g l, &c.

Parti f e tempus competens est conflatum ex infinitis quorum singula æquant tempus partis e g vt ex quadragesima quarta liquet: ergo in isto primo pari non seruatur illa proportio. Rursus parti e g idem competit spatium quod duabus simul g l, l c per quadragesimam quartam eandem: atqui non conueniret iuxta illam rationem nisi dimidium & quadrans ip-

ſius e g : ergo in iſto pari non ſeruatur proportio ſubdupla. Præterea partibus g c , c a per eandem quadrageſimam quartam competunt æqualia tempora :atqui iuxta illam rationem non conuenirēt niſi dodrans & quindecim ſexageſimæ quartæ partes ipſius g e : ergo non ſeruatur illa proportio : eodemque prorſus modo oſtenditur de aliis ; ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex ſimili demonſtrandi methodo oſtendetur neque in vlla alia proportione decreſcere eiuſmodi tempora. Vnde patet paralogiſmo laborare Gaſſendi diſſertationem tomi 3. pag. *629.* n. 8. vbi contendit aſtruere eiuſmodi proportionem in decrementis temporum,vt inde colligat *motum fore in inſtanti*, ſi vera foret hypotheſis de acceleratione grauium deſcendentium, facta in ratione ſpatiorum decurſorum.

PROPOSITIO L.

REuocetur ſchema propoſitionis quadrageſimæ tertiæ (*Fig. 76.*) & in eo rectæ f a proportio ad f c ſit ád libitum data, maneantque proportionales f a, f c, f g, f e.

Oſtendendum eſt tempora partium a c, c g, g e &c. habentium proportionem rectæ a f ad c f vt ex octogeſima ſecunda libri progreſſionum Gregorij à S. Vincentio conſtat, eſſe inter ſe æqualia.

Quoniam triangula f g h, i c f, m a f ſunt ſimilia, & eorum baſes f g, c f, a f ſunt continuè proportionales, duæ earum f a, f c ſecabuntur proportionaliter in c, g ideóque triangulorum differentiæ effectæ per rectas d l, c i, g h erunt ſimiles, nempe trapezium m a c i erit ſimile ſimilitérque poſitū trapezio i c g h. Rurſus quoniam ſimilia iſta trapezia ſunt menſura velocitatis quam ſucceſſiuè acquirit magnitudo delata A, tempora illis reſpondentia erunt æqualia per *36.* & ſic de aliis ; ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

En tibi vno fermè verbo demonſtratum illud egregium theorema Anonymi, quod nos in quadrageſima quarta demonſtrare tentauimus in vno præcipuè caſu, ſed longiore anfractu. Hic verò ſtatim ſe ſe offert veritas conſpicienda ; quæ tam abdita latuerat ante primam doctiſſimi Anonymi eius inuentionem, cui ſine dubio huius theorematis laus primaria debetur.

COROLLARIVM II.

Pone per f duci f x parallelam rectæ a m, & rectas a f, f x fieri aſymptotos cuiuſlibet hyperbolæ ; cùm f a, f c, f g, f e &c. ſint proportionales, ſi per a, c, g, e &c. agantur æquidiſtantes aſymptoto f x ; ſpatia inſiſtentia rectis a c, c g, g e &c. comprehenſa ſub arcu hyperbolæ & ſub parallelis aſymptoto f x eſſe æqualia inter ſe demonſtrauit Gregorius à S. Vincentio propoſitione 109. de hyperbola. Hinc verò liquet mira ſimilitudo in-

ter tempora quibus percurruntur partes a c, c g, g e, & inter ſpatia hyperbolica inſiſtentia iiſdem partibus; ſicuti enim tempora ſunt æqualia inter ſe, ita & ſpatia.

PROPOSITIO LI.

SIt parabola m o ſ f (*Fig.* 78.) quam recta a f tangat in f, & cuius diameter æquidiſtet rectæ a m: recta f a ſit dupla rectæ f c, ipſaque f c rectæ f g. Intelligatur mobile A deferri per rectam f a initio lationis conſtituto in f, ita vt menſura velocitatum ſit figura m ſ f a.

Oſtendendum eſt tempus quod impenditur in decurrenda prima & maxima parte a c eſſe dimidium temporis quod impenditur in ſecunda conſequente g c, & ita deinceps de reliquis ad partes f conſtitutis.

Quoniam tres rectæ f a, f d, f c ſunt proportionales, & vt ex quadrageſima liquet rectæ a m, c s, g q ſunt vt quadrata f a, f c, f g, erunt quoque ipſæ rectæ proportionales; ergo vt figuræ m a c ſ o latera a m, c s; ita figuræ ſ c g q latera ſ c, g q. Si igitur vt c g ad c a, hoc eſt vt vnitas ad binarium, ita fiat c s ad quartam f u, vt eſt f u recta ad a m ita per quadrageſimam & trigeſimam octauam erit tempus velocitatis m a c s, ad tempus velocitatis ſ c g q. Quoniam igitur recta c g ad c a rectam eſt vt vnitas ad binarium; erit f u dupla rectæ c s. Præterea quoniam quadratum f a eſt quadruplum quadrati f c, erit a m quadrupla rectæ c s; ſed f u eſt dupla eiuſdem c s: ergo recta f u ad a m eſt vt binarius ad quaternarium vel vt vnitas ad binarium: ergo tempus quod impenditur in percurrenda parte a c eſt dimidium temporis quod impenditur in decurſu conſequentis. Methodi verò ratio idem oſtendit de antecedente c g reſpectu tertiæ conſequentis, & ita deinceps: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Ex demonſtratis liquet proportionem rectæ m a ad c s eſſe maiorem rectæ m a ad c i, vel rectæ ſ a ad f c. Cùm autem tempus maioris ſit minus tempore minoris, patet ex corollario ſecundo quadrageſimæ quartæ, motum à puncto f ad a eſſe multò magis impoſſibilem. Cæterùm ſi f a, f c ſint in alia quauis proportione caſus definietur ſimili methodo, vt patet.

COROLLARIVM II.

Sicuti in corollario quadrageſimæ ſeptimæ remedium huic incommodo factum eſt, ita hîc quoque fiet, ſi f n ponatur menſura grauitatis natiuæ, & initium motûs ſtatuatur in g, verſus a: infinitudo enim partium quibus decurrendis opus foret infinitum tempus, relinquetur ad partes f rectæ g f, poſitâ menſurâ velocitatis totalis figurâ m o i q f a.

COROLLARIVM III.

Istud theorema planè nouum est, atque mihi ipsi illius inuentori incredibile adhuc foret, nisi vi demonstrationis penitus cogerer non resilire ab assensu: hæc eadem assentiendi difficultas contigit mihi audito quinquagesimæ propositionis theoremate illo. Ex istis verò & ex sequentibus liquidò constat quanti intersit geometriam admiscere motui, dum de proportione accelerationum agitur; sine illa enim nihil certò statuitur, sæpiúsque itur in scopulos; illa autem adhibita inueniuntur res quæ admirationi sint diligentissimo naturę perscrutatori. Absit tamen vt de illa laude tantillum cogitemus, quam doctissimus Vendelinus in epistola ad Gassendum (habetur in tomo 6. Gassendicarum epistolarum pag. 428.) sibi tribuit his verbis. *Mersennus tum à me ante annum quærebat quid sentirem de casu grauium? addebat lapidem casurum in centrum vsque telluris spatio 6. horarum. At ego longè aliud inuenio, ac certus sum peruenturum ad centrum intra minuta horaria 12. Demonstratio longa est & pulcherrima, quæque de motu grauium multa hactenus ignorata patefaciet aliquando. Sed dum eam elucubro inchoatam à Nouembri postremo, interim hoc habeto, signum vnius vnciæ sphæricum nihilo cadere lentius, quàm ferreum globum 1000. librarum. Si miramur Archimedem in quadratura paraboles, mirabimur & huius demonstrationem problematis pulcherrimi, & verè non inutilis in commune bonum. Bercá Kal. May* 1633. Hanc ego demonstrationem non vidi vnquam; sed nec eius amicus Ricciolus de illa quicquam audiuit; meminisset enim illius, tom. 2 pag. 387. n. 13. & pag. 400. n. 11. vbi *euidentissimis experimentis coram multis testibus fide dignissimis contrarium constare asserit*; nempe sphæram vnius vnciæ longè tardiùs ferri sphæra mille pondo.

PROPOSITIO LII.

SIt vt in schemate quadragesimæ primæ (*Fig.* 74.) parabole f h m cuius diameter m a, ordinatim applicata a f. Intelligatur mobile A deferri per rectam m a initio lationis constituto in m, ita vt mensura totius velocitatis sit f h m a ad positionem rectæ f a: sit autem m a dupla rectæ m q, & ipsa m q rectæ m r, & ita deinceps.

Ostendendũ est tempus quod impenditur in decurrenda prima & maxima parte q a esse ad tempus secundæ q r, vt est quadrati diameter ad eiusdem latus, & ita deinceps de reliquis ad partes f iacẽtibus.

Quoniam tres rectæ m a, m q, m r sunt proportionales, & vt ex quadragesima prima liquet quadrata f a, g q, h r sunt vt iam dictæ rectæ, erunt ipsa quadrata f a, g q, h r proportionalia, & inter se vt binarius ad vnitatem; ergo recta f a ad q g est vt quadrati diameter ad latus eiusdem: ergo vt figuræ f a q g latera f a, q g, ita erunt figuræ g q r h latera g q, r h: si igitur vt r q ad q a, hoc est vt vnitas ad binarium, ita fiat q g ad m z; vt est m z recta ad a f, ita erit per quadragesimam primam & per trigesimam

trigesimam octauam, tempus velocitatis f a q g ad tempus velocitatis g q r h. Quoniam igitur recta q r ad q a est vt vnitas ad binarium, erit m z dupla rectæ q g, & ipsa m z ad q g erit potestate vt quaternarius ad vnitatem. Quoniam verò recta f a ad q g est potestate vt binarius ad vnitatem: erit m z ad f a potestate vt quaternarius ad binarium vel vt binarius ad vnitatem; ergo m z ad f a est longitudine sicut diameter quadrati ad eiusdem latus: ergo tempus lationis a q est ad tempus lationis q r, vt diameter quadrati ad latus eiusdem quadrati. Methodi verò ratio idem ostendit de consequentibus: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam tempus partis maioris a q est maius tempore minoris qr, patet absurdum in quod deducit quadragesima octaua propositio hîc non habere vllum locum. Patet quoque proportionem rectæ f a ad q b dimetientem trianguli esse maiorem proportione rectæ f a ad q g.

PROPOSITIO LIII.

Iisdem vt in proximè superiore manentibus (*Fig.* 74.) velocitates sunt vt tempora à puncto m initio lationis computata.

Compleantur parallelogramma a f p m, q g o m, r h d m. Quoniam in superiore ostendimus tres rectas a f, q g, r h esse proportionales, & rectam a f ad q g esse vt diametrum quadrati ad eiusdem latus, erunt tres rectæ p m, o m, d m in eadem ratione diametri ad latus: ac proinde per octogesimam secundam libri Progressionum Gregorij à S. Vincentio recta p o ad o d erit vt m p ad m o; hoc est vt diameter ad latus quadrati. Rursus quoniam in superiore ostendimus tempus partis a q esse ad tempus partis q r vt est diameter quadrati ad eiusdem latus; erit tempus partis a q ad tempus partis q r, vt est recta p o ad o d. Pari verò ratione si continuentur a q, q r, r y, & compleatur parallelogrammum y u M m, tres rectæ o m, d m, M m erunt proportionales, ergo vt o d recta ad d M, ita erit tempus velocitatis g q r h ad tempus velocitatis h r y u. In recta igitur p m sunt mensuræ omnium temporum respondentium omnibus terminis progressionis a q, q r, r y &c. vt ex 82. illa propositione Gregorij à S. Vincentio liquet. Cùm igitur recta o m æquet rectam q g, erit velocitas q g mensura temporis quo defertur A per rectam m q; & ita etiam r h velocitas ostendetur mensura temporis quo defertur A per rectam m r: ergo tempora totalia ab initio lationis computata sunt vt ordinatim applicatæ ad diametrum m a parabolæ m u f; sed illæ ordinatim applicatæ ponuntur esse velocitates; ergo in progressione spatiorum m a, m q, m r &c. tempora sunt vt velocitates. Perinde verò idem ostendetur in qualibet alia progressione, hoc est, quamcunque rationem habeat recta m a ad m q: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Cùm ista hypothesis assumatur ad explicanda experimenta varia circa

grauium descendentium accelerationem, patet in illa esse geometricè verum illud *tempora totalia esse vt velocitates etiam totales.* Et velocitates siue virtutem motiuam debere crescere secundum incrementa ordinatim applicatarum ad parabolæ diametrum m a: & spatia m q, m r, m y &c. esse vt quadrata temporum vel velocitatum.

PROPOSITIO LIV.

IIsdem manentibus (*Fig. 79.*) magnitudo A intra tempus B per velocitatem vniformem a f ponatur percurrere posse spatium m a: datum sit quodcunque aliud tempus C maius ipso B quantùscunque sit excessus, etiam si plures annos contineat quàm sint scrupula horaria in ipso anno. Vt est C ad B ita fiat f a velocitas ad a x velocitatem; per x ducatur x o complens parallelogrammum x a m o, occurrens parabolæ m g f in g; per ipsum g ducta sit g q complens parallelogrammum o m q g.

Ostendendum est velocitatem quam haberet magnitudo A in puncto q, inchoando motum à puncto m ad a, & posita mensurâ velocitatis acceleratæ figurâ f g m a; si sola & sine vllo alio incremento deferret magnitudinem A per lineam m a, peruenturam esse ab extremo m ad extremum a intra tempus C, & non citiùs aut tardiùs.

Quoniam enim completo parallelogrammo f a m h, vt est magnitudinis A constitutæ in puncto a velocitas f a ad velocitatem x a, ita est tempus velocitatis vniformis designatæ per parallelogrammum x a m o, ad tempus velocitatis vniformis designatæ per parallelogrammum f a m h: tempus autem velocitatis a f h m ponitur B: ergo vt est velocitas x a ad velocitatem a f, ita est tempus B ad tempus velocitatis a x: sed ita est tempus B ad C: ergo tempus velocitatis a x vniformis est C, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Apertum est magnitudinem A carêre debere omni virtute natiuâ dum motu accelerato ponitur percurrere rectam m a assumptâ mensurâ velocitatis figurâ f g m a. Nam si tantillam habeat vt m z latus parallelogrammi z m a y, manifestum est tempus C ad tempus B debere habere proportionem non maiorem proportione rectæ f a ad a y: si enim fuerit maior, recta a x erit minor quàm a y; ac proinde in toto motu accelerato semper adfuerit velocitas m z vel a y maior velocitate a x.

COROLLARIVM II.

Gassendus tom. 3. pag. 550. n. 29. & 629. n. 8. ponit lapidem ex laqueari ad tabulatum interuallo duarum orgyiarum dissitum peruenire motu vniformi per virtutem æqualem ei quam initio descensûs accelerati habuisset; & computando demonstrat annos 5322381. & ampliùs interlabi

oportere ab initio illius motûs ad finem vſque. Hanc verò lapidis in deſcendendo ſegnitiem vocat *incredibilem*, vera tamen eſt ſi lapis ponatur non habere illam virtutem deorſum vergentem quam experimur, ſiue à tellure attrahente vt ipſe Gaſſendus vult, ſiue à Generante, ſiue aliunde inditam. Imò vt ex præſenti demonſtratione liquet, poſſet quotcunque myriadibus augeri annorum eiuſmodi cumulus. Falſa tamen omninò & incredibilis verè eſt, ſi lapis habeat virtutem illam quam natiuam dicimus, & quam dum manu illum è ſummo laqueari ſuſtinent pendulum, ſentiunt omnes. In iſta igitur hypotheſi virtutis natiuæ, examinanda nobis reſtant nonnulla, vt quæ vulgò dicuntur, ſcribuntur & creduntur nouerimus quatenus geometra concedere debeat. Is enim ſola veritatis regula vtitur, alieniſſimus à partium ſtudio quo mens temere ita excæcatur, vt partium ſuarum omnia probet, aduerſantium omnia improbet. Quod quidem malum etiam in Heterodoxis locum habet, vt de ſe ipſo Auguſtinus teſtatur libro de duabus animis c.9. *Ex quo accidebat vt quicquid Manichæi dicerent, miris quibuſdam modis, non quia ſciebam, ſed quia optabam verum eſſe, pro vero approbarem.*

PROPOSITIO LV.

MAneat parabola f g m a (*Fig.* 80.) cuius tangens o m, & ordinatim applicata f a: magnitudo A intelligatur habere virtutem natiuam deſignatam parallelogrammo q g x a, & intelligatur moueri per rectam q a, ita vt totius velocitatis menſura ſit figura q g l f a. Recta x o occurrat parabolæ in g; ſumatur quæcunque recta q B quæ ita diuidatur in s, vt quadratum q s ad quadratum q B ſit ſicut recta m q ad rectam m a. Ponatur recta ſ B menſura temporis quo percurritur tota q a, & diuidatur in quotcunque tempora B z, z c, ſ c æqualia vel inæqualia. Ex recta ſ q abſcindatur q y ipſi ſ q æqualis, & ponatur y s latus tranſuerſum hyperbolæ ſ E, cuius latus rectum ſit ſ F habens quamlibet rationem ad tranſuerſum: ex punctis c, z, B agantur c d, z D, B E ordinatim applicatæ ad axem hyperbolæ ſ E.

Oſtendendum eſt, ſi mobile iuxta velocitatis menſuram q g l f a inchoato motu à puncto q, & inſumptis temporibus ſ c, ſ z, ſ B, ponatur reperiri in punctis n, e, a; ſpatia decurſa q n, q e, q a eſſe vt quadrata d c, D z, E B.

Compleatur parallelogrammum g x f r, vt rectæ a f, q r ſint æquales, ac proinde quadratum q g ad q r ſit vt recta m q ad m a: erunt igitur rectæ q r, q B ſectæ proportionaliter in g & s. Intelligatur hyperbola g h cuius diameter tranſuerſa ſit T g dupla rectæ q g, diameter verò coniugata ſit m R dupla rectæ m q: ducantur ordinatim applicatæ n l, e b, &

compleantur parallelogramma q n l t, q e b u; rectæ verò f r, b u, l t productæ occurant hyperbolæ in h, i, p.

Quoniam per tertiam tertij tetragonismicorum tres rectæ m q, t p, t l sunt proportionales; itemque tres m q, u i, u b; itemque tres aliæ m q, h r, r f: rectæ r f, u b, t l, hoc est rectæ q a, q e, q n erunt vt quadrata h r, i u, p t. Præterea rectæ g t, g u, g r erunt vt tempora quibus decurruntur spatia q n, q e, q a; id enim constat ex quinquagesima tertiâ, cùm q g l f a portio parabolæ m g f a ibi tractatæ, sit mensura velocitatis totalis: sed rectæ f c, f z, f B ponuntur esse vt eadem tempora; ergo vt rectæ g t, g u, g r, ita f c, f z, f B: ergo cùm q s ad q B sit vt q g ad q r; vt sunt q g, q t, q u, q r, ita erunt q s, q c, q z, q B. Cùm igitur per vigesimam primam primi conicorum quadrata h r, i u, p t sint vt rectangula T r g, T u g, T t g: quadrata verò B E, z D, c d sint vt rectangula y B s, y z s, y c s, triáque illa rectangula sint inter se vt tria ista ob similem rectarum T r, y b sectionem in punctis g, t, u, r & s, c, z, B, patet vt quadrata h r, u i, t p, ita esse quadrata E B, D z, d c. Vt igitur quadrata E B, D z, d c ita sunt spatia decursa q a, q e, q n, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quoniam spatia decursa q n, q e sunt vt quadrata t p, u i; quadrata autem t p, u i sunt vt rectangula T t g, T u g, vel vt y c s, y z s patet spatia q n, q e esse vt rectangula y c s, y z s.

COROLLARIVM II.

Si virtutis natiuæ mensura poneretur parallelogrammum m a M G quodcunque ad partes oppositas parallelogrammo m o x a, & figura G m l f M constitueretur mensura totius velocitatis; temporum, velocitatum, & spatiorum comparatio ita perturbaretur, vt nihil certum ex demonstratis hactenus quod colligerem, occurrerit. Hinc factum est vt natiuam virtutem, prout à nobis iuncta fuit cum parabola, crediderim iunctum iri ab iis qui Galilæi hypotheses reducere volent ad grauia considerata cum grauitate illa natiua, quam re ipsa obtinent.

PROPOSITIO LVI.

CONferuntur duæ illæ hypotheses, & ostenduntur non tanto differre, vt vna refellatur apertè per obseruationes, quibus altera ad amussim quadret.

Esto (*Fig.* 81.) triangulum m a f, cuius latus f a, ita diuisum sit in c, vt sicut est septenarius ad ternarium ita potestate sit f a ad f c, & f c ad f g, itémque f g ad e f, demúmque f e ad f b. Erunt igitur per demonstrata in 82. progressionum apud Gregorium à S. Vincentio, vt f a ad f c, ita continuè a c, c g, g e, e b. Per b ducatur b n parallela rectæ a m, complens triangulum f b n; per n ducatur n o latus parallelogrammi n o a b, quod ponatur mensura natiuæ velocitatis magnitudinis A; trapezium ve-

rò n m a b ſtatuatur menſura totius velocitatis magnitudinis A delatæ ex b in a per rectam b a. Quoniam a f recta ad f g ponitur longitudine vt ſeptenarius ad ternarium, vel vt 63. ad 27. Si 63. ducatur in 27. gignetur numerus 1701. cuius radix quadrata eſt circiter 42. ac proinde numeri 63. 42. ſunt vt longitudines a f, c f; vel vt a c, c g. Quatuor igitur rectæ a c, c g, g e, e b ſunt vt numeri 27. 42. 63. 98. circiter, ita vt error non attingat vnitatem integram: ſumma verò iſtorum quatuor numerorum erit 230. Talium igitur 230. erit tota b a, qualium a c, c g, g e, e b ſunt 27. 42. 63. 98. Si igitur recta b a ponatur partium 240. erunt b e, e g, g c, c a partium circiter 28. 43. 65. 102. Ex propoſitione igitur quinquageſima tempora quatuor quibus percurruntur partes b e, g e, g c, ca ſunt inter ſe æqualia.

Venio iam ad experimentum Reuerendi P. Riccioli lib. 9. Almagesti ſect. 4. cap. 16. n. 11. quod in Bononienſi Aſinellorum turri altâ pedes 280. ſumpſiſſe ſe narrat. Is igitur cùm ante annum 1640. planè acquieſceret proportioni illi à Galilæo traditæ, parauit globum argillaceum vnciarum octo, cúmque ex ſumma illa turri demiſit, & tempus delationis dimenſus eſt per ſenas quaſque vibrationes perpendiculi ad id deſtinati conficientes ſimul horæ minutum vnum ſecundum, vel horæ vnius particulam ter milleſimam ſexcenteſimam. Expertus autem eſt globum confeciſſe pedes 15. poſt vnam temporis menſuram, ſiue poſt ſex vibrationes: poſt duas, 60. poſt tres, 135. poſt quatuor 240. Primum igitur interuallum inuenit pedum 15. ſecundum, 45. tertium, 75. quartum 105. qui numeri ſunt vt 1. 3. 5. 7. prout Galilæus primus eos exploraſſe dicitur. Iſta tamen interualla non exhauſerunt, vt patet, totam altitudinem turris ad baſim vſque, ſicuti optandum erat, & ſicuti optaſſe ipſe Ricciolus ſatis intelligitur ex varia mutatione menſuræ temporis; nam in alio experimento ſumpſit vibrationes ſex cùm vnius ſemiſſe in ſingulas temporis menſuras; attamen turris illa pedum 280. non fuit ſatis alta pro quatuor menſuris, & humilior pro quinque, vt idem Ricciolus exactè narrat.

Vt autem comparatio quam inſtituere paramus perſpicuè intelligatur habenda ſunt præ oculis duo ſubiecta latercula, quorum primo continetur iſtud Riccioli experimentum, cum quadratis vibrationum: alterum autem laterculorum repræſentat pedes in hypotheſi altera decurrendos, intra temporis ſpatia æqualia; intra primum, 28. intra ſecundum 43. &c. adduntur etiam quadrata vibrationum neceſſariarum ad hoc vt iuxta Riccioli & Galilæi hypotheſim percurreretur numerus pedum illi ſecundo laterculo adſcriptus. Reperiuntur verò iſta quadrata, ſi vt ſpatium 15. pedum laterculi primi ad ſpatium 28. pedum laterculi ſecundi, ita fiat vibrationum primi laterculi quadratum videlicet 36. ad 68. Iſte enim quartus numerus eſt quadratum vibrationum 8. circiter, ad hoc vt in hypotheſi Galilæi pedes 28. percurrerentur ab initio motus deſignato. Ita pariter vt ſpatium laterculi primi 60. ad ſpatium 72. laterculi ſecundi, ſic

Vibrationum numerus.	Spatia confecta ab initio motus definita pedibus Rom.	Spatia confecta in singulis temporibus.	Quadrata vibrationum.
I. Laterculum.			
6.	15.	15.	36.
12.	60.	45.	144.
18	135.	75.	324.
24	240.	105.	576.
II. Laterculum.			
8.	28.	28.	68.
13.	72	43.	173.
18.	137.	65.	328.
24.	240.	102.	5 6.

est vibrationum quadratum 144. ad 173. Hoc quoque pacto vt 35. ad 137. ita fiant 324. ad 328. Radices verò quadratæ illorum numerorum dant vibrationes laterculi secundi nempe 8. 13. 18. 24. circum circa.

Porrò ex conspectu & comparatione laterculorum liquet quæ in sententia secundi decurruntur æqualibus temporibus, in hypothesi laterculi Galilæana percurri debere non admodum diuersis temporibus, cùm postremum postremo quadret, nec tertium à tertio discrepet: secundum verò à secundo differat vna vibratione; primum denique à primo duabus. Quæ certè satis leuia sunt, nec obstant quo minùs totum id vel refundatur in vitium Obseruatorũ aliquod quamuis occultum, vel in aërem ambientem, vel in aliud simile. Gassendus accerimus huius hypotheseos assertor in dissertatione de motu impresso n. 35. pag. 556. tom. 3. edit. Lugdun. & in epistola ad P. Honoratum Fabrum Societatis nostræ pag. 167. tom. 6. candidè fatetur circa ipsa initia obseruari non posse iuxta quam progressionem numerorum fiat ista acceleratio, idque omnem diligentiam superare. Attendi quoque hic debet conditio experimenti à Ricciolo sumpti. Integrum tempus totius descensûs fuit nongentesima particula vnius horæ; diuisa verò fuit in viginti quatuor alias particulas vibrationibus totidem respondentes. Illa breuissima temporis morula globus octo vnciarum argillaceus summa pernicitate præteruolauit ducentos quadraginta pedes romanos; interea verò annotatæ sunt vibrationes, designatæ sunt oculis partes muri quibus sphæra illa respondit inter cadendum. Hæc certè omnia suadent in pedibus numerandis & attribuendis breuiculis illis temporis momentulis posse committi errorem nonnullum ab exercitatissimo quoque.

His ita perpensis mihi nondum satis liquet cur P. Ricciolus istam Baliani & Cabæi, vt ipse testatur, sententiam de numero opinionum eximat, detrudatque inter errores. Neque enim satisfacere videtur dicendo *illius oppositum sibi & aliis qui testes adfuerunt obseruationibus suis, iam non esse probabile tantum, sed euidens ac certum infallibili scientiâ Physico-mathematicâ*. Nam non est adhuc euidens hæc experimenta, esto certa sint, opposita esse sententiæ illorum Autorum; nec Ricciolus ostendit si vera sit Baliani sententia, non posse esse vera illa experimenta. Adnotandum verò hic censeo Balianum nobilem Genuensem deditissimum fuisse experimentis capiendis, &

cùm initio Galilæi ſententiam ſequeretur, diſceſſiſſe poſtea ab illa, vt ipſe Riccíolus narrat lib. 9. ſect. 4. cap. 16. n. 24. Noſtram itaque hac de re ſententiam concludimus hoc dicto, nondum allata eſſe experimenta quæ falſitatis conuincant Balianam opinionem: ergo &c. quod erat nobis conſtitutum.

COROLLARIVM I.

Aduertendum eſt quod in ſecundis & quartis ſpatiis laterculi vtriuſque inuicem collatis nulla ferè ſit diſcrepantia, maior verò exiſtat in aliis, id oriri ex optione proportionis quam poſui eſſe inter interualla a f, a c, & inter velocitates a o natiuam, & o m acquiſitam, dum magnitudo A ponitur in puncto a. Cùm enim obſeruata à Ricciolo interualla narrentur eſſe vt 1. 3 5. 7. (quod quidem mathematicè eſſe non poteſt ſaluâ natiuâ grauitate mobilis, ſi interualla ſint vt quadrata temporum, vt in quinquageſima quinta oſtendimus) ſumpſi proportionem rectæ a f ad f g eam ipſam eſſe, quæ numeri 7. ad 3. Quod ſi poſuiſſem diuerſam, hoc eſt, aut paulò maiorem, aut paulò minorem, inæqualitas ſpatiorum obtigiſſet diſpenſata aliter, nec tanta apparuiſſet in primis & tertiis ſpatiis. Iſtud itaque mihi adſcribi debet; methodo tamen pari poterit ſeligi proportio rectæ a f ad f g quæ numeris illis aptiùs adhuc congruat: cúmque proportio velocitatis a o ad m o ignota nobis aliunde ſit quàm ab obſeruationibus, ea deligenda erit quæ illis quàm optimè conueniat. Verum quidem eſt, ſi velocitas b n vel a o ad velocitatem g h ſit vt ternarius ad ſeptenarium, non poſſe aliter diuidi illa quatuor ſpatia, quàm à nobis diuiduntur in ſecundo diagrammate: ſed ad ſtatuendam eiuſmodi proportionem nihil inducere nos debet, niſi concordia illius cum experimentis. Quapropter cùm non dubitem quin alia proportio rectæ a f ad a c meliùs adhuc reſponſura ſit illis, eam eligendam relinquo ſtudioſo veritatis indagatori; methodus verò ſemper erit eadem.

COROLLARIVM II.

Si eadem magnitudo A ponatur ferri bis per idem ſpatium b a, ſemel quidem iuxta Galilæi ſententiam, & tempus lationis ſit B, iterum verò iuxta Baliani hypotheſim tempuſque lationis ſit C, methodus præſentis propoſitionis (vt patet) non aſſumit tempora B, C fore æqualia; ſed tantùm ſi ſpatium b a diuidatur in quatuor partes iuxta numeros ſecundi laterculi 28. 43. 95 102. quatuor partes temporis illis reſpondentis eſſe ferme inter ſe æquales in hypotheſi Galilæana, in Balianiana autem quatuor partes temporis C illis reſpondentes eſſe prorſus æquales inter ſe. Hoc enim ſemel conſtituto quatuor partes tam temporis B quàm C eſſe debere in vtraque hypotheſi, ſaltem quantum ad ſenſum attinet, æquales, nulla ſupereſt nobis ratio qua diſcernamus vtrum magnitudo A ſiue globus argillaceus ex ſumma turri Aſinellorum demiſſus à P. Ricciolo inſumpſerit cadendo tempus B, potiùs quàm tempus C. Quæ enim?

PROPOSITIO LVII.

SAtisfit dubio occurrenti aduersus hactenus demonstrata de natiua virtute.

Vnum prætermissum videmus, quod ne labem aliquam illi de natiua virtute opinioni inferre possit hic nobis proponendum simul & dissoluendum censemus Ostendimus in 48. propositione virtutem natiuam grauis impedire ne demonstratio Anonymi noceat hypothesi isti: atqui dum graue sursum proiectum incipit deorsum recidere, in puncto illo reflexionis virtus natiua deorsum premens eliditur & quasi nulla redditur per æqualem vim sursum trahentem, & æquilibrium constituentem; graue igitur in hoc casu moueri non poterit. Respondeo isto argumento demonstrari sententiam nostram & Aristotelis l. 8. phys. c. 7. & 8. *dari nempe quietem in puncto reflexionis*. In isto igitur casu plures Philosophi secuti Aristotelem quem rectè explicant Conimbricenses in ca. 8. libri illius quæst. 1. contendunt dari morulam aliquam temporis qua proiectum quiescat ab omni motu, quia tunc perinde est ac si nulla illi esset virtus deorsum, nullaque sursum vergens; tantumque postea censetur acquirere virtutis deorsum quantum remittitur virtus sursum quia verò aër subiectus resistit motui deorsum & illa resistentia debet vinci virtute aliqua determinata, tantum debet remitti virtus sursum, quanta est illa virtus sufficiens ad scindendum aërem: ergo quies tamdiu durat, quamdiu remittitur illa virtus, neque enim remittitur in instanti, sed successiuè. Propter istam rationem existimaui dari oportere quietem in puncto reflexionis, si aër vincendus subsit; si autem nihil subsit, sed vacuum ponatur medium, credidi quietem non fore necessariam: nunc verò propter illius demonstrationis rationem conuincor necessariam esse etiam in vacuo, sententiâ ista Baliani positâ, morulam, vt tantisper acquiratur virtus aliqua certa, cuius ope vitetur illud incommodum. Illa porrò morula determinanda erit à principio aliquo extrinseco, si intrinsecum nullum adsit exigens potius hanc quam illam: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam virtus natiua mirum quantum turbat hypothesim Galilæi & Gassendi, posset aliquis cogitare virtutem natiuam gratis à nobis supponi habere proportionem rectæ o a (*Fig.* 81.) ad rectam a m. Verùm istud minimè gratis asseritur à nobis. Esto enim virtus aliqua quam denotet recta m a deferens vniformiter magnitudinem A intra tempus B: esto virtus natiua D deferens vniformiter intra tempus C. Si enim virtus D non sit apta deferre vniformiter per spatium nihil resistens (hoc namque ponimus dum virtutem natiuam æstimamus) non est virtus vlla, nihilque nisi nomen virtutis habet; at verò virtus quàm experimur dum humeris grauia tollimus, non est eiusmodi nomine tenus virtus. Vt est C ad B ita fiat m a ad a o; patet virtutem m a conuenientem tempori B esse ad virtutem

tutem D conuenientem tempori C vt eſt a o ad a m: ergo virtus natiua ad aliam virtutem denotatam rectâ a m habet proportionem rectæ a o ad a m.

PROPOSITIO LVIII.

SI magnitudo A (*Fig.* 78.) ponatur moueri à punctò a ad f, & menſura velocitatis ponatur primo quidem triangulum vt in caſu trigeſimæ nonæ; ſecundo ceratoides parabolica, vt in caſu quadrageſimæ; tertio parabola, vt in caſu quadrageſimæ primæ.

Oſtendendum eſt in prima & ſecunda hypotheſi motum fieri poſſe, ſed nunquam finem illius fore; in tertiá verò, fore aliquando illius finem.

Ex quadrageſima ſecunda huius liquet tempora partium decurſarum eſſe eadem ſi inceſſu retrogrado eadem via relegatur, dummodo eadem menſura velocitatis maneat. Ergo cùm poſt primam partem a c reſtent aliæ infinitæ c g, g e, e b, &c. percurrendæ, in quarum ſingulis pro primo caſu impendi debeat par tempus tempori partis a c, vt in quinquageſima oſtendimus, vel pro ſecundo caſu maius, vt in quinquageſima prima monſtratum eſt, patet in duplici iſto caſu finem nullum fore lationis. Quoniam verò ex quinquageſima ſecunda conſtat in tertio caſu tempus minoris partis decreſcere in certa quadam proportione, apertum eſt infinitarum illarum partium tempora ſimul conflare tempus aliquod finitum, id enim oſtenditur in 82. libri progreſſionum apud Gregorium à S. Vincentio: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ratio cur opus ſit infinito tempore in primo & ſecundo caſu non eſt quod magnitudo in motu tranſit per omnes tardioris motûs differentias, vel vt ita dicam, per omnes tarditates; id enim competit quoque tertio caſui; ſed quod tranſit per omnes ita diſpoſitas. Cæterùm iſtud theorema non immeritò inter paradoxica reponi poteſt. Ex hac verò propoſitione liquet, quæ de motu accelerato demonſtrata fuere, poſſe ſaltem plurima applicari motui retardato. In toto autem iſto tractatu ſumpſimus velocitates vniformes, id eſt, neque auctas neque imminutas tempore lationis, ac proinde deferentes vniformiter magnitudinem, intra idem tempus deferre per ſpatia quæ ſint vt velocitates, itemque ſi deferant per idem ſpatium, earum tempora eſſe reciprocè vt velocitates, quod etiam apud Galilæum libro de motu æquabili conſtans eſt.

PROPOSITIO LIX.

MIra varietas opinionum circa quæſtiones phyſicas de grauium motu refertur, eiuſque cauſa indagatur.

Vendelinus laudatus à nobis ſuprà in corollario propoſitionis quin-

quagesimæ primæ, horaria scrupula duodecim contendit sufficere ad lapidis in centrum terræ descensum. Ricciolus noster tom. 1. pag. 90. ait globum argillaceum vnciarum 8. confecturum intra horam passus romanos antiquos 38880000. cùm igitur 12. horaria scrupula sint quinta pars vnius horæ, & spatia sint in hypothesi Riccioli vt quadrata temporum, duodecim scrupula horaria vindicabunt sibi vigesimam quintam partem illorum passuum, nempe 1555200. qui conficiunt milliaria circiter 1555. Atqui idem Ricciolus eiusdem tom. pag. 63. asserit semidiametrum terræ continere milliaria 5174. ergo intra horaria scrupula duodecim triplo plus itineris confecerit globus descendendo iuxta Vendelini sententiam, quàm iuxta Riccioli. Vterque tamen vult in descensu seruari eandem proportionem. P. Mersennus exigit sex horas ad illud iter, vt refert Vendelinus; in quo sequitur Galilæum relatum & reiectum à Ricciolo tom. 2. pag. 399. nam ex hypothesi quam ibi Galilæus struit ad explicandum istum motum, apertè sequitur sex horas esse necessarias ad istud iter. Hanc ipsam hypothesim Galilæi Gassendus non improbat dissertatione de motu impresso n. 35. pag. 556. tomi tertij edit. Lugd. Ex istis igitur Autoribus lapis descendendo tricies plus temporis insumit, quàm Vendelini calculus ferat.

Præterea Vendelinus & Ricciolus asserunt lapidem ad centrum vsque iturum esse per maiora vsque & maiora incrementa velocitatis. At Galilæi hypothesis incrementa non admittit nisi vsque ad itineris medium, inde verò decrementa ad centrum vsque, vbi cesset omnis motus. Hoc expresse docet Gassendus in illo dissertationis loco & in epistola ad R. P. Fabrum Societatis nostræ tom. 6. pag. 167. cui quidem decremento simile aliud agnoscit, probabiléque putat in sententia Bullialdi, quam tamen refellit Ricciolus tom. 2. pag. 398. quamuis ipse Bullialdus constanter illam semper asseruerit vt patet ex literis ad Gassendum datis, & editis tom. 6. Operum Gassendianorum pag. 410.

Tertiò in illo ipso corollario propositionis quinquagesimæ primæ iam retuli discordiam inter Vendelinum & Ricciolum super quæstione an globus octo vnciarum tardiùs descendat globo mille librarum: vtérque tamen demonstrationem se hac de re habere incunctanter affirmat.

Quartò circa perpendiculi reciprocos itus & reditus non concinunt planè inter se Recentiores. Vendelinus in epistola ad Gassendum inserta tom. 6. pag. 497. Operum Gassendianorum, ita scribit. *Quod autem Mersennus miratur asseri à me hibernas oscillationes horarias plures esse quàm æstiuas, sciat (oro) me experimentis innumeris id deprehendisse.* Ricciolus istud non admittit l. 2. cap. 20. propos. 15. subditque nec placere Mersenno. l. 4. harmoniæ pag. 369. quod argumento est Vendelinum neque per literas, neque libris editis id potuisse vnquam probare Mersenno. Constantiam autem vibrationum in perpendiculis ante se vsurpatis nullam fuisse contendit asseuueranter Caramuel in epistola quæ inter Gassendianas extat pag. 497.

Tanta verò in istis mensuris oscillationum determinandis extat varietas, vt Ricciolus illud refundat in aliquorum indiligenter obseruata. Quod autem in suo perpendiculo vnus Calignonus sibi visus est obseruasse, reijciunt vt inexpertum Ricciolus tom. 1. pag. 91. & Gassendus de motu impresso tom. 3. pag. 536. n 15 post Mersennum suum.

Venio ad causam tantæ discordiæ. Prima eáque generalis est quod inter accuratos Obseruatores alij aliis sint accuratiores: quo in genere Ricciolum nostrum esse accuratissimum dubitari non potest, inspectis eius obseruationibus. Neque putes Tyrones tantùm esse causam illius discordiæ quæ in omni genere obseruationum deprehenditur; inter viros enim peritos & longo suæ artis vsu consummatos hæc discordia sæpius interuenit. Hinc tanta varietas in capienda eleuatione poli Vrbis alicuius etiam celeberrimæ; & in obseruandis momentis characteribusque deliquij cuiuslibet solaris vel lunaris. Aberraret verò toto veritatis ostio si quis inde statueret negligenda esse experimenta; cùm inde potiùs inferre deberet diligentiùs incumbendum esse experimentis capiendis: illa enim sunt totius Physices basis; vnde Aristoteles in Ethicis pronuntiauit puerum posse fieri Geometram, non tamen Physicum; quia Geometria non nititur experimentis, Physica verò in illis tota fundatur. Quapropter qui dicunt Peripateticorum Philosophiam spernere experimenta, quid dicant nesciunt, aut imperito illudere vulgo student, illíque ingenerare odium melioris (vt equidem reor) Philosophorum sectæ. Nos tamen qui Peripatetici & dici & esse volumus, semper, quoties de sensuum iudicio vel experientia agitur, præ oculis habemus illud Augustini lib. 8. de Ciuitate Dei cap. 7. *Absit vt his comparandi videantur qui posuerunt iudicium veritatis in sensibus corporis, eorúmque infidis & fallacibus regulis omnia quæ discuntur metienda esse dixerunt, vt Epicurei, & quicunque alij tales, vt etiam ipsi Stoici, . . . Hi verò, quos meritò cæteris anteponimus, discreuerunt ea quæ mente conspiciuntur, ab iis quæ sensibus attinguntur; nec sensibus adimentes quod possunt, nec eis dantes, vltra quàm possunt.* Hic obiter aduerto iuxta Augustini sententiam Epicureorum, Stoicorumve philosophiam non esse omnium optimam: quæ duæ nominatim sectæ malè etiam audiunt Actorum cap. 17. v. 18. Quod autem quidam Epicurei hodiéque Aristotelem maledictis onerant, in eo se genuinos probant sectatores Epicuri, qui (vt ait Tullius lib. 1. de nat. Deor.) *contumeliosissimmè Aristotelem vexarit.*

Altera discordiæ illius causa non iam sunt experimenta, sed vel rationes illis experimentis superstructæ; vel præiudicatæ aliunde opiniones. Ita Gassendus cùm grauia existimarit virtute terræ magneticâ attrahi, in eam sententiam ire coactus à Morino est, vt asseruerit grauium velocitatem non augeri nisi vsque ad dimdium putei, qui ad centrum vsque effossus foret. Vendelinus & Ricciolus naturam secuti sunt ducem, cúmque omnibus experimentis illa doceat augeri velocitatem grauium, longè verosimiliùs scripserunt, istud augmentum continuatũ iri etiam ad centrum

vsque terræ. Cæterùm, vt hoc in transitu dicam, caue putes eos qui suam philosophiam dictitant *experimentis sensatis passim comprobari*, nihil insuper addere, quod non ita comprobetur. Quibus experimentis atomi Epicureæ comprobentur prorsus me latet; sed multò magis ignoro quo sensûs experimento comprobetur quod Reuerendus P. Maignan tom. 2. Cursûs sui pag. 685. n. 7. asserit, atomum esse solidæ extensionis, exempli causa, instar paruulæ tesseræ, haberéque facies sex quadratas, angulos octo: sed istos sex angulos esse vnam & eandem prorsus rem, ipsámque atomum quamuis corpoream, hoc habere commune cum Angelo & spiritu, vt sit *tota in toto & tota in qualibet parte*. Gassendus Principi suo Valesio, cui nihil suorum celatum esse vult, pag. 159. col. 2. sexti tomi, concedit vltro atomum præditam esse partibus; *eam tamen nulla vi esse secabilem*: existimauit quippe hoc sensatis experimentis aptius quadrare, vt corpus trinæ dimensionis, quamuis exiguum, partes obtineat. An autem dum nulla vi secari posse scripsit, diuinam etiam intellexerit, inquirit Mersennus per epistolam insertam tomo sexto Operum Gassendi pag. 430. sed quid ille responderit penitus ignoro. Exposita igitur est illa opinionum varietas, eiusque causa est indicata, prout fuit propositum.

COROLLARIVM.

Ex demonstratis liquidò constat Physici nomen nondum esse tribuendum illi, qui sola experimenta, quantumuis plurima, perceperit: cùm non sit adhuc nisi instructus apparatu ad Physicam addiscendam necessario: id verò inde apertè confici quòd ex eisdem experimentis alij vnum statuant, alij oppositum. Ille igitur solus Physici nomen mereatur, qui ex physicis experimentis ea concludat quæ licet sub sensus non cadant, cohæreant tamen iis quæ sensu percepta fuerint.

PROPOSITIO LX.

INdiculus præcipuorum quæ in hoc libro tractantur.

I. Methodus sine intricato illo arabismo explicandi summas simplices alicuius figuræ, & eiusdem summas quadratorum, cuborum &c. earumque vsum, extat in propositione prima & secunda. Figura autem curua huc reducitur, quandoquidem ad hoc vt maiori cum perspicuitate res intelligatur, debet expandi in planam, iuxta modum explicatum in quinto libro. Dum autem Arabismum hîc notamus, Diophanti Alexandrini numeros nolumus non summè probare.

II. Dettonuillæus mirabili casu incidisse in eandem cum Gregoriana quadraturam cycloideos superioris paruæ ostenditur in tertia propositione.

III. In quarta proponitur postulatum qnod certissimum putamus, ex quo benè multis inductionibus, compertum habuimus illud consonare cum demonstratis via geometrica antiqua. Illius quidem Dettonuillæus mentionem non facit; sed eo subaudito & concesso ostenditur nonnullo-

rum huius Autoris problematum concordia cum nostris, in quarta & quinta propositionibus.

IV. Nostri quadratricum generatio & comparatio cum summis triangularibus & pyramidalibus Dettonuillæi proponitur, & ostenditur in sexta & quinque sequentibus nec non in decima tertia, nouas tantùm esse voces Dettonuillanas. Vngulettæ, eorúmque vsum primus qui inuenerit non esse Dettonuillæus monstratur in nona, & decima quinta. Vsus libræ planæ à nobis olim propositus quibus verbis significetur à Dettonuillæo, declaratur in decima quarta. Quid de methodo *indiuisibilium* sentiamus, narramus in decima septima, vbi omisimus dicere nonnullos in istam methodum conferre problemata plurima ex numeris traducta; quod quidem tam attinet ad communem Antiquorum Geometriam, quam ad nouam istam. Hoc verò licet permittatur, cùm Arithmetica & Gemetria sorores sint coniunctissimæ, iuxta illud ab Eutocio in vndecimam 1. Conicor. relatum, ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι εἶμεν ἀδελφά; attamen in eo summè religiosos fuisse Antiquos deprehendi. Etenim cùm Pythagoras, vt plures volunt, ex numeris venatus esset problema illud celeberrimum, quod in primi Euclidis propos. 47. locum tenet; curauit illi demonstrationem geometricam inuenire; alienumque à cultu illius ætatis geometrico se facturum fore putauit, si problemate proposito, dixisset id ex numeris patere quoties latera trianguli rectanguli habent ad basim rationem numeri ad numerum; nec aliter id posse euenire etiamsi non habuerint proportionem eam quam habet numerus ad numerum.

V. In decima septima declaramus quid sentiamus de difficultate problematum quæ hodierni scriptores soluunt, si conferantur cum iis quorum solutionem Antiqui nobis reliquerunt. Istud verò vberius explicandum hoc loco nobis est, cur videlicet nostræ summæ pyramidales duplo maiores sint Dettonuillanis, vt in vndecima statuimus, vbi tunc hæsimus in assignanda causâ; sed ea profectò perspicua erat, & ante à nobis scripta quàm de illo libro sexto cogitaremus. In propositione quinta libri tertij superioris (*Fig.* 24.) posuimus per figuræ b z c g limbum ad positionem inclinatæ b a describi superficiem inclinatam, cuiusmodi in corollario vltimo primæ eiusdem libri dicitur descripta fuisse in constructione illius eiusdem propositionis. Ostendimus autem si per eundem limbum b z c moueatur parallela perpendiculari g a, describatque superficiem super plano b g c rectam; solidi, cuius sectio est triangulum z t e vel z t y (sunt enim quantum ad istud idem) æquiponderans esse duplum æquiponderantis solido cuius sectio est triangulum z y e, libræ planæ axe g c, perpendiculo a g c, sustentaculo d i. Atqui triangulum t y z est sectio nostri cunei effecti à plano per g c ducto, habente inclinationem t y z, super plano b g c; si autem triangulum t y z mutetur in æquale z e y, solidum sectionis z e y habebit, sicut ex 1. tertij patet, hanc proprietatem, si quolibet plano ad planum a g c parallelo secetur inter puncta z, y, & angulus t y z

sit semirectus, vt sectio illa sit æqualis & similis portioni baseos b z e g interceptæ inter illud planum & punctum b: ergo istud solidum habet proprietatem summæ triangularis Dettonuillanæ, & solidum sectionis t y z habet proprietatem nostræ summæ triangularis, vt ex demonstratis in hoc libro patet: ergo necessarium est vt æquiponderans summæ nostræ triangulari sit duplum æquiponderatis summæ triangulari Dettonuillanæ: sed æquiponderans istis summis est summa pyramidalis, ergo necessarium est vt summa pyramidalis nostra, sit dupla summæ pyramidalis Dettonuillanæ. Id verò, vt patet, non probat quicquam contra hactenus asserta de Dettonuillanis inuentis. Nec existimare quisquam debet solidum sectionis z y e triangularis aliud esse quam cuneum vel vngulam abscissam ex cylindraceo inclinato; sicut solidum sectionis triangularis z t y est vngula ex cylindraceo recto abscissa: ambæ vngulæ sunt æquales: sed æquiponderans vngulæ inclinatæ non est nisi dimidium spatij quod vngulæ erectæ æquiponderat.

VI. Calculus sex problematum quæ de corona circulari & cycloidica proponi eodem pacto possunt quo de cycloide in libris tertio, quarto, & quinto proposita iacent, initur propositione decima octaua, & per duodecim sequentes absoluitur.

VII. In propositione trigesima prima, & in quatuor sequentibus proponuntur quædam difficultates physicæ, cum cycloideos generatione connexæ: ibique quædam PP. Maignan & Tacquet scita physico-mathematica examinantur.

VIII. Denique à trigesima sexta ad finem vsque nonnulla demonstrátur de grauium descendentium acceleratione, quæ non paucis paradoxica iudicabuntur, cuiusmodi imprimis erunt quæ in quinquagesima & quinquagesima prima propositionibus demonstrantur. Ex corollariis autem quadragesimæ sextæ, quadragesimæ nonæ, quinquagesimæ quartæ, & ex quadragesima octaua patebit V. C. Gassendum non potuisse ista accuratè definire, quòd geometriam non coniunxerit cùm principiis motûs physicis. Optarunt imprimis Galilæus & Gassendus vt grauia decidentia & à recto casu impedita parabolam itinere suo describerent: Physicogeometra non tam quid illi summi viri optarint, quàm quid ratione valida probarint examinabit: ad hoc enim aliquando assumere videntur principia physica, quæ iure merito in dubium reuocentur.





DE CYCLOIDE
LIBER SEPTIMVS.

In quo accuratiùs examinantur principia Archimedeæ illius libræ, qua in Cycloide tractandâ potissimùm vsi hactenus fuimus.

PRÆFATIO.

CVm Geometriæ peramica Analysis, dicatur ἡ ἀπὸ τοῦ τέλους ἄνοδος ἐπὶ τὴν ἀρχήν, *à fine ad principium regressus*; non abs re erit vt post tam frequentem, etiam in istis de Cycloide libris, vsum libræ Archimedeæ, ad ipsius principia regrediamur; præcipuè cùm, vt Orator ait, *in Geometriâ prima si dederis, danda sint omnia.* Retro autem gradi iuuabit vt propiùs inspiciamus quænam & quàm probabilia sint ea quæ dedimus, & quæ huius artis præcipuus inuentor Archimedes sibi dari postulat: in quo quidem regressu occurrent nonnulla, quæ eò magis curiosum allicient Geometram, quò remotiora à vulgi opinione erunt.

ARCHIMEDIS POSTVLATA.

I. Petimus grauia æqualia, æquali distantiâ posita, stare in æquilibrio. II. Grauia item æqualia, ex inæqualibus longitudinibus suspensa, non stare in æquilibrio; sed ad id quod ex maiore pendet, vergere. III. Item si grauibus, quæcunque sint longitudines vnde pendent, stantibus in æquilibrio; alteri eorum adjiciatur aliquod graue, tunc ea non stare amplius in æquilibrio, sed ad id inclinari, cui illud graue fuerit adiectum. IV. Similiter etiam, si ab altero eorum auferatur graue, tunc non amplius committere æquilibrium, sed ad id à quo nihil sit ablatum, vergere. V. Figuris planis, similibus & æqualibus intèr se coaptis, centra quoque grauitatis earum erunt inter se coaptata. VI. Si verò figuræ similes fuerint, non autem æquales, centra grauitatis earum erunt similiter posita.

Similiter posita ad similes figuras dicimus esse puncta, à quibus lineæ rectæ secundum angulos æquales ductæ efficiant æquales ad latera homologa angulos. VII. Item si magnitudines quædam in quibusdam distantiis positæ stent in æquilibrio, & quæcunque eis æquales in eisdem distantiis positæ stabunt in æquilibrio. VIII. Cuiuscunque figuræ cuius perimeter fuerit in eandem partem caua, centrum grauitatis intra figuram esse oportet.

PROPOSITIO PRIMA.

EXplicatur quid Antiquiores Geometræ velint esse centrum illud grauitatis in quo Archimedis Isorrhopicorum libri fundantur.

I. Initio præsentis libri statuendum est Archimedem agere in vniuersum de centro grauitatis planorum, solidorum, & quarumlibet magnitudinum; septemque primas propositiones libri primi æquiponderantium esse communes omnibus quæ suspendi possunt, siue lineæ, siue planæ figuræ, siue solidæ fuerint; ideóque μεγέθη ea dici, quod nomen generalissimum est. Quapropter, cùm in vulgatis codicibus non extet quid Archimedes centrum grauitatis appellet, id nunc inquirendum est de omni centro, quamuis Eutocius commentariis in illum librum satis putauerit se fecisse, si explicaret tantùm quid Archimedes vocaret centrum grauitatis in planis figuris.

II. Eutocius docet centrum grauitatis in planâ figurâ ex Archimede appellari *id à quo suspensa, parallela manet horizonti. Duarum autem aut plurium figurarum planarum, id à quo libra cùm suspensa fuerit, manet horizonti parallela.* Eius verba sunt hæc. κέντρον ῥοπῆς ἐπιπέδου σχήματος, ἀφ᾽ οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. Δύο δὲ ἢ πλειόνων ἐπιπέδων κέντρον ῥοπῆς ἤτοι βάρους, ἀφ᾽ οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς παράλληλός ἐστι τῷ ὁρίζοντι.

III. Pappus Alexandinus in octauo mathematicarum collectionum libro ita definit; centrum grauitatis in solido. Λέγομεν δὲ κέντρον βάρους ἑκάστου σώματος εἶναι σημεῖόν τι κείμενον ἐντὸς, ἀφ᾽ οὗ κατ᾽ ἐπίνοιαν ἀρτηθὲν τὸ βάρος ἠρεμεῖ φερόμενον, καὶ φυλάττει τὴν ἐξ ἀρχῆς θέσιν οὐ μὴ περιτρεπόμενον ἐν τῇ φορᾷ. *Centrum autem grauitatis vniuscuiusque corporis dicimus, punctum quoddam intra positum, quo ita librari pondus concipimus vt dum fertur deorsum non circumuoluatur, sed seruet quam in principio lationis habebat positionem.* Exposuimus igitur quid Archimedes ipse, Pappus, & Eutocius velint esse grauitatis centrum, quod erat propositum: in sequentibus verò paulò generaliorem huiusce rei trademus definitionem.

PROPOSITIO II.

POtest euenire vt centrum è quo suspensa figura plana manet horizonti parallela, sit extra ipsam figuram.

Sit figura plana b a e d f c (*Fig.* 82.) comprehensa lateribus sex b a, a e, e d, d f, f c, c b; sintque anguli a b c, a e d æquales, item f c b, f d e; latera verò a b, b c sint æqualia lateribus a e, e d singula singulis; Manifestum

stum est, iunctâ recta a f, figuras a b c f, a e d f esse æquales & similes, angulumque b a e diuidi bifariam in duos b a f, e a f. Cùm ergo figuræ a b c f, a e d f sint æquales & similes, habebunt centra grauitatis ita sibi respondentia vt si vna congruat alteri, centrum quoque vnius congruat centro alterius. Sit ergo centrum vnius h, & centrum alterius i; iuncta sit recta h i occurrens rectæ a f in g; erunt h g, g i æquales; si enim super a g intelligatur circumvolui planum a g h, congruet figura a b c f figuræ a e d f, & punctum h puncto i; ac proinde recta g h rectæ g i: sunt ergo g h, g i æquales: ergo per quartam primi æquiponderantium g est centrum grauitatis magnitudinis c b a e d f compositæ ex duabus a b c f, a e d f. Posse autem g cadere infra punctum f est apertum: si enim a b c f sit trapezium, diuisisque bifariam lateribus b a, c f in n & m, iungatur recta m n, erit per vltimam primi æquiponderantium centrum grauitatis figuræ a b c f in lineâ o p, similiter diuisis lateribus a e, f d & iunctâ recta o p. Si ergo perpendicularis f l ad rectam a f ex puncto f excitata non diuidat bifariam rectam a b in l, sed minor sit portio a l portione l b (quod fieri posse apertum est, cùm latera a b, a e, f c, f d possint produci ad quamcumque distantiam) cadet recta n o infra rectam l u, ac multò magis recta h i; punctum ergo g erit infra punctum f: potest ergo fieri vt centrum ex quo figura plana manet horizonti parallela sit extra ipsam figuram; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Potest euenire vt centrum, è quo suspensa manet figura solida, sit extra ipsam figuram.

Intelligatur (*Fig.* 82.) eadem figura c b a e d f esse communis sectio superficiei planæ & solidi, ita vt diuidatur per planum, cuius sectio a f, in duo solida omnino æqualia & similia; eorum autem centra grauitatis sint h & i. Quoniam ergo recta h i connectit centra grauitatis h, i duarum magnitudinum æqualium, & bifariam secta est in g: erit punctum g centrum grauitatis totius magnitudinis compositæ; quod erat ostendendum. Quapropter Pappus dum voluit centrum esse intus non intellexerit id generaliter, sed iuxta mentem Archimedis in octauo postulato. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex his manifestum est cur Archimedes non postularit in vniuersum omnis figuræ planæ centrum grauitatis esse intra ipsam; sed omnis figuræ cuius perimeter & linea curua ambiens sit ad easdem partes caua. Ambitum enim, quo quælibet figura continetur vocat hic περίμετρον, siue ille ambitus constet lineis rectis, siue lineis partim rectis partim curuis, siue lineis curuis constituentibus aut non constituentibus angulum; vt ex initio libri primi de sphærâ & cylindro constat.

PROPOSITIO IV.

EX demonſtratis infertur generalis definitio centri grauitatis Archimedei.

Ex his apertè colligitur centri grauitatis definitio pro qualibet finita magnitudine, ſiue ea ſit cuiuſcunque generis linea, ſiue cuiuſlibet modi ſuperficies, ſiue ſolidum quodcunque. Si per vnum aliquod punctum & per magnitudinem aliquam finitam ducatur linea recta expers grauitatis, rigida & minimè flexibilis, illique lineæ intelligatur quaſi agglutinari & cohærere magnitudo veluti manubrio quo in omnem partem agi poſſit; recta iſta dicatur *perſpecto modo* cohærere magnitudini. Hoc autem poſito, ita definiri in vniuerſum poſſe videtur centrum grauitatis.

Si per aliquam magnitudinem finitam, & per vnum aliquod punctum ducta intelligatur recta linea magnitudini perſpecto modo cohærens, & ſi ex illo puncto vnico ſuſpenſa, perſtet immota in omni ſitu qui illi ad libitum datus fuerit, tale punctum vocetur centrum grauitatis illius magnitudinis.

Magnitudo aliqua liberè vel ſponte pendere ex puncto aliquo dicitur, quando ex modo pendendi non impeditur vergere quò natiua inclinatio tulerit.

Cæterùm planum ſiue lineam grauitate carere cum diximus, intelligi etiam volumumus leuitate quoque deſtitui, & eſſe aliquid quantum ad ῥοπὴν indifferens. Eutocius in danda definitione centri grauitatis planæ ſuperficiei poſuit illam eſſe parallelam horizonti, & ex illo puncto quod centrum grauitatis dicitur, pendere immotam; non quod id ſit neceſſarium, ſed quod id ſufficiat. Similiter Archimedes, vt ex libello de parabolæ quadratura liquet, libram ſemper horizonti parallelam conſtituit; ſed id, vt reor, non ſit niſi iuuandæ phantaſiæ cauſa; nam iuxta libræ iſtius principia, ſi pondera vtrinque liberè pendeant, quamuis libra ſit ad horizontem inclinata, perinde tamen manere debet in eo ſitu magnitudo compoſita ex vtraque illa quam libra ſuſtinet. Fortaſſe linea illa recta connectens perſpecto modo vtramque illam magnitudinis compoſitæ partem non appellabitur libra, niſi quando fuerit horizonti parallela; ſed iſtud eſt quæſtio de nomine nihili pendenda, dummodo conſtet magnitudinem ex illo puncto ſuſpenſam manere immotam quicumque illi ſitus circa illud punctum, vnde liberè pendet, deſignetur. Nos tamen in ſcribendis quæ conſequuntur, illum ſæpe modum loquendi & cogitandi vſurpabimus, vt quam minimè recedamus ab Antiquiorum loquendi etiam modo. Ergo &c. quod erat nobis conſtitutum.

COROLLARIVM.

De Archimedea libra ita, vt patet, loquimur, quaſi aliam diſtinguamus diuerſam; id verò perſpicuum erit ex demonſtrandis de libra curua, è

qua suspensæ magnitudines in idem omninò punctum vergere ponuntur: at in Archimedea lineæ *ποιου* intelligi debent parallelæ, & nunquam conuenientes; & si intelligantur in vnum concurrere peruertitur natura illius. Qui autem in Machinarum vsu, libram vulgarem quasi Archimedeæ proprietates haberet vsurpant, ij res valde discrepantes confundunt; in praxi tamen & calculo nullus error notabilis percipitur, quamdiu lineæ in centrum vergentes habebuntur sensuum iudicio pro parallelis; sicuti nullus alicuius momenti error accidit, quòd radij solares ponantur paralleli dum in parabolicum speculum è terra oppositum incidunt. Peccant itaque qui libræ illi curuæ (quæ sola in vsum hominum cadit) proprietates Archimedeæ & rectæ attribuunt, longè enim diuersas, vt postea patebit, obtinent; hosque crediderim notari apud Gregorium à S. Vincentio in in libri, de parabola, propositione 124.

SCHOLIVM.

Vt demonstremus Theorema illud quod tanti momenti est in librandis magnitudinibus, & quod Archimedes adhibet in propositione sexta quadraturæ paraboles, vnumquodque suspensorum ex quo puncto constitutum est, manet; cùm in lineâ perpendiculari fuerit punctum suspensionis & centrum grauitatis suspensi, *præmittendæ nobis sunt nonnullæ propositiones; demonstratio enim illius, vbi extet ignoro.*

PROPOSITIO V.

CVM in plano grauitate destituto, finito, parallelo horizonti, & per centrum planæ magnitudinis ipsi cohærentis ducto, ipsa magnitudo manserit suspensa; & cum per idem centrum ducta fuerit in eodem plano recta sustinens magnitudinem cohærentem; si eiusmodi recta ex solo centro grauitatis suspendatur, nec ipsa, nec magnitudo ipsi cohærens mutabunt situm.

Sit (*Fig.* 83.) planum h g m finitum, grauitate destitutum, & horizonti parallelum; in eo verò sit magnitudo plana b a e d f c ipsi cohærens, eiusque centrum grauitatis sit g, per quod in eodem plano ducta sit vtcunque recta i g l. Dico si recta i g l ex solo puncto g suspendatur, nec ipsam, nec magnitudinem ipsi cohærentem mutatum ire situm.

Quoniam enim magnitudinis b a e d f c centrum grauitatis est g, & planum h g m, in quo ipsa est, habet situm horizonti parallelum, si planum sustinens magnitudinem cohærentem suspendatur ex puncto g solo, manebit vt iacet per definionem centri grauitatis suprà traditam. Rursus quoniam recta i l diuidit magnitudinem planam in duas partes (si enim non diuideret illam, tota magnitudo existeret ad easdem lineæ i l partes, ac proinde ad illas deprimeretur, quod non ponimus) i a l u f h & i b c h u l e d, eæ sibi inuicem æquiponderabunt, positæ vt iacent; si enim positæ vt iacent non æquiponderarent sibi, inclinatio plani fieret ad partes

grauioris, quod est contra definitionem centri grauitatis; ergo cùm partes i a l u f h & i b c h u l e d sibi inuicē vt iacent æquiponderent, si linea i l suspendatur ex g tantùm, non fiet inclinatio ad partes m vel a, ex hypothesi quòd linea i l maneat horizonti parallela. Ipsam autem i l mansuram horizonti parellelam ostenditur eodem ferme pacto. Si enim fieri potest, ad alterutras partes i inclinetur, & ex g ad rectam i l excitetur perpendicularis n o p; secans magnitudinem in duas partes æquè vt iacent ponderantes b c o p, o p a e d f: cùm ergo duæ illæ partes sibi inuicem æquiponderent, magnitudo non inclinabitur ad partes i; ergo neque recta i g inclinabitur ad partes i. Tota igitur magnitudo plana b a e d f c lineâ i g l horizonti parellelâ sustentatâ, & ex solo puncto g suspensâ) non mutabit situm; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, si planum i g m statuatur rectum ad horizontem, ita vt recta p g sit perpendicularis ad eundem horizontem, & consequenter recta i l parallela eidem horizonti, rectam i l ex solo puncto g suspensam & sustinentem graue b a c d f c non mutaturam situm; partes enim b c o p, o p a e d f in situ quem habent permanentes æquiponderabunt sibi inuicem vt ostensum fuit; non ergo fiet inclinatio rectæ i l ad alterutras partes i vel l. Quòd autem recta i l sustinens magnitudinem b a e d f c habeat partem i a l u f ex superiori parte prementem incumbendo deorsum, id perinde est atque si ex inferiore pendendo traheret deorsum, vt apertum est.

PROPOSITIO VI.

CVM plano finito, non graui, parallelo horizonti, & per grauitatis centrum solidæ magnitudinis ipsi cohærentis ducto, magnitudo solida manserit suspensa, & cum per centrum ductum fuerit aliud planum finitum & grauitate carens quod sit ad horizontem rectum, seceetque magnitudinem, atque eam sibi connectat; si omnes aliæ solidi suspensiones soluantur, & illæ solæ retineantur per quas mediante plano recto suspenditur ex rectâ quæ est communis sectio vtriusque plani; ista verò recta ex solo puncto in quo est centrum grauitatis suspendatur, nec ipsa, nec solidum ab ipsâ sustentatum mutabunt positionem.

Sit retentâ figurâ prioris propositionis (*Fig.* 83.) solidi finiti centrum grauitatis g, & per illud ductum sit planum h g m, in quo b a e d f c sit communis sectio plani h g m & solidi. Ad planum h g m erectum sit planum perpendiculariter cadens, transiens per g, & secans magnitudinem solidam, eamque sibi connectens; communis

autem sectio vtriusque plani finiti & grauitate spoliati sit recta i l.

Ostendendum est si recta i l toti solido mediante plano ad horizontem recto cohærens, ipsum solidum sustineat suspensa ex solo puncto g; ipsam ig, ipsumque solidum retentura esse priorem situm.

Quoniam enim magnitudinis solidæ centrum grauitatis est g, & planum h g m finitum & grauitate carens cohæret ipsi magnitudini, si ex solo puncto g planum h g m suspendatur, seruabit tam ipsum quàm magnitudo cohærens priorem situm per definitionem centri grauitatis traditam in quarta propositione. Rursus quoniam planum per i l ductum perpendiculariter ad horizontem diuidit magnitudinem solidam in duas partes, quarum vnius communis sectio cum plano est i a l u f k; alterius, i b c h u l e d, ex positæ vt iacent sibi inuicem æquiponderabunt; si enim positæ vt iacent non æquiponderarent sibi, inclinatio plani paralleli fieret ad partes grauioris, quod est contra definitionem centri grauitatis: ergo cùm partes, quarum communis cum plano parallelo sectio est i a l u f h, i b c h u l e d, sibi inuicem æquiponderent; si linea i l suspendatur ex g tantùm, non fiet inclinatio ad partes m vel a, ex hypothesi quod linea i l maneat horizonti parallela. Ipsam autem i l mansuram esse horizonti parallelam ostendemus eodem planè modo. Si enim fieri potest ad partes i alterutras inclinetur, & ex g ad rectam i l excitetur perpendicularis n o p, & per rectam n o p ducatur grauitate carens planum erectum orthogonaliter ad horizontem, illud secabit magnitudinem solidam in duas partes, easque æquiponderantes inuicem, quarum communis sectio cum plano parallelo erit b p o c, o p a e d f: ergo si plano h g m parallelo intelligatur vt prius cohærere solida magnitudo, inclinabitur superficies ad partes i ad quas solidi portio grauior iacet; quod est contra definitionem centri grauitatis. Tota igitur magnitudo solida linea i g l horizonti parallelâ sustentata, & ex solo puncto g suspensa non mutabit situm, ipsaque etiam i l manebit vt iacet horizonti parallela, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

CVm planum aliquod super horizonte erectum perpendiculariter, finitum, & grauitate destitutum per alicuius magnitudinis centrum grauitatis transiens ipsi cohæserit magnitudini, existens in eodem cum ipsa plano, si quidem ipsa sit plana; vel, si solida extiterit, ipsam secans, perque centrum ducta in eodem plano recta horizonti parallela fuerit, si huiusmodi recta ex solo centro suspendatur, nec ipsa nec graue mutabunt situm.

Ista propositio est quasi porisma præcedentium duarum: nam si magnitudo fuerit plana, redit casus primæ propositionis; sin fuerit solida, casus secundæ statim se offert; si per rectam ductam a g i intelligatur

grauioris, quod est contra definitionem centri grauitatis; ergo cùm partes i a l u f h & i b c h u l e d sibi inuicē vt iacent æquiponderent, si linea i l suspendatur ex g tantùm, non fiet inclinatio ad partes m vel a, ex hypothesi quòd linea i l maneat horizonti parallela. Ipsam autem i l mansuram horizonti parellelam ostenditur eodem ferme pacto. Si enim fieri potest, ad alterutras partes i inclinetur, & ex g ad rectam i l excitetur perpendicularis n o p; secans magnitudinem in duas partes æquè vt iacent ponderantes b c o p, o p a e d f: cùm ergo duæ illæ partes sibi inuicem æquiponderent, magnitudo non inclinabitur ad partes i; ergo neque recta i g inclinabitur ad partes i. Tota igitur magnitudo plana b a e d f c lineâ i g l horizonti parellelâ sustentatâ, & ex solo puncto g suspensâ) non mutabit situm; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, si planum i g m statuatur rectum ad horizontem, ita vt recta p g sit perpendicularis ad eundem horizontem, & consequenter recta i l parallela eidem horizonti, rectam i l ex solo puncto g suspensam & sustinentem graue b a c d f c non mutaturam situm; partes enim b c o p, o p a e d f in situ quem habent permanentes æquiponderabunt sibi inuicem vt ostensum fuit; non ergo fiet inclinatio rectæ i l ad alterutras partes i vel l. Quòd autem recta i l sustinens magnitudinem b a e d f c habeat partem i a l u f ex superiori parte prementem incumbendo deorsum, id perinde est atque si ex inferiore pendendo traheret deorsum, vt apertum est.

PROPOSITIO VI.

CVM plano finito, non graui, parallelo horizonti, & per grauitatis centrum solidæ magnitudinis ipsi cohærentis ducto, magnitudo solida manserit suspensa, & cum per centrum ductum fuerit aliud planum finitum & grauitate carens quod sit ad horizontem rectum, secetque magnitudinem, atque eam sibi connectat; si omnes aliæ solidi suspensiones soluantur, & illæ solæ retineantur per quas mediante plano recto suspenditur ex rectâ quæ est communis sectio vtriusque plani; ista verò recta ex solo puncto in quo est centrum grauitatis suspendatur, nec ipsa, nec solidum ab ipsâ sustentatum mutabunt positionem.

Sit retentâ figurâ prioris propositionis (*Fig.* 83.) solidi finiti centrum grauitatis g, & per illud ductum sit planum h g m, in quo b a e d f c sit communis sectio plani h g m & solidi. Ad planum h g m erectum sit planum perpendiculariter cadens, transiens per g, & secans magnitudinem solidam, eamque sibi connectens; communis

autem sectio vtriusque plani finiti & grauitate spoliati sit recta i l.

Ostendendum est si recta i l toti solido mediante plano ad horizontem recto cohærens, ipsum solidum sustineat suspensa ex solo puncto g; ipsam i g l, ipsumque solidum retentura esse priorem situm.

Quoniam enim magnitudinis solidæ centrum grauitatis est g, & planum h g m finitum & grauitate carens cohæret ipsi magnitudini, si ex solo puncto g planum h g m suspendatur, seruabit tam ipsum quàm magnitudo cohærens priorem situm per definitionem centri grauitatis traditam in quarta propositione. Rursus quoniam planum per i l ductum perpendiculariter ad horizontem diuidit magnitudinem solidam in duas partes, quarum vnius communis sectio cum plano est i a l u f k; alterius, i b c h u l e d, ex positæ vt iacent sibi inuicem æquiponderabunt; si enim positæ vt iacent non æquiponderarent sibi, inclinatio plani paralleli fieret ad partes grauioris, quod est contra definitionem centri grauitatis: ergo cùm partes, quarum communis cum plano parallelo sectio est i a l u f k, i b c h u l e d, sibi inuicem æquiponderent; si linea i l suspendatur ex g tantùm, non fiet inclinatio ad partes m vel a, ex hypothesi quod linea i l maneat horizonti parallela. Ipsam autem i l mansuram esse horizonti parallelam ostendemus eodem planè modo. Si enim fieri potest ad partes i altertras inclinetur, & ex g ad rectam i l excitetur perpendicularis n o p, & per rectam n o p ducatur grauitate carens planum erectum orthogonaliter ad horizontem, illud secabit magnitudinem solidam in duas partes, easque æquiponderantes inuicem, quarum communis sectio cum plano parallelo erit b p o c, o p a e d f: ergo si plano h g m parallelo intelligatur vt priùs cohærere solida magnitudo, inclinabitur superficies ad partes i ad quas solidi portio grauior iacet; quod est contra definitionem centri grauitatis. Tota igitur magnitudo solida linea i g l horizonti parallelâ sustentata, & ex solo puncto g suspensa non mutabit situm, ipsaque etiam i l manebit vt iacet horizonti parallela, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

CVm planum aliquod super horizonte erectum perpendiculariter, finitum, & grauitate destitutum per alicuius magnitudinis centrum grauitatis transiens ipsi cohæserit magnitudini, existens in eodem cum ipsa plano, si quidem ipsa sit plana, vel, si solida extiterit, ipsam secans, perque centrum ducta in eodem plano recta horizonti parallela fuerit; si huiusmodi recta ex solo centro suspendatur, nec ipsa nec graue mutabunt situm.

Ista propositio est quasi porisma præcedentium duarum: nam si magnitudo fuerit plana, redit casus primæ propositionis; sin fuerit solida, casus secundæ statim se offert; si per rectam ductam i g l intelligatur

planum erectum perpendiculariter ad prius planum; ipsumque planum erectum sit finitum, & grauitate nudatum, ponaturque cohærere solidæ magnitudini & illam sustinere. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

CVm planum super horizonte perpendiculariter erectum, finitum, & non graue transierit per magnitudinis alicuius centrum grauitatis, eique magnitudini cohæserit; & cum in illo ducta fuerit quæuis recta horizonti parallela, non transiens per grauitatis centrum; ex isto autem centro demissa fuerit perpendicularis linea ad ipsam parallelam; si ex puncto in quo istæ duæ rectæ sese secuerint suspendatur eiusmodi parallela totam magnitudinem mediante plano erecto sustinens, nec recta, nec magnitudo mutabunt situm.

Planum i u l (*Fig.* 84.) super horizonte perpendiculariter erectum, finitum, & non graue, transeat per g centrum magnitudinis planæ b c d, aut solidæ cuius b c d sit cum plano communis sectio; ipsi verò magnitudini cohæreat planum i u l. Quælibet recta a b horizonti parallela ita ducta sit in plano i u l vt non transeat per e; ex e ad rectã a b demissa sit perpendicularis e f occurrens rectæ a b in f. Dico si ex solo puncto f suspendatur recta a b sustinens mediante plano i u l magnitudinem cuius centrum grauitatis est e, nec rectam, ipsam a b, nec ipsam magnitudinem mutatum ire positionem.

In plano i u l ducatur per e recta h e g parallela horizonti: ergo per præcedentem si linea h g sustinens magnitudinem suspendatur ex e, nec linea, nec ipsa magnitudo mutabunt situm; ergo cùm recta a b sit parallela ipsi h g, ipsa quoque a b manebit parallela horizonti, ipsaque f e ad ipsum perpendicularis. Cùm ergo ex puncto e suspensa linea h g totaque magnitudo non mutet situm; & punctum e suspensum ex puncto f per lineam f e ad horizontem perpendicularem non mutet situm (si enim mutaret ascenderet, quod est contra naturam grauis) tota magnitudo ex f puncto fixo suspensa, totumque planum i u l, ac proinde recta a b situm suum retinebunt, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO IX.

SIt (*Fig.* 85.) magnitudo cuius centrum grauitatis e, vt in præcedenti; atque per e ductum sit planum finitum, grauitate carens, ad horizontem perpendiculare, & ipsi magnitudini cohærens; sit autem, vt in eadem præcedenti, f communis sectio rectæ a in b eodem plano ductæ horizonti æquidistanter, punctumque idem sit communis sectio rectæ a b, & perpendicularis e f ad ipsam a b demissæ ex centro e. Rursus sit libra h m u parallela horizonti, cui alligata sit in h & g recta a b sustinens mediante plano magnitudinem

cuius centrum est e (in hac figurâ maiori lucis causâ rectam h u posuimus extra rectam a b, concipi tamen iti debent vt punctum h puncto a congruat, punctumque g puncto b, punctumque f puncto i) ipsa autem libra suspensa intelligatur ex puncto m, vt ipsum m vel congruat puncto g, vel iaceat inter g & u; vnde intelligatur pendere magnitudo l, & æquiponderare magnitudini, cuius centrum e, manenti vt iacet suspensæ.

Ostendendum est si magnitudo eadem alligetur ex puncto i, & duæ priores suspensiones in a & b factæ soluantur, æquilibrium permansurum esse.

Quoniam enim magnitudo, cuius centrum e, suspensa ex f, manet in eodem situ, & recta a b horizonti parallela per præcedentem propositionem: ergo cum f & i sibi congruant, item a & h, itemq; b & g, recta a b manebit vt iacet intra rectam g h, suspensa ex puncto i: sed eadem grauitas, quamdiu in eodem situ manet sustentata à librâ, æquè illam premit deorsum (cùm enim eadem sit grauitas, & eadem grauitas non fiat magis vel minus ponderans nisi quia situm quem ad libram habebat mutauit, manebit immutato situ æquè ponderans) ergo libræ æquilibrium non mutabitur suspensione magnitudinis ex solo puncto i factâ; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Istud est theorema quod in prop. 4. proposuimus ex Archimede desumptum, quodque demonstrandum susceperamus, cùm Archimedis demonstratio non extet, quod sciam. Commandinus quidem vir alioqui harum disciplinarum peritissimus commentariis in propositionem sextam de quadratura parabolæ, conatur illud demonstrare; sed præterquam quòd eius demonstratio non est de omnibus magnitudinibus tam planis quàm solidis; vitio, quod petitionem principij appellant, laborat, vt propiùs inspicienti apertum erit.

COROLLARIVM II.

Cum libra extiterit in plano finito, non graui, recto ad horizontem, & transeunte per grauitatis centrum magnitudinis alicuius ipsi cohærentis; & cùm eiusmodi magnitudo ex vnius brachij duobus punctis suspensa fuerit, per puncta plani ipsis intima libram perinde grauabit, atque si pondus ei æquale suspenderetur ex solo puncto in quod perpendicularis ex centro in libram, vel in lineam plani libræ congruentem, penderet. Istud theorema apertè eruitur ex præsenti propositione.

PROPOSITIO X.

SI recta connectat duarum magnitudinum centra grauitatis, & illas è solis centris pendentes sustineat; compositæ ex vtraque magnitudinis centrum grauitatis est in iam dictâ lineâ.

Sint a & b (Fig. 86.) centra grauitatis duarum magnitudinum; recta a b connectat centra, & solis punctis a, b sustineat magnitudines. Dico centrum grauitatis compositæ ex vtraque magnitudinis esse in rectâ a b.

Sint primò magnitudines planæ c f e d, g h i u; & in eodem plano quod horizonti parallelum fiat, existant. Si fieri potest, sit grauitatis centrum extra lineam a b in puncto l eiusdem plani; per l agatur m n parallela rectæ a b. Quoniam magnitudinis planæ centrum grauitatis ponitur esse punctum l, partes magnitudinis compositæ in quas diuiditur per rectam m n erunt æquiponderantes vt iacent, alioqui fieret inclinatio ad partem præponderantem, quod est contra definitionem centri grauitatis traditam in prima propositione. Magnitudinem autem compositam diuidi in duas partes æquiponderantes vt iacent est absurdum. Cùm enim recta a b transeat per centra singularum magnitudinum, eas diuidet in duas portiones æquè, vt iacent, ponderantes: ergo duæ c d o p, g h r q æquiponderabunt, vt iacent, duabus o e f p, r q u i, vt iacent, permanentibus: ergo si duabus c p o d, h r q g addatur ea pars magnitudinis quæ est inter parallelas a b, m n, & si eadem dematur ex magnitudinibus p f o e, r i u q: quod supererit non erit vt iacet æquiponderans, illi quod ex illâ additione conficietur vt iacet permanenti; & tamen ostensum est esse æquiponderans: erit ergo, & non erit, quod est impossibile. Non ergo centrum grauitatis est extra lineam a b, si magnitudines sint planæ & in eodem plano existentes.

Quod si magnitudines sint solidæ, sit earum cum plano horizonti parallelo finito, non graui, & ducto per centra a, b, l communi sectio c d e f, g h i u: si ergo per rectas a b, m n ducantur plana duo inuicem parallela, ostendentur partes per plana diuisæ eodem prorsus absurdo sibi æquiponderare, & non æquiponderare, quo ostensum est in priori casu de partibus planæ magnitudinis per lineas a b, m n factis: non ergo centrum grauitatis est extra lineam a b, si magnitudines sint solidæ. Si igitur recta &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XI.

SI linea recta connectat duas magnitudines, transeatque per earum grauitatis centra, ipsisque magnitudinibus cohæreat, centrum grauitatis compositæ ex vtraque magnitudine est in lineâ cõnectẽte.

Ista propositio sequitur apertè ex præcedentibus: cùm enim magnitudines illæ perinde premant lineam connectentem centra grauitatis, atque si ipsæ penderent ex solis grauitatis centris; & cùm centrum grauitatis magnitudinis compositæ ex duabus, quando duæ illæ pendent ex solis centris grauitatis, sit in lineâ connectente eiusmodi centra; patet centrum grauitatis de quo agit præsens propositio esse in lineâ illâ connectente centra grauitatis, & ipsis magnitudinibus cohærente, quod erat demonstrandum.

COROL.

COROLLARIVM.

Propositionem istam vt à se antè demonstratam, προδεδειγμένην, adhibet Archimedes libri primi de æquiponderantibus propositione quæ in editis latinè codicibus numeratur quarta, in græcis secunda. Cùm autem eiusmodi propositio in antecedentibus non reperiatur, cúmque etiam definitiones centri grauitatis desint, suspicio non leuis est eiusmodi librum non haberi nisi mutilatum; quapropter adducor vt credam in illis quæ perierunt, esse propositionem illam quam corollario primo nonæ desiderauimus.

PROPOSITIO XII.

Proponuntur dubia aduersus postulata ab Archimede.

Quod Geminus apud Eutocium ait, propositiones quæ ob perspicuitatem inter *axiomata* iure debeant numerari, ab Archimede appellari *postulata*, licet in earum quibusdam apertum sit, in aliis tamen non satis liquet; imo nec apparet quo pacto absque vllo veritatis præiudicio admitti possint.

Primò etenim assumit planas figuras esse grauitate præditas, alterique æquiponderare spatio, vt inde demonstret veram illarum aream. Atqui plana figura, cùm non sit corpus sed superficies, non facilè à Physico concedetur habere quicquam ponderis. Cùm enim iuxta eos qui superficies corpori inserunt, eæ sint numero infinitæ, possintque esse æquales (vt in quouis cylindro, cubo, & parallelepipedo) euidens est, si singulæ superficies essent certæ cuiusdam grauitatis, omnes simul conflaturas esse pondus verè immensum, quod est absurdum, & contra experientiam. Non igitur verum est figuras planas esse grauitate præditas.

Secundò assumit lineas per quas grauia ex librâ (quam rectam esse ponit, & horizonti parallelam vt ex sexta de quadratura paraboles constat) liberè pendent, esse inuicem parallelas, & ad ipsam perpendiculares. Hoc autem sapit errorem Xenophanis Colophonij qui vt Aristoteles testatur libro 2. de cœlo cap. 13. terram commentus est fundamentis suis peruadere quidquid sub ipsâ spatij animo concipi potest. Ex quo conficitur motus grauium deorsum tendentium parallelos esse inter se & ad horizontem perpendiculares. Sed istud reiiciunt omnes, iamque diu Aristoteles cap. 14. libri citati pronuntiauit grauia non ferri deorsum per lineas parallelas, sed per lineas ad vnum totius mundi centrum coëuntes. Quin & ipse Archimedes libro primo de iis quæ vehuntur super aquam ex hoc ipso principio illorum librorum demonstrationem pendere voluit. Cur ergo quod verum esse nouerat, noluit admittere in isto de æquiponderantibus tractatu, maluitque vsurpare id quod aperte falsum est? quo autem modo istud non obstat veritati & certitudini consequentium demonstrationum?

Tertiò Archimedes in 7.9.11. aliisque propositionibus quadraturæ paraboles, assumit lineas quibus è librâ pendent figuræ, nullius esse ponde-

ris; & figuram spatiumve eiusdem semper esse grauitatis siue breuiore siue longiore lineâ pendeat, dummodo cætera non mutentur. Istud quidem non tam difficile creditu apparet: sed tamen, cùm non probetur, iure meritò inter *petitiones* computatur; præterquàm quod non consequenter philosophari videtur, dum ipsam superficiem grauitate præditam esse vult, non tamen lineam.

Quartò in quinto postulato figuras inter se componit κατ᾽ ἐφαρμογήν explicatam à nobis in paragrapho octauo prolegomenon tetragonismicorum pag. 66. qui quidem modus licet vsurpatus fuerit ab Euclide, nunc tamen vt ἀγεωμέτρητος passim reiicitur à doctis huius ætatis Geometris.

Quintò ponit vt datum si grauia ferantur lineis parallelis, magnitudinem finitam siue sit simplex superficies plana, siue corpus; & siue sit composita ex pluribus planis superficiebus, siue ex pluribus corporibus, habere centrum grauitatis. Vnde verò is qui se (vt Orator alicubi dixit) profitetur non persuadere, sed cogere, probat eiusmodi punctum dari in ea hypothesi quæ non est, sed mente tantùm fingitur esse; præcipuè cùm in eâ quæ est, non omnis magnitudo habeat grauitatis centrum, prout demonstrabitur in sequentibus?

Sextò insuper ex doctrina illa conficitur spatium finitum è libræ brachio vno suspensum æquiponderare posse spatio immenso ex altera parte libræ certa quadam ratione suspenso; quod videtur absurdum, quia inter finitum & infinitum non datur proportio; daretur autem si æquiponderarent sibi mutuo: nam vt brachium libræ ad longitudinem vnde pendet aliquod pondus, ita vicissim ipsum pondus ad æquiponderans. Pondus autem finitum posse ex istis principiis æquiponderare immenso, iam concessimus in secundæ appendicis adiectæ ad libros tetragonismicos pagina sexta.

Vnde etiam oritur aliud dubium contra postulatum quartum & consequentia reliqua; in illis enim assumi videtur non dari centrum grauitatis nisi in figura, quod nomen sonat spatium vndique comprehensum & terminatum; atqui centrum grauitatis competere etiam figuris quæ non vndecunque vallantur & circumscribuntur, ibidem astruimus.

Septimò denique illius causa inquirenda restat, cur ista quæ Archimedes de libra tradit, vt vera sint, adeò tamen difficilia comprobentur, vt pauci admodum sint qui illa intelligere possint? Nam geometrica esse captu facilia pronunciauit Aristoteles, 6. Eth. cap. 8. cum ibi puerum posse fieri Mathematicum asseruerit, non autem sapientem, aut Physicum; sanctus quoque Thomas affirmauit 2. Metaph. lect. vltim. imaginatione potius quàm iudicio opus esse ad percipiendas has disciplinas. Ergo &c. quod erat propositum.

Ex his omnibus liquidò constat dubitationes istas aliqua solutione indigere, ne parum firmum & constans videatur tanti ingenij & vtilitatis

Opus. Vt autem plenè satisfaciamus, præmittenda duximus nonnulla de æquilibrio quod fit grauibus pendentibus per lineas non parallelas sed conuenientes in centrum mundi; quæ duo æquilibrij genera vulgò in vnum confunduntur, cùm longè diuersa sint, vt ex sequentibus patebit.

DEFINITIONES ET POSTVLATA.

Libram curuam appello peripheriæ concentrici mundo semicirculi portionem ex puncto aliquo inter eius extrema posito suspensam. Eam in æquilibrio esse dico quamdiu eius puncta omnia æqualibus radiis à centro mundi distant.

Postulo grauia in centrum mundi ferri. Item grauia æqualia vno sui tantùm puncto terminis peripheriarum æqualium alligata & liberè inde pendentia, nec vltra centrum porrecta æqualiter inter se ponderare, siue facere æquilibrium. *Maioris explicationis causâ addidi non debere vltra centrum porrigi: id enim satis intelligi poterat, cùm id quod vltra porrigitur non pendeat sed potius pendentibus obstet.*

Item grauia æqualia peripheriis inæqualibus dicto modo suspensa non æqualiter ponderare; sed id quod in longiore peripheria pendet deorsum ferri.

Item si grauia secundum quandam distantiam libræ dicto modo (quem & notum seu cognitum & perspectum appellabimus) affixa æquiponderent, & alteri eorum apponatur graue aliquod, tunc ea non æquiponderare, seu non esse æquilibria; sed illud deorsum ferri cui adiectio facta fuerit.

Similiter etiam si ab altero eorum auferatur graue, tunc æquilibrium cessare, & id à quo nihil est ablatum ferri deorsum. In sequentibus propositionibus pro eodem habeo distantias, peripherias, & angulos ad lationis centrum constitutos insistentesque ad eiusmodi peripherias.

PROPOSITIO XIII.

Grauia quæ in distantiis æqualibus posita æqualiter ponderant æqualia sunt.

Si enim essent inæqualia, auferreturque à maiori excessus, reliqua non æqualiter ponderarent; cùm ab altero æquiponderantium aliquid fuerit ablatum: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIV.

Grauia in distantiis seu peripheriis æqualibus posita, si fuerint inæqualia non æquiponderabunt, sed maius eorum inclinabitur.

Ablato enim excessu æquiponderabunt, cùm æqualia in distantiis posita æqualibus æquiponderent; eo autem quod ablatum fuerit adiecto, inclinatio libræ fiet ad partes eius cui facta est accessio: ergo &c. quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Has duas propositiones Eutocius inter petitiones aut corollaria ex petitionibus deducta numerat; quapropter illi prima est quæ hic & in Vulgatis latinè codicibus est est tertiâ, quæ numerorum discrepantia in cæteris deinceps reperitur.

PROPOSITIO XV.

SI grauia inæqualia in distantiis inæqualibus suspensa æqualiter ponderent: maius in minori, minus in maiori distantia suspendetur.

Sint (*Fig.* 87.) grauia inæqualia a, b, quorum a sit maius, b minus, centrum lationis d, & descripta ex centro d semicirculi portio a c b intelligatur suspendi ex c; grauia autem a & b noto modo ex a & b pendentia sibi inuicem æquiponderent.

Ostendendum est peripheriam a c esse maiorem peripheria b c.

Si enim distantia a c non est minor distantia c b: ablato excessu quo grauitas a excedit grauitatem b, cùm iam ab altero æquiponderantium (ab ipso videlicet a) ablatum sit aliquid, inclinabitur ad b; quod non est verum. Nam cùm a c distantia ponatur non esse minor ipsa c b, erit vel æqualis, vel minor: Si æqualis esset, magnitudines a & b suspensæ ex æqualibus interuallis c a, c b æquiponderarent: si autem a c esset maior, inclinatio fieret ad a; nam æqualia in distantiis inæqualibus non æquiponderant, sed quod in maiori distantia est inclinatur. Propter hæc igitur distantiam a c minorem ipsa b c esse necessarium est, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex his manifestum est, ipsas a c, c b distantias non tam poni quàm probari esse inæquales. Præterea manifestum est grauia quæ in distantiis inæqualibus æquiponderant inæqualia esse; eorumque maius illud esse quod in minori distantia pendet.

PROPOSITIO XVI.

SIt planum fixum transiens per centrum mundi d (*Fig.* 87.) & in eo sit descripta semicirculi mundo concentrici portio a c b, bifariam in c secta; ex duobus extremis a, b alligata noto modo pendeant æqualia inuicem grauia a, b.

Ostendendum est si peripheria a c b ex solo puncto c sustineatur, & liberè pendeat; esse vt antea iacebat, ac proinde ex illis compositam magnitudinem a b in situ priore perseueraturam esse.

Quoniam enim peripheria a c b est mundo concentrica minorque semicirculo, potest intelligi esse libra ex c suspensa; & quoniam interualla

c a, c b sunt vtrinque æqualia, ipsáque grauia a, b ex æqualibus interuallis suspensa noto modo pendent, libra a c b in æquilibrio manebit; ac proinde in eodem situ immota perseuerabit, nec inclinabitur ad alterutram partium; sed quælibet eius puncta æqualiter distabunt à centro d: ipsa igitur pondera manebunt vt priùs æquè à centro dissita; quod tantùm significare volumus, dum dicimus compositam magnitudinem a b in situ priore esse perseueraturam: ergo &c. quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Si quis præ oculis habuerit librum primum æquiponderantium ab Archimede scriptum, deprehenderit nos vestigiis ipsius insistentes ad hanc vsque propositionem idipsum de curuâ librâ demonstrasse, ex similibusque principiis, quod ille de rectâ ostendit. In hac tamen propositione animaduerterit nos ab ipso aliquatenus deficere; quatenus videlicet centri grauitatis nullam mentionem facimus; nec, vt ille fecit, ostendimus punctum c esse centrum grauitatis magnitudinis ex a, b composita. Ex quo fit vt nostra demonstratio non tam latè pateat, atque Archimedea.

PROPOSITIO XVII.

Sit vt in præcedente (*Fig.* 87.) planum fixum transiens per centrum mundi d, & in eo sit descripta semicirculi mundo concentrici portio a c b, bifariam in c secta; ex tribus punctis a, c, b alligata noto modo pendeant æqualia inuicem grauia a, b, c. Si peripheria a c b ex solo puncto c sustineatur & liberè pendeat, dico ipsam esse mansuram vt antea iacebat; ac proinde ex illis compositam magnitudinem a c b in situ priore esse perseueraturam.

Quoniam enim peripheria a c b est mundo concentrica, minorque semicirculo, potest vices libræ ex c suspensæ gerere; & quoniam interualla a c, c b sunt æqualia ipsáque a, b grauia æqualia; si libra a c b ex solo puncto c teneatur suspensa, ipsa vt iacet manebit, per præcedentem; sed etiam ipsa magnitudo c manebit vt prius iacebat, cùm ex eodem puncto c pendere ponatur, eodemque prorsus modo: tam ergo libra a c b positionem priorem retinebit quàm ipsæ magnitudines a, c, b, quod tantùm significare volumus, dum dicimus compositam magnitudinem a c b in situ priore debere persistere: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Hinc istud manifestum est. Si quotcunque magnitudines numero impares in peripheria a c b ita collocentur, vt cæterarum duæ quæque, quæ hinc inde pari numero computantur, sint inuicem æquales; suspensionis verò puncta occupent æqualiter dissita ab eo, vnde illa, quæ media est, suspenditur; & si peripheria ex puncto magnitudinis mediæ solo sustineatur, liberéque pendeat, ipsa manebit vt antea se habebat; ac proinde ex

illis omnibus composita magnitudo in situ priore perseuerabit.

COROLLARIVM II.

Quod si pares numero fuerint magnitudines in peripheria a c b ita collocatæ, vt duæ extremæ grauitate æquali præditæ sint, & quæque duæ hinc inde pari numero ab extremis computatæ æquales item sint, earumque puncta suspensionis æqualiter dissita à suspensione extremarum; si ipsa peripheria bifariam secetur, & ex puncto bisectionis solo sustineatur, pendeatque liberè, ipsa manebit in positione priore, ac proinde ex illis omnibus composita magnitudo in situ priore perseuerabit.

Hæc etiam propositio non tam latè patet quàm quæ illi quinta respondet in libro primo æquiponderantium ab Archimede scripto.

PROPOSITIO XVIII.

Magnitudines grauitate commensurabiles sibi æquiponderant, si noto modo pendeant in distantiis quæ reciprocè se habeant vt ipsæ magnitudines. Vel, magnitudines grauitate commensurabiles æquiponderabunt, si fuerint constitutæ in distantiis subtendentibus angulos in ratione grauitatum subcontrariè sumptos.

Sint (*Fig.* 88.) grauitate commensurabiles a, b, sitque earum maior a; sit præterea e d peripheria semicirculo minor, & mundo concentrica, sitque sicut a magnitudo ad magnitudinem b, ita arcus d c ad arcum c e. Ostendendum itaque est si magnitudo a vel alia illi in grauitate æqualis noto modo alligetur & liberè pendeat ex e; magnitudo verò b vel alia illi in grauitate æqualis similiter pendeat ex d; libráque ex solo puncto c sustineatur suspensa; committi æquilibrium, & ipsas magnitudines a & b, vel illis in grauitate æquales ita suspensas, æquiponderare sibi inuicem.

Quoniam itaque sicut magnitudo a ad b magnitudinem, ita arcus d c ad c e; magnitudo verò a est ipsi b commensurabilis, arcus d c est ipsi c e commensurabilis; quare arcuum e c, c d erit quædam communis mensura; ea verò sit n. Fiant arcus d g, d u singuli æquales arcui e c; ipsi autem d c esto e l æqualis.

Quoniam igitur ex arcu c d maiori abscissus est d g æqualis minori e c; si residuo c g addantur æquales e c, g d, compositi arcus c d, g e erunt æquales; sed arcus l e est æqualis ex constructione arcui c d: ergo arcus l e, e g sunt æquales; & l g est duplus ipsius d c, sicuti & g u est ex constructione duplus ipsius c e; quare arcus n, vtrumque l g, g u metietur; cùm eorum medietates metiatur.

Rursus quoniam sicut magnitudo a ad b, ita arcus d c ad c e; sicut autem d c ad c e, sic l g ad g u (nam vterque vtriusque duplus existit) igitur sicut magnitudo a ad b, ita arcus l g ad g u. Quotuplex autem est arcus l g ipsius n, eodem numero multiplex magnitudo a magnitudinis [illegible]

eris ergo ſicut arcus l g ad n, ita magnitudo a ad f: eſt autem ſicut arcus u g ad l g, ita magnitudo b ad a: ex æquo igitur ſicut arcus u g ad arcum n, ita eſt magnitudo b ad magnitudinem f: tam multiplex igitur eſt arcus u g arcûs n; quàm multiplex eſt magnitudo b magnitudinis f; ſed & ipſam quoque magnitudinem a eſſe multiplicem magnitudinis f ſupra oſtenſum eſt; quare magnitudo f erit magnitudinum a & b communis menſura.

Diuiſo igitur arcu l g in peripherias æquales ipſi n; quoniam arcui c e æqualis eſt ex conſtructione arcus d u, & arcui c d æqualem eſſe arcum e l oſtenſum eſt; arcus l c, c u erunt æquales: tot ergo erunt peripheriæ portiones in arcu l c, quot in arcu c u; & tot in arcu c e quot in arcu d u; & tot in arcu l e quot in arcu e g, cùm oſtenſum ſit rectas l e, e g eſſe æquales.

Quapropter ſi vnicuique partium arcûs l g apponatur magnitudo æqualis ipſi f, quæ punctum ſuſpenſionis noto modo factæ habeat in medio portionis periphericæ, compoſita ex omnibus magnitudinibus erit æqualis magnitudini a; punctum verò e erit per præcedentem illud ex quo peripheria l g dictas magnitudines connectens, ſuſpenſa liberéque pendens manebit vt iacet cum ipſis magnitudinibus: nam omnia puncta ſuſpenſionis numero paria ſunt, cùm ipſa l e ipſi e g æqualis ſit. Similiter ſi vnicuique partium arcûs u g apponatur magnitudo æqualis ipſi f, habeatque punctum ſuſpenſionis in medio ipſius partis, compoſita ex omnibus magnitudinibus erit æqualis magnitudini b: punctum verò d erit per præcedentem illud ex quo peripheria u g quæ dictas magnitudines ſuſtinet, ſuſpenſa liberéque pendens manebit vt iacet, cùm ipſis magnitudinibus. Magnitudo igitur a vel illi æqualis in grauitate, liberè pendet ex e; & magnitudo b vel illi æqualis in grauitate, pendet liberè ex d.

Rurſus cùm magnitudines inter ſe æquales in peripheria l u ita ſint collocatæ, vt puncta ex quibus liberè pendent, inter ſe æqualiter diſtent iuxta præſcriptum præcedentis propoſitionis, & cùm ſint numero pares; ſi tota peripheria l u omnes illas magnitudines ſuſtineat & ſuſpendatur ex puncto medio c; ipſa manebit vt iacet, cum ſuis magnitudinibus, per præcedentem. Sunt enim l c, c u æquales; cùm l e ſit æqualis ipſi c d, & ipſa e c ipſi d u: ergo tota l c eſt æqualis toti c u.

Intelligatur intra peripheriam l u alia poſita prorſus ipſi congruens, & ex vnico puncto alterius, quod ipſi e congruit, ſuſpendi tota peripheria l g, diuiſa in g à peripheriâ g u quæ vt iam diximus manebit, vt iacet, ſuſpenſa. Similiter ex puncto vnico eiuſdem peripheriæ priori ſuperadiectæ, quod ipſi d congruit, intelligatur ſuſpendi tota peripheria g u non ampliùs cohærens peripheriæ l g; manebit, vt diximus, ſuſpenſa in eodem ſitu, in quo erat ante diuiſionem. Si igitur tota peripheria ſuperadiecta ſuſpendatur ex vnico puncto, quod ipſi c congruit, manebit in eodem ſitu, in quo prior l u, antequam in g diuideretur; & omnes magni-

tudines sustinebit ex punctis e, d suspensas, quarum illa, quæ ex e pendet, est æqualis in grauitate ipsi a; illa verò, quæ ex d pendet, est æqualis ipsi b: quapropter idem æquilibrium eueniet si graue a ex puncto e, & graue b ex puncto d pendere intelligatur: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

IDipsum ostendendum est etiamsi magnitudines non sint grauitate commensurabiles.

Sint (*Fig.* 89.) grauitate incommensurabiles magnitudines a h b & c; præterea d f peripheria semicirculo minor, & mundo concentrica ita in e sit secta, vt sicut e d ad e f, ita sit magnitudo a h b ad magnitudinem c. Ostendendum itaque est si magnitudo a h b suspendatur noto modo ex f, magnitudo verò c ex d similiter pendeat; libráque ex solo puncto e teneatur suspensa, committi æquilibrium, & ipsas æquiponderare sibi inuicem magnitudines. Si enim non æquiponderant ad earum alterutram inclinatio libræ fiet: ea sit a h b; poterit ergo ex magnitudine a h b auferri magnitudo quædam b, ita vt reliquum a h sit commensuratum ipsi c, & adhuc præponderans ipsi c (hoc enim fieri potest vt mox ostendemus.) Atqui istud est absurdum; nam si vt magnitudo c ad magnitudinem a h, ita fiat arcus e f ad arcum e g; quoniam vt a h magnitudo ad c, ita est arcus e g ad e f; & vt arcus e f ad e d, ita est magnitudo c ad a h b: ergo ex æquo vt magnitudo a h ad a h b magnitudinem, ita arcus e g ad arcum e d: sed magnitudo a h est minor magnitudine a h b; ergo arcus e g est minor arcu ed. Præterea quoniam a h & c sunt commensurabiles, & vt a h ad c, ita est g e ad e f; si c suspendatur noto modo ex g, & a h ex f, fiet æquilibrium per præcedentem, librâ ex e suspensâ; ergo si librâ ex e suspensâ cæterisque in eodem statu permanentibus, magnitudo c intelligatur pendere ex d, cùm e d ostensa sit esse longitudo maior quàm e g, inclinatio fiet ad d: nam si duo grauia sibi æquiponderent, & eorum vnum ex longiori interuallo pendere intelligatur, inclinatio fiet ad illud quod longiùs semotum fuit vt ex terminis est euidens. Hoc autem fieri nequit, cùm aliunde ponamus inclinationem fieri ad f, pendentibus c & a h ex d & f punctis, & libra ex e suspensa; ergo magnitudines a h b & c ex f & d suspensæ sibi æquiponderant inuicem, quod erat ostendendum.

Quod autem ex magnitudine a h b possit auferri magnitudo quædam b, ita vt reliquum a h sit commensurabile ipsi c, & adhuc ipsi c præponderans, ita ostenditur. Quoniam magnitudo a h b præponderat magnitudini c, poterit ex a h b auferri quædam magnitudo ita vt residua æquiponderet ipsi c: ablata ergo sit h b, residuáque a ex f pendens æquiponderet ipsi c. Præterea potest sumi aliqua magnitudo minor ipsa h b, quæ sit pars magnitudinis c, & quæ toties sibi ipsi coaceruetur vt conficetur magnitudo a h maior quidem magnitudine a, minor verò magnitudine a h b.

h b. Eiusmodi magnitudo sit i; istud autem posse fieri constat ex iis quæ Commandinus demonstrat ad decimam sextam quadraturæ paraboles, & ad sextam de spiralibus. Quoniam ergo magnitudo a æquiponderat ipsi c; & magnitudini a adiecta est magnitudo h; ipsa a h præponderabit magnitudini c; & erit ipsi c commensurabilis, quod ostendendum erat esse possibile. Hoc ita demonstrato incidimus longo pòst tempore in exercitationem sextam R. P. Caualerij, vbi propositione 34. summopere miratur aliud non omnino dissimile isti, quod & demonstrat, nempe *ex maiori duarum incommensurabilium magnitudinum quarumlibet posse ita auferri aliquam ipsi commensurabilem, vt residuum sit minus quacunque data.* Vnde in scholio eiusdem propositionis in hæc verba admirabundus prorumpit. *Hæc sunt Geometriæ admiranda, quæ etsi in infiniti abditis recessibus lateant, eiusdem tamen vim & efficaciam non effugiunt.* Plura posteriùs in propositione 28. 29. 30. 31. videbis quæ & paradoxa iudicentur & admirabilitatem suam deriuent ex iisdem illis infinitionis & innumerabilitatis penetralibus: vnde quoque prodierunt quæ in trigesima secunda sexti superioris libri habentur.

SCHOLIVM.

In vulgatis Græcè & Latinè codicibus æquiponderantium Archimedis mutila est demonstratio quæ præcedenti respondet, nec eam Eutocij commentarij restituunt: in iisdem autem codicibus mancum quoque illud est, Ostendendũ itaque est magnitudinis ex vtriusque a ex b compositæ grauitatis centrũ esse c punctum. *Pro quo reponi debent hæc.* Ostendendũ itaque est si magnitudinis a centrum grauitatis ponatur in e, & magnitudinis b centrum grauitatis constituatur in d, magnitudinis ex vtriusque a & b compositæ centrum grauitatis esse c punctum. *Simile quid addi debet illi, quæ præsenti propositioni respondet.*

Cæterùm duæ istæ propositiones nostræ non tam amplæ sunt quàm Archimedéæ illæ, quibus probatur non tantùm magnitudines ita suspensas inuicem æquiponderare; sed etiam punctum à quo libra suspensa tenetur esse grauitatis centrum compositæ ex vtraque magnitudinis; quod nostræ propositiones non demonstrant, quia nec posse in vniuersum demonstrari positis libræ curuæ principiis ostendemus propositione vigesima tertia.

PROPOSITIO XX.

Paulò aliter demonstrantur duæ propositiones præcedentes.

Sit (*Fig. 90.*) a c recta vel circuli peripheria secta in ęqualia in b, & in inęqualia in d; sit verò d c bifariam secta in e, factęque sint b d, a f ęquales, & f b secta bifariam in g. Dico vt b e ad b g, ita esse a d ad d c; & segmenta a g, g d esse ęqualia.

Quoniam b d, a f sunt ęquales, erunt residuę f b, d c ęquales; ergo d e erit semissis rectę vel peripherię f b: sed b d est semissis duarum a f, b d: ergo composita b e ex b d, d e, erit semissis compositę a d ex tribus a f,

f b, b d: ergo vt a d ad d c, ita b e semissis rectæ, vel peripheriæ ad ad e c semissem rectæ vel peripheriæ d c; cùm ergo b f diuisa sit bifariam in g, erunt g b, d e æquales; ergo addita communi b d erunt g d, b e æquales. Et quoniam a f, b d sunt æquales, item f g, g b, erunt a g, g d æquales; tres ergo a g, g d, b e sunt æquales: ergo vt b e ad e c seu ad b g, ita a d ad d c.

Quòd si datis g b minori, & b e maiori, ex b e producta auferantur e c, e d ipsi g b æquales, fiantque g d, g a æquales: dico a c sectam esse bifariam in b, & vt b e ad b g, ita esse a d ad dc.

Quoniam enim g d, g a sunt æquales, & g d, b e sunt etiam æquales (nam æqualibus g b, d e addita est communis b d) erunt g a, b e æquales, additisque æqualibus g b, e c, erunt compositæ a b, b c æquales. Fiant d e, g f æquales; quoniam g e, b a sunt æquales, vt ostensum est, & ablatæ d e, g f sunt etiam æquales; ergo residuæ a f, b d erunt etiam æquales. Cùm ergo recta vel peripheria a c secta sit bifariam in b, & b d, a f sint æquales, ipsaque f b secta bifariam in g; erit ex momodo demonstratis vt b e ad b g, ita a d ad d c.

His ita demonstratis data sit libra g e ex b pendens, data item sint pondera h & i habentia inuicem rationem brachiorum g b, b e. Dico si ex punctis g & e intelligantur pendere pondera æqualia ipsis h & i, libram in æquilibrio constituram.

Intelligatur per lineam vel peripheriam a c dispensari æqua ratione grauitas æqualis ambabus h & i, ita vt mente concipiatur esse intra lineam a c grauitate carentem, alia grauitatis linea; manifestum est grauitatem a c sectam fore ita in d, vt sicut recta vel peripheria b e ad b g, ita sit grauitas a d ad grauitatem d c: sed vt b e ad b g, ita est grauitas h i ad grauitatem i: ergo vt grauitas a d ad grauitatem d c, ita est grauitas h ad grauitatem i: ergo componendo vt grauitas a c ad grauitatem d c, ita est grauitas h i ad grauitem i: sed grauitas a c & grauitas h i ponuntur æquales: ergo grauitas d c & grauitas i sunt æquales: ergo & grauitas a d est æqualis grauitati h.

Quoniam ergo grauitas a c diuiditur in punctis g, b, d, e eadem proportione qua recta a c est diuisa in iisdem punctis; Manifestum est diuisam esse bifariam in b grauitatem a c; & in g grauitatem a d, & in e grauitatem d c. Rursus quoniam grauitates a c, a d, d c sectæ sunt bifariam in punctis b, g, e; manifestum est grauitatem a c, si tota ex solo puncto b suspendatur, mansuram vt iacet, siquidem recta a c sit parallela horizonti: istud enim assumitur tanquam per se notum, & perinde est euidens ac aliud ab Archimede assumptum, si æqualia pondera ex æqualibus longitudinibus libræ suspendatur, ipsam, siquidem parallela fuerit horizonti, in eodem situ permansuram. Similiter mafestum est grauitatem a d, si tota ex solo puncto g suspendatur, mansuram vt iacet; similiterque grauitatem d c si tota ex solo puncto e suspendatur, permansuram vt iacet.

Si ergo intelligatur linea ac grauitate carere apta tamen esse sustinendis ponderibus,& esse horizonti parallela,atque ex eius puncto g solo suspendatur tota grauitas a d non amplius vnita grauitati d c (nihil enim vetat quin istud facilè intelligi possit) & ipsa grauitas d c ex eiusdem lineæ a c puncto e tota pendeat ; tota autem linea a c sustinens illa onera suspendatur ex puncto b solo, manifestum est totam grauitatem a c suspensam fore ex puncto b solo ; & permansuram vt iacet, quia suspensa fuerit ex puncto medio b ; ostensum enim est grauitates a d, d c non mutatum ire positionem quam habebant ante solutionem connexionis in d. Ergo libra g d suspensa ex b manet in æquilibrio sustinens ex g puncto grauitatem a d ipsi h æqualem ; & ex puncto e grauitatem d c ipsi i æqualem ; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hæc demonstratio non nititur nisi primis principiis libræ vt manifestum est,nullámque mentionem facit centri grauitatis.

PROPOSITIO XXI.

SI grauia lineis ad centrum coëuntibus pendere ponantur, & in libræ curuæ distantiis diuersis iuxta demonstratas leges constituta æquiponderare sibi inuicem ; poterit accidere vt longè diuersa sit proportio brachiorum libræ curuæ à proportione brachiorum rectæ.

Sit (*Fig.91.*) libra curua c b d suspensa ex b ; ex c & d noto modo pendeant magnitudines c, d, æquiponderentque sibi inuicem : erit ergo magnitudo c ad d,vt arcus b d ad arcum b c, suppositis principiis ex quibus tres priores propositiones demonstrauimus. Eductæ sint ad centrum a rectæ c a, a d, quibus productis occurrat in e & f recta e b f trangens in b. Si libra recta ponatur e b f, & ex punctis e & f per rectas e c, f d pendere grauia c & d, ac proinde æquilibrium committi, cùm angulus e a b sit ad angulum f a b vt graue d ad graue c ; dico posse euenire vt proportio rectæ e b ad rectam b f longè alia sit à proportione grauis d ad graue c.

Ponamus enim arcum b d esse æqualem semissi arcus b c, seu angulum b a f esse æqualem semissi anguli e a b ; fiatque angulus b a h æqualis angulo b a f ; quoniam triangula a b h, a b f sunt æquiangula, habentque latus b a commune,erunt & æquilatera,latusque b h erit æquale lateri b f, & latus a h lateri a f. Rursus quoniam in triangulo b a e angulus e b a est rectus,reliqui duo simul ipsi erunt æquales, ac proinde singuli erunt ipso e b a minores ; ergo latus a e oppositum angulo maiori erit maius latere a b quod minori subtenditur.Præterea quoniam trianguli a b e angulus b a e sectus est bifariam per rectam a h, erit per 3. sexti Euclidis vt e a recta ad a b,ita e h recta ad rectam h b : sed e a est maior recta b a

ergo e h est maior recta h b. Quoniam ergo arcus c g, g b sunt æquales, & recta e h est maior recta h b, proportio rectæ e h ad h b erit maior proportione arcus c g ad g b per 10. quinti Euclidis: ergo componendo proportio rectæ e b ad h b siue ad b f ipsi æqualem, erit per 28. quinti Euclidis, maior proportione arcus c b ad arcum g b seu ad b d ipsi æqualem, hoc est proportione anguli c a b ad angulum b a f.

Cùm igitur proportio rectæ e b, ad b f eò sit maior quò maior est proportio rectæ e h ad h b: & proportio rectæ e h ad h b sit eadem, vt ostensum fuit, cum proportione rectæ e a ad a b: quo maior erit excessus, quo recta ea superat rectam a b, eo maior erit proportio rectæ e b ad b f: sed excessus rectæ e a ad a b potest esse quantuscunque, ergo proportio rectæ e b ad rectam b f potest esse longè diuersa à proportione anguli c a b ad angulum b a f; hoc est à proportione peripheriæ c b ad peripheriam b d; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Hinc manifestum est cùm quadratura illa paraboles & aliorum, quæ fit per libram pendeat ex illa propositione *grauia inæqualia vtrinque pendentia tunc æquiponderare cum reciprocè se habuerint vt brachia libræ:* & cùm si grauia ponantur vergere ad idem centrum, eiusmodi propositio non sit vera; Archimedeæ libræ nequaquam congruere eiusmodi hypothesim.

COROLLARIVM II.

Manifestum præterea est libras quas vulgò *Romanas* appellamus esse omnes fallaces, si ad mathematica momenta exigantur: earum enim diuisiones nituntur illa propositione *grauia inæqualia vtrinque pendentia tunc æquiponderare cùm reciprocè se habuerint vt brachia libræ*, Error tamen nullus sensu percipitur, eò quod in tantâ à centro mundi distantiâ linea recta e f sensu distingui non possit ab arcu c b d illi respondente. Quod si eiusmodi libra vicina fieret centro mundi, dubio procul deprehenderetur eius fallacia non sine admiratione Artificum, quibus istud videbitur prorsus paradoxum.

PROPOSITIO XXII.

Sit (*Fig. 92.*) circulus a c d ex centro e descriptus, cuius peripheria ducta sit per d centrum mundi; sit item magnitudo f g composita vt in decima septima dictum fuit, & connexa arcu f h g qui sit portio circuli habentis diametrum æqualem diametro circuli a c d; atque vt magnitudo g ad f, ita sit f h arcus ad h g arcum. Si peripheria f g sustentans magnitudines f & g ponatur congruere peripheriæ a c d in quacunque positione; (modò tamen ille situs non impediat quo minus magnitudo ex f & g composita mox suspendenda, ex vno puncto pendeat tota iuxta cautionem primi postu-

lati) ex puncto autem quod ipsi h congruet suspendatur & liberè pendeat.

Ostendendum est ipsam peripheriam mansuram in priori situ, hoc est, concentricam circulo a c d; ac proinde magnitudinem compositam in eadem positione perseueraturam.

Puncta itaque f, h, g congruant punctis a, c, b, & ducantur rectæ a d, c d, b d per centrum mundi d, ex quo per a ducatur circuli portio a i l occurrens rectis d c, d b in i & l.

Quoniam anguli a d c, c d b insistunt arcubus a c, c b: habebunt se vt peripheriæ a c, c b quibus insistunt per 33. primi Euc. sed arcus etiam a i, i l habent se vt anguli a d i, i d l ipsis insistentes ad centrum d: ergo vt a c ad c b, ita est a i ad i l: sed vt a c ad c b, ita est graue b ad graue a: ergo vt arcus a i ad arcum i l, ita est graue b ad graue a. Si ergo peripheria a i l mundo concentrica ponatur esse libra ex i suspensa liberéque pendens; ex punctis verò a & l sustinere magnitudines a & b liberè etiam pendentes per lineas ad centrum mundi vergentes, cùm l b vergat ad centrum, & cùm magnitudines se habeant reciprocè vt latera, æquiponderabunt sibi inuicem per 19. vel 20. propositionem; assumimus enim eandem magnitudinem si per eandem lineam ad centrum ductam pendeat ex eodem libræ puncto, eiusdem esse ponderis siue sit remotior, siue vicinior centro; hoc inquam assuminus inter postulata quicquid sit de quæstione physica, quam passim negligunt ij qui non putant aurum in summa turri eadem lance eodemque modo appensum, esse magis vel minus graue, nisi fortasse per accidens, quàm si appendatur in ima turri: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Manifestum hinc est si grauitatis centrum non absolutè sed secundùm aliquem respectum dicatur, magnitudinem compositam f g habere centrum grauitis h; non quidem pro quocunque situ absolutè, sed pro situ omni quem in circulo a b d peripheria f h g modo supra explicato collocata potest habere. Appelletur autem grauitatis quodammodo centrum, vt distinguatur à grauitis centro simpliciter: linea autem d c i appelletur perpendiculum magnitudinis a b vel f g compositæ.

COROLLARIVM II.

Manifestum quoque inde est si manente centro mundi d, magnitudo a b pendens de peripheria c b d ex solo sui puncto c, per arcum c b a finatur sponte ferri ad centrum d, partes a, b permansuras in eadem peripheria durante illo motu lationis curuo; & æquilibrium quod partes a, b suspensæ ex c semel committunt, permansurum esse; nec non continuam fore mutationem perpendiculorum ex c in d.

PROPOSITIO XXIII.

IN compositâ magnitudine de qua præcedens propositio agit (*Fig. 93.*) non datur centrum grauitatis simpliciter.

Sit composita magnitudo f g suspensa ex punctis f, g connexis per arcum f h g circuli cuius centrum e: item per arcum f c g circuli cuius centrum b: atque vt magnitudo f ad g, ita sit arcus g h ad arcum h f, & ita etiam sit arcus g c ad c f. Si ergo in perimetro circuli cuius centrum e intelligatur esse centrum mundi, (hoc enim fieri potest manente centro eodem mundi, si magnitudo f g, & arcus f h g situm illum concipiantur acquirere in quo circuli h f l g aliquod peripheriæ punctum congruat centro:) perpendiculum magnitdinis f g transibit per h centrum quodammodo grauitatis, sicut in præcedenti ostendimus: similiter si per alium magnitudinis f g situm, in perimetro circuli c f i g ex centro b descripti intelligatur esse idem centrum mundi, perpendiculum magnitudinis f g transibit per c centrum quodãmodo grauitatis. Puncta c & h connectãtur rectâ c h occurrente circulorũ peripheriæ in i & l. In arcu f i g extra puncta f, i, g ponatur esse a centrum mundi, vel quod idem est circulus c a i g deferens magnitudinem f a ponatur habere punctum a in centro mundi, & iungatur a c perpendiculum magnitudinis ita collocatæ; in arcu autem f l g extra puncta f, l, g ponatur secundum alium magnitudinis f g situm esse centrum mundi d, & iungatur d h perpendiculum magnitudinis ita collocatæ. Dico perpendiculum a c non transire per punctum h, ac proinde cùm per punctum h transeant infinita perpendicula pro infinitâ positionum varietate quam centrum mundi potest habere in arcu f l g sicuti sub finem superioris monstrauimus; & cùm centrum grauitatis absolutum sit illud per quod transeunt omnia omnino perpendicula (vnde fit vt ad inueniendum illud, posito quod detur, satis sit inuenisse communem sectionem duorum perpendiculorum) si magnitudo f g haberet centrum grauitatis, illud foret h in quo coëunt tot perpendicula: ergo si ostendamus perpendiculum a c non transire per h ostenderimus magnitudinem f g carere centro grauitatis perfecto.

Quoniam ergo per puncta c & h transit recta c h, & recta a c secat rectam c h in c, non secabit illam in alio puncto; duæ enim rectæ lineæ nec habent idem commune segmentum, nec spatium comprehendunt ex axiomatibus 13. & 12. primi Euclidis: ergo perpendiculum a c non transit per h: ergo licet per h transeant plura perpendicula, non tamen omnia: ergo h non est centrum grauitatis: magnitudo igitur f g caret centro grauitatis absolutè dicto; quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Ex his manifestum est, si grauia f & g sint inæqualia, & magnitudo f g feratur ad centrum d, in illa latione punctum h non esse semper in per-

pendiculo h d. Recta enim f g secet perpendiculum h d in m; ergo si id ita foret, puncta f, g caderent per rectas f o, g p parallelas perpendiculo h d: ergo completo parallelogrammo f o p g, cùm punctum f congrueret puncto o, & punctum g puncto p, rectáque f g rectæ o p, & punctum m puncto q posito inter d & h, si iungerentur rectæ o d, d p, sequeretur vt est arcus f h ad arcum h g, vel vt angulus f d h ad angulum h d g, ita perpetuò fore angulum o d q ad angulum q d p; istud enim necesse est vt magnitudines o p connexæ maneant in perpendiculo o d. Id verò ita apertè est falsum, quando magnitudines f, g sunt inæquales, vt impugnatione non egeat.

COROLLARIVM II.

Manifestum insuper est cùm grauia f, & g in constructione ponantur sponte & semper pendêre ex punctis f & g arcûs f g h, vel f c g deferentis, theorema præsens non cogere vbi non assignabuntur duæ partes alicuius magnitudinis sponte & constanter pendentes singulæ ex suo vnico puncto peripheriæ deferentis: Quapropter theorema non esse generale nisi pro magnitudinibus simili modo compositis.

PROPOSITIO XXIV.

SOluuntur primæ tres dubitationes, quæ in propositione duodecima extant.

I. Magna dubitationum pars vim facit, quasi Archimedes pronuntiet id esse absolutè, quod nihil refert de facto ita sit necne; dummodo quod ex hypothesi ipsius consequi demonstrandum proponitur, rectè sequatur. Non ait grauia ferri deorsum per lineas parallelas, sed ex hypothesi quod grauia ferantur deorsum lineis ad planum horizontem perpendicularibus, postulat vt inuicem æquiponderent, quoties ipsa æqualia erunt, & æqualibus interuallis ex rectâ pendebunt librâ. Similiter neque absolutè asserit planas figuras esse graues, sed si graues esse ponantur & æquales in grauitate, eas dum ex æqualibus interuallis per lineas parallelas pendent, æquiponderare sibi inuicem, tanquam concessum assumit. Dum Mathematicus in figurâ quam pulueri inscripsit, lineam, quæ re ipsa pedalis non est, pedalem esse ponit; nec ipse errat, nec auditorem fallit; quia videlicet omnes intelligunt non esse æstimandam veriatatem aut falsitatem eiusmodi propositionum *conditionalium* ex veritate vel falsitate antecedentis; sed connexionis, quâ consequens adhærere dicitur eiusmodi antecedenti sub conditione affirmato. Istam doctrinam optimè expressit Aristoteles multis locis, sed præcipuè l. 13. met. cap. 3. summâ 1. vbi postquam dixit mathematicas disciplinas contemplari obiectum suum nempe *ποσόν τι*, quam Scholæ reddunt *quantitatem*, vt separatam ab iis quæ ipsi accidunt, & per quæ sensilis fit, scilicet ab albedine, frigore, duritie &c. subdit: *quapropter si quis ponat hæc ab accedentibus eiusmodi separata, ac de iis aliquid quatenus talia sunt, consideret, nulli propterea errori*

obnoxius erit, quemadmodum nec si in terrâ figuram describat, & eam quæ pedalis linea non est, pedalem esse dicat; neque enim in propositionibus istis mendacium falsumve inest. Vbi per propositiones intelligit illas quæ conditionali particulâ afficiuntur: vt *si sol lucet*; *si superficies est grauis*, *si linea non est grauis* &c.

II. Eiusmodi hypotheses nemo est qui reprehendat, quando sunt de re quæ licet non existat, existere tamen potest; verissimumque tunc est quod docet Aristoteles lib. 1. poster cap. 10. Geometram non assumere falsa; quia licet, exempli causa, graue quo in figura sua vtitur non sit cuiusmodi esse ponitur; quod tamen demonstratur, non debet intelligi nisi de illo alio graui per istud significato. Quando autem hypothesis est de re impossibili, norunt Philosophi & maximè Theologi adhuc illam esse posse vtilem ad veritatis indagationem, quoties nimirum id, ex quo res fit impossibilis, non pertinet *formaliter*, sed *materialiter* tantùm ad proprietatem quæ demonstratur: hanc enim distinctionem tradit Aristoteles libri 13. loco citato, vbi asserit aliquid *obiecto* scientiæ competere vel *formaliter* ἐντελεχείᾳ, vel *materialiter* ὑλικῶς; ab eóque quod *materialiter* inest, posse *obiectum* separari absque vllius erroris periculo.

III. Sicut apertum est eum qui demonstrauit tetragonismum circuli aurei, demonstrasse etiam tetragonismum circuli argentei vel cuiuscunque alterius speciei physicæ; quamuis demonstratio processerit per proprietates quæ soli auro attribuuntur: quia videlicet has proprietates auro conuenire & non argento, nequit esse radix vllius diuersitatis in proportione diametri ad perimetrum cuiuscunque circuli: ita pariter manifestum est quadrationem circuli inuentam per proprietates libræ rectæ, grauiúmque lineis parallelis ab ea pendentium, esse communem omnibus circulis, siue superficies eorum sint graues, siue non; & si sint graues, siue ferantur deorsum lineis parallelis, siue coeuntibus: ista enim omnia *materialiter* inesse censeri debent quantum attinet ad inducendum discrimen vllum in proportionem diametri ad perimetrum, vel quadrati quod potest diameter ad aream circularem. Ex his facile erit respondere ad singula ex tribus quæ opposita fuerunt.

IV. Ad primum respondemus Archimedis instituto satis esse, quod figuræ planæ graues esse possint, siue illa grauitas sit illis naturalis, siue extraordinariè ab Authore naturæ indita: Imò quamuis superficies grauis esset impossibilis; quia tamen illa impossibilitas non immutaret proportionem diametri ad perimetrum circuli, absque vllo syllogismi vitio posset ex hypothesi superficiei grauis demonstrari eiusmodi proportio. Summa igitur responsionis est Archimedem demonstrare quadrationem suspensæ figuræ ex grauitate figuræ planæ, non quidem re ipsa existentis, sed quæ existere possit, vel saltem quæ si existeret nihil noceret conclusioni illatæ.

V. Ad secundum verò eadem datur solutio, nimirum Archimedem argumentari non ex eo quod de facto sit; sed ex eo quod possibile sit, vel quod

quod si possibile ponatur nullum trahat absurdum, quantum attinet ad rectè concludendi modum. Ad illud autem quod quæritur cur Archimedes non assumpserit grauia ferri lineis sibi inuicem coincidentibus ad centrum mundi, manifesta est responsio ex corollariis propositionis vigesimæ tertiæ. Ibi enim ostendimus libræ rectæ brachia non esse reciprocè in ratione grauium pendentium si lineæ quibus pendent tendant ad idem punctum; & tamen illa proportione reciproca nititur demonstratio Archimedei tetragonismi: oportuisset igitur assumere libræ brachia esse curua, & ita principium demonstrationis istius præcipuum quod habetur propositione 5. quadraturæ paraboles, inutile redditum fuisset; nec illi simile aliud in curuis occurrisset.

VI. Ad tertium primò quicquid sit an de facto linea sit grauis, posse tamen absque vlla absurditatis vmbra hypothesim fieri, iuxta quam illæ lineæ quę assumuntur ad sustinenda grauia ex libra pendentia careant grauitate; id enim fieri posse apertum est, vel quia de facto illa carent, vel quia, si quam habent, potest ea à Deo contraria qualitate vel alia ratione suspendi. Siue igitur lineę, quę in plano graui ponuntur, graues esse debeant, siue non; certum est posse assumi eas lineas, quę non funguntur nisi vice vinculi sustinentis graue aliquod, carere grauitate. Secundò respondemus quantum ad id spectat, quod graue ponitur eiusdem esse ponderis siue collocatum fuerit in extremo librę puncto, siue in perpendicularis ab illo liberè pendentis extremo, potuisse ab Archimede id assumi tanquam alibi demonstratum. Iordanus certè q. 4. opusculi de ponderositate editionis Venetæ 1565. tradit principium quod omni libræ rectæ applicari valet, quamuis ab ipso nisi vitio librarij id factum sit, non applicetur nisi ad libram cuius brachia fuerint æqualia. Illud autem principium tradetur in sequenti propositione: ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO XXV.

VII. SI recta linea moueatur in plano ad horizontem recto, ita vt ad ipsum perpendicularis maneat, & eius extremum punctum per circuli peripheriam incedat, incedet quoque extremorum alterum per circuli priori æqualis peripheriam similiter positam.

Sit (*Fig.* 94.) peripheria circuli b g d in plano a b d ad horizontem recto; sit in eodem plano recta b f perpendicularis ad illum, & eius extremum b intelligatur ita moueri per peripheriam b g d, vt maneat perpendicularis ad eundem horizontem. Dico alterum extremum f incedere per circuli priori æqualis peripheriam similiter positam.

Centrum peripheriæ b g d sit a, & per a ducta sit a l parallela horizonti. Item per a ducta sit a i perpendicularis ad horizontem, & æqualis rectæ b f: ex centro i descripta sit peripheria f h e interuallo rectæ i e ipsi a d æqualis; per i acta sit i f ipsi a l parallela. Dico extremum f incedere

per arcum f e. Ponatur enim in sui motus cursu punctum b congruere puncto g, & per g agatur l g u h æquidistans rectæ a e occurrens lineis a l, i u, e f in punctis l, u, h: quoniam a l u i est parallelogrammum, erunt a l, u i æquales; ergo l g, u h sunt æquales; cùm ergo l g, u h sint æquales, addita cõmuni g u, vel eadem ablata, erunt l u, g h ęquales: sed l u, a i, opposita parallelogrammi latera sunt æqualia; ergo rectæ a i, g h sunt æquales; ergo cum b f sit ipsi a i æqualis, erit quoque ipsi g h æqualis: ergo quando punctum b congruet puncto g, punctum f incidet in punctum h; quod erat demonstrandum. Idem demonstraretur si b g d esset quæuis alia linea, nimirum lineam f h e esse ipsi b g d æqualem & similiter positam, vt ex vi demonstrationis apertum est.

Iam intelligatur libra b c suspensa ex a, cuius brachium a b describat motu suo peripheriam b g d: sit pondus quodlibet n. Dico siue ponderis n centrum grauitatis congruat puncto b, siue congruat puncto f extremo perpendicularis b f, ipsum pondus n ferri per lineam eodem modo declinantem à perpendiculari. Quoniam enim siue sit in b, siue in f, semper describit motu suo peripherias circuli æquales, & similiter positas, prout ostensum fuit; ergo si b f producatur ad m, & g h ad o, angulis f b g, h g d æquales erunt anguli m f h, o h e. Quoniam igitur anguli f b g, m f h sunt æquales, & quando idem pondus fertur per angulos æquè obliquos æqualis est velocitatis, ac proinde æque premit deorsum punctum libræ à quo pendet: pondus n siue sit in puncto b, siue in puncto f, æquè premet libram; saltem ratione viæ magis vel minus obliquæ non erit magis vel minus graue. Hoc autem demonstrato non apparet ex quo capite fingi possit non esse æque graue in puncto b, atque in puncto f. Nam pondus in summâ turri non minus vel magis premit humeros, quàm in imâ; & quamuis minùs vel magis premeret ratione præcisè maioris vel minoris altitudinis, potuisset Archimedes hypothesim illam assumere quâ grauia non fiant magis vel minùs grauia, ex eò tantùm quod editiore vel depressiore sint loco constituta: ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO XXVI.

Soluitur quartum dubium ex coaptatione figurarum petitum.

Octauum pronuntiatum Euclidis *quæ sibi mutuò congruunt, ea inter se sunt æqualia*, ita perspicuum est, vt nihil clarius & euidentius in hoc scientiarum genere nobis appareat; vnde mirati sumus cum apud Caualerium in exercitationis tertiæ capite vndecimo vidimus istum demonstrandi modum non probari quibusdam Geometriæ peritis, ideóque & Archimedem in hac disciplinâ facilè principem, nonnihil notari quod eum adhibuerit in demonstratione vigesimæ propositionis libri de conoidibus & sphæroidibus; ita enim se habent Guldini verba descripta à Caualerio. *Verùm hæc ipsa demonstratio non videtur arridere Geometris; Commentator enim Archimedis Federicus Commandinus silentio illam præterit: Riualtus verò illam tan-*

quam Archimede indignam omittit, eique aliam à se excogitatam substituit.

Autores qui hanc Archimedis demonstrationem vitiosam pronuntient, nominatim recensuit duos quidem Guldinus; sed quo iure ex mox dicendis planum fiet. Commandinus, fateor, silentio illam præteriit, hoc est, nullis eam commentariis illustrauit; at inde ego infero eam ita perspicuam illi visam esse, vt per se sola sine ullius explanatione intelligi possit. Hac etenim vnica de causa eodem silentio inuoluit in libello de lineis spiralibus propositiones 12. 14. 15. 17. 23. & de quadratura parabolæ propositiones 8. 12. 13. 23. quas omnes non arrisisse illi, nemo sapiens dixerit. Quid verò opus coniecturis vbi expressum & luculentum Commandini testimonium extat, videlicet in Euclidis primum librum ad quartam propositionem? *Hic demonstrationis modus*, inquit apud Caualerium, *qui fit per superpositionem figurarum præter quam quod approbatur à Proclo Mathematicarum scientiarum peritissimo, est etiam maximo vsui Mathematicis: Archimedes enim eum vsurpat non solum in planis figuris, vt in libro de centro grauitatis planorum, sed etiam in solidis, vt in libro de conoidibus & sphæroidibus.* Quod autem Archimedes agens de centro grauitatis planorum vt euidens sumpsit, idipsum pari iure & euidentia Commandinus ad centrum grauitatis solidorum transtulit, in libro quem de hoc argumento scripsit, ita enim habet secunda eius petitio, *solidis figuris similibus & æqualibus inter se aptatis, centra quoque grauitatis inter se aptata erunt.* Hinc in decima sexta propositione demonstrat *in sphæra & sphæroide idem esse grauitatis & figuræ centrum.*

Sed neque etiam Riualtus huic Commandini sententiæ de suo repugnat; etenim in scholio propositionis vigesimæ libri de conoidibus & sphæroidibus iam laudati ita scribit, teste Caualerio, *sunt qui superpositiones illas rejiciant in Geometria, quanquam alij & viri graues admittant.* Cur autem ipse Riualtus aliam demonstrationem excogitare debuerit, non video nisi vt ingenij sui fœcunditatem, laudando sane conatu, probaret; ipsam enim Archimedis demonstrationem, ego ipso dignissimam arbitror; cùm delineationem adhibeat simplicem nec multitudine linearum offusam, & breui perspicuáque ratiocinatione rem ipsam attingat; quæ summa est laus Geometræ. Quando primùm in illam propositionem incidi, timui equidem primo aspectu ne vitio aliquo Typographi diagramma appositum alteri cuidam propositioni conueniret; eo quod planissimum appareret, cùm tamen inseruire deberet ad demonstrandum, *solidum sphæroides plano per centrum ducto bifariam secari tum ipsum, tum ipsius superficiem.* Re tamen deinde propiùs inspectâ omnia Archimedis proposito quadrare admirabundus comperi; & in ista propositione verum esse mecum ipse fassus sum quicquid de eius methodo testatum reliquit Plutarchus verbis relatis in capite octauo prolegomenon; esto, id in quibusdam aliis, vt modo extant, non habeat locum, sicuti monuimus in scholio propositionis secundæ libri tertij tetragonismicorum.

Testis est Clauius in scholij propositionis decimæ sextæ tertij Eucli-

dis editione secunda, Peletarium in ea fuisse sententia vt antiquissimas Euclidis demonstrationes in propositionibus quarta & octaua primi libri, atque in vigesima quarta libri tertij, rejiciendas censuerit tanquam non Geometricas, quippe in quibus figuram vnam alteri superponi concipere nos animo oporteat; quod mechanicũ & à Geometra alienum dicere non veretur. Sed istius opinio vel hoc vno respuenda iure merito venit quòd (verba sunt Clauij) *hac in re non solùm Euclidem in crimen vocat, verum etiam Archimedem quo omnium iudicio acutior in demonstrando & subtilior fuit nemo, eiusque Commentatorem grauissimum eumque doctissimum Eutocium Ascalonitam qui eodem argumentandi genere vtuntur in æquiponderantibus; imo verò & omnes Geometras redarguat necesse est, qui non rarò hoc argumenti genus adhibent*; quod adeo verum est vt idem Clauius ibidem asseueret, si quis hunc modum argumentandi è medio tollat, vniuersam ab eo Geometriam funditus euerti. Clauium in methodo illa Euclidis defendenda sectatur eius discipulus clarissimus P. Blancanus in dissertatione de natura mathematicarum disciplinarum pag. 24.

Mihi quidem, prout initio iam dixi, res tam plana est vt eam offendiculo esse vlli hominum posse valdè mirer. Aristoteles certè libro quarto physicorum disputaturus de loci natura ponit veluti disputationis suæ fundamentum sex axiomata desumpta, vt ipse ait ἐκ κοινῶν ἐννοιῶν *ex communibus notionibus loci*, quorum tertium est, *primum locum neque maiorem, neque minorem esse eo quod in ipso continetur*, huius verò ratio vt ait Simplicius in illum locum, fol. 132. col. 2. lin. 14. non aliundè peti debet quàm ex eo quod. τὰ ἐφαρμόζοντα ἀλλήλοις καὶ μήτε ὄγκον ποιοῦντα, μήτε ἔχοντά τι μεταξὺ, ἐν τῷ αὐτῷ ἐστι, hoc est, *quæ sibi mutuò congruunt aptata, & mole carent, nihilque interpositum habent, ea sunt in eodem spatio*. Eiusmodi autem sunt duæ extimæ superficies vna corporis ambientis, altera corporis intus comprehensi. Porro vt hoc quod Mathematicum est non omittamus occasione data: Aristoteles superficiem quamcunque etiam curuam ibi græca voce ἐπίπεδον vocat; cùm tamen ab Euclide & aliis post ipsum ea vox non vsurpetur nisi pro planâ: fecit autem istud Aristoteles more vt Simplicius fol. 137. col. 1. lin. 17. monet, antiquorum πᾶσαν ἐπιφάνειαν ἐπίπεδον καλούντων, *eo nomine appellantium quamlibet superficiem*: quare non rectè vertunt aliqui vocem illam eo loci per latinam *planum*.

Sed numquid re ipsâ superpositio est aliena à demonstratione verâ; quantumuis eam adhibuerint Antiquiores, & Recentiorum peritissimi, in quibus est Lucas ille Valerius, quem tanti & quidem merito omnes faciunt? Syllogismum vnum aliquem ad maiorem dicendorum euidentiam assumo.

Quæ sibi mutuò congruunt sunt æqualia; sed magnitudo A congruit magnitudini B, ergo magnitudo A æqualis est magnitudi B. Prima huius syllogismi propositio est euidens, quantum satis est ad generandam conclusionem euidentem, nisi per secundam propositionem stet. Si ergo ista secunda quæ affir-

mat magnitudines A & B sibi congruere, non aliunde probetur quàm ex eò quod, oculi vel manûs tangentis & explorantis iudicio, magnitudines A & B sibi superimpositæ congruere deprehendantur; ea propositio non est satis euidens ad pariendam demonstrationem, rectéque ista superpositio dicitur mechanica & à Geometriâ aliena. Quòd si mentis oculo ea superpositio perfectè & euidenter quadret; nihil planè deest isti propositionum pari ad generandam scientiam veram, & Geometra dignam. Istud plane vult Clauius dum Peletario objicit quod non satis intellexerit quo pacto Geometræ superpositionem vsurpent. *Neque enim*, inquit, *volunt re ipsa faciendam esse superpositionem (hoc enim mechanicum quid esset) sed cogitatione tantum ac mente, quod opus est rationis atque intellectûs.* Hoc ipsum, teste etiam & approbante Guldino apud Caualerium iam allegatum, paucissimis verbis tradit Christophorus Grienbergerus ad octauum illud Euclidis pronuntiatum *quæ sibi mutuo congruunt sunt æqualia*; addit enim, *debere talem congruentiam constare intellectui.* Istud quoque docet Blancanus in libello *de natura Mathematicarum* cap. 3. cuius hic est titulus *Recentiorum calumnia aduersus Mathematicas diluuntur*; *earum verò* quinta hæc est, *quod Geometria plures habeat demonstrationes per superpositionem factas.* Huius tamen Authoris verba possent alicui non satis ad omnia attendenti persuadere ipsum falli dum negat *ea quæ probanda sunt æqualia, superponi à Geometris*: non enim negat eam superpositionem vsurpari ab ipsis quæ fiat mente congruentiam mutuam ita superpositorum euidenter cognoscente; sed aliam quæ solo oculorum visu aut manuum attrectatione comprobetur: quod sane liquidò constat ex causa quam mox subjicit, *hæc enim*, inquit, *ratio nullius esset momenti, nec Geometrica, sed Physica potiùs*; NITERETVR *enim* SENSIBVS.

Cæterùm ita à demonstrationibus geometricis sola sensuum externorum attestatio iudicatur ab Euclide aliena, vt in problematum praxi, cùm lineæ duci debeant rectæ, & ipsis æquali interuallo describi circuli; eiusmodi ductum & descriptiones sibi dari postulare malit, quàm ea committere oculorum fidei & manuum industriæ: ita vt censeri non debeat factum absolutè, quod proponebatur faciendum: sed cùm hac conditione, *si lineas rectas & circulos, quæ in constructione describenda fuerunt, constet euidenter suis definitionibus exactè respondere*: modum enim demonstrandi illa esse mathematicè delineata nullum habemus, cùm oculorum & sensuum præsidium ad istud non sufficiat. Ex quo scrupulum Peletario eximes, *cur in problematibus superpositio illegitimè vsurpetur, in theorematibus legitimè?* Quia videlicet in theorematibus constare euidenter menti nostræ à materia res abstrahenti potest duorum congruentia; at verò in praxi problematum quæ materiæ immixta est, ea non nisi per sensus deceptione obnoxios denuntiatur. Porrò cautè dictum à nobis modo fuit, in praxi problematum non admitti à Geometris superpositionem, nam extra ipsam praxim & constructionem nihil vetat quominus ad conclusionis ve-

ritatem demonſtrandam ſuperpoſitione vtamur, quia hoc iam theorematicum aliquid eſt.

Quoniam autem pacto iſta *congruentia* in theorematibus, non oculis ſed mente probetur, patet laudatas Euclidis & Archimedis propoſitiones legenti, quibus adiungi poteſt Thaleti Mileſio adſcripta demonſtratio à Clauio, & vt videtur à Proclo in decimam quintam definitionem Euclidis, *qua diameter dicitur biſariam ſecare circulum:* id verò Thales non aliunde oſtendit quàm ex cogruentia duarum eiuſmodi partium. Quod autem iſte in circulo oſtendit, id eodem prorſus pacto Archimedes in ſolido ſphæroide demonſtrat. Aliquando tamen ipſa congruentia ἀμέσως menti liquet; vt *ſi duæ rectæ in duo puncta conueniant ſibi totas congruere, nec ſpatium comprehendere*, quod eſt duodecimum axioma primi Euclidis, eóque nituntur tam Conica Apollonij, vt ex prima omnium propoſitione eſt apertum; quàm quæ Serenus de ſectione cylindri demonſtrat, ſicut ex ſecunda primi libri planum fit.

Omiſeram iſtud principium ita ſolo lumine mentis natiuo fieri perſpicuum, vt Auerroes in libri Phyſicorum ſeptimi textu 29. illud ſolum aſſerendæ æqualitatis inter duas magnitudines agnoſcat; vnde infert circuli peripheriæ non poſſe dari æqualem rectam, *quia ſuperponi ſibi non poſſunt*: inde quoque colligit arcus duorum circulorum inæqualium non poſſe eſſe æquales; nec niſi *latè* affirmari rectam eſſe breuiſſimam à puncto ad punctum ductarum linearum: quia videlicet aliæ omnes, cùm ſint curuæ, non poſſunt comparari cum rectâ & dici illa longiores. Scio iſta omnia conſequentia Commentatoris eſſe falſa, vt in prolegomenis Elementorum tetragoniſmicorum annotatum habetur: ſed inde liquidò conſtat quantum omnes tribuant illi principio *ſuperpoſitionis*. Cùm Ariſtoteles eo loci videatur nonnihil fauere iſtis hallucinationibus, aſſentior iis qui vt Conimbricenſes referunt *non ſine cauſa exiſtimant extremam ei libro ſeptimo manum haud vnquam adhibuiſſe Ariſtotelem.*

Atque hoc plane ſenſu Archimedes vt ſuprà indicatum eſt, initio libri primi æquiponderantium ſumpſit τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων σχημάτων ἐπιπέδων ἐφαρμοζομένων ἐπάλληλα, καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐφαρμόζει ἐπάλληλα. *Si æquales & ſimiles figuræ planæ ſibi inuicem aptatæ congruant; centra quoque grauitatis ſibi inuicem congruunt.* Nam ſi cui non ſit aliunde euidens quàm ex oculis duo ſibi congruere, velitque inde colligere centra grauitatis ſibi quoque congruere, rem facit in demonſtrando abſurdam; quia non eſt intellectu euidens duo illa ſibi mutuò congruere, quamuis oculus nihil repugnet quo minus inuicem aptentur καθ' ἐφάρμοσιν, vt cum Proclo locuti ſumus in parte octaua prolegomenon pag. 67. quo loco quia nondum videramus Caualerij exercitationes, in animum noſtrum non venit de hoc axiomate vllam poſſe eſſe inter bonos Mathematicos diſcordiam, iamque è memoriâ exciderat noſtrâ, Peletarij tam abſona de hoc pronuntiato ſententia.

Simili cauillo poſſit aliquis contendere libræ vſum eſſe aliquid mecha-

nicum & à Geometra alienum; sed istud satis refutatum, & explicatum est in prolegomenis capite quarto & septimo pag. 24.& 61. ergo &c.quod erat propositum.

SCHOLIVM.

Ad solutionem sexti dubij propositi in propositione duodecima nonnulla præmitti oportet. In iis ergo demonstrandis locum asymptoticum appello eum qui curua & eius asymptoto terminatur, *sicuti illum definit & explicat pro sectione conica Apollonius in secundi conicorum propositione tertia; ego verò hic non tantum contemplor sectionem conicam nempe hyperbolam, sed alias etiam lineas asymptoto recta præditas. Asymptotus autem non est qualibet recta non conueniens cum curuâ illâ cuius dicitur asymptotus, sed est ea recta quæ nusquam conuenit, licet ad illam quocunque minimo dato interuallo propius accedat dum ambæ continuantur in infinitum. In memoriam quoque hic reuocari debet quod, vt suprà vberius explanatum fuit, Archimedes vsurpat in sexta propositione quadraturæ parabolæ, & nos in septima secundi libri tetragonismicorum, magnitudinem aliquam posse suspendi ex brachij vnius libræ duobus simul punctis, posse quoque intelligi suspendi ex vno.* Perpendiculum quietis *voco* illud in quo magnitudo ex vno brachij puncto pendens quiescit.

PROPOSITIO XXVII.

ESto (*Fig.* 95.) hyperbola d e l f comprehensa asymptotis b a, a c angulum b a c constituentibus; ex centro a educta sit quælibet semidiameter a l, secans hyperbolam in l; per l ductæ sint rectæ l r, l i complentes parallelogrammu l r a i.

Ostendendum est locum terminatum rectis a i, i l, a b & curuâ l e d esse maiorem quacunque figura data.

Inter a & i sumatur quodcunque punctum h, & vt a i recta ad a h, ita intelligatur a h ad a g, & ipsa a g ad quartam,& ista quarta ad quintam & ita deinceps progressio continuari cogitetur; ergo si per h, g &c. agantur h e, g d &c. parallelæ asymptoto a b, spatia i l e h, h e d g &c. sunt æqualia inter se, vt in corollario secundo quinquagesimæ propositionis libri sexti ostendimus. Quoniam igitur figura data talis est vt alterius spatij cuiuslibet dati h e l i, finiti, & minoris detractione continuâ tandem exhauriatur; recta verò a h est in infinitum secabilis in ratione rectæ h i ad h g: ac proinde locus ille est maior quotcunque spatiis spatio h e l i æqualibus; patet locum illum esse maiorem quacuuque figura data. Eadem verò est ratio de altero loco comprehenso sub curua l m f, rectis l r, r a, & asymptoto a c producta in infinitum. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

IIsdem manentibus (*Fig.* 95.) ex l i productâ abscindatur i q ipsi æqualis, & compleatur parallelogrammum a i q p: libra grammica p r intelligatur suspendi ex a perpendiculo a c, brachio a p.

Ostendendum est loci comprehensi sub rectis r l, a r, & sub a c asymptoto, hyperboláque l m in infinitum productis, quadratricem esse parallelogrammum a r l i.

Ducatur quæcunque y f parallela asymptoto a c, occurrens hyperbolæ in f; a y f c erit per quartam quarti tetragonismicorum, rectangulum ibidem *condicti* nomine appellatum; ac proinde erit æquale rectangulo a r l: ergo habent latera reciproca, & vt a r vel a p brachium ad longitudinem a y, ita erit y f ad r l vel y z: ergo y z dimetiens quadratricis æquat rectam a i vel r l latus parallelogrammi a r l i, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Patet igitur ex septima secundi tetragonismicorum si libra p b suspendatur ex a perpendiculo a c, brachio p a, & puncto p aptetur spatium æquale parallelogrammo a i l r, vel a i q p, committi æquilibrium; & ex vna parte suspendi ex vnico puncto p spatium finitum, ex parte verò opposita spatium immensum, vt in superiore ostendimus, de libræ longitudine a r pendens suspensum pluribus punctis, & non vno solùm. Atque istud est primum quod in pagina sexta appendicis secundæ adiectæ libris tetragonismicorum, nudè olim asseruimus fieri posse.

COROLLARIVM II.

Loco alteri qui terminatur asymptoto b a, rectis l i, i a & hyperbolæ arcu l d in infinitum protenso æquiponderare axe a c, sustentaculo p q, spatium quocunque dato maius patet inde, quod vt iam ostendimus illi æquiponderans sit æquale spatio incluso parallelis b a, h c in infinitum productis ad rectæ a i partes b. Angulum autem p a c esse rectum, vel non rectum parum interest ad libræ rationem, vt aduertimus suprà in propositionis quartæ progressu.

PROPOSITIO XXIX.

IIsdem positis (*Fig.* 95.) intelligatur series graduum quorum primus ad positionem asymptoti a b sit spatium interceptū parallelis p q, a c in infinitum productis, secundus sit locus hyperbolicus terminatus rectis l r, r a, & asymptoto a c, hyperbolæque arcu l f in infinitum productis; tertij verò limbus sit l t: istos autem gradus sumimus prout explicati fuêre in corollario secundo octauæ tertij libri, & in nona sexti proximi.

Ostendendum

Oſtendendum eſt curuæ l t aſymptotum eſſe rectam a c, totúmque ſpatium terminatum rectis l a, a c & curua l t, eſſe æquale duplo parallelogrammi r l i a. Cuneatum verò ſolidum, cuius ſectio ſit triangulum rectangulum habens vnum latus c f dimetientem iſtius loci hyperbolici, alterum latus illi æquale, & perpendiculare ad planum b a c erectum ex puncto f; eſſe æquale cylindraceo altitudinis a p, baſeos æquantis rectangulum a i l r; illudque aptatum ſuſtentaculo p q, axe a c, æquiponderare cylindraceo altitudinis a p, baſeos, loci hyperbolici.

Primum ita oſtenditur; quoniam, per decimam quartam ſecundi conicorum, hyperbolæ e m limbus accedit propiùs ad aſymptotum a c, & peruenit ad interuallum minus quolibet dato; ergo cùm t c dimetiens tertij gradûs ſit minor quam c f dimetiens ſecundi; nam i l, vel c A vel i q, & c f, c t ſunt ex conſtructione proportionales, & i l vel c A eſt maius extremorum; ergo c t eſt minus, ideóque recta c t eſt minor quam c f: ergo cùm c f poſſit eſſe minor quocunque dato interuallo, poterit c t eſſe minor quocunque etiam dato interuallo. Et cùm inter c & f iaceat perpetua lege punctum t, patet curuam l t nunquam conuenire cum a c recta, & accedere ad illam propiùs quocunque interuallo dato, quod erat primum ex oſtendendis.

Præterea quoniam tertius gradus ex methodo octauæ propoſitionis libri tertij, & quadrageſimæ quinti, eſt duplus ſpatij quod axe a c, ſuſtentaculo p q, æquiponderat loco aſymptotico comprehenſo inter hyperbolam & rectas l r, r a, a c, qui ponitur ſecundus gradus; illi autem loco per ſuperiorem æquiponderat ſpatium æquale parallelogrammo a i l r; patet tertium gradum dimetientis t c integrè ſumptum eſſe æqualem duplo parallelogrammi a i l r, quod erat ſecundum ex demonſtrandis.

Rurſus quoniam ex earundem propoſitionum methodo cuneatum ſolidum, quod planum ſemiangulo recto inclinatum ad planum a b c, illudque ſecans in recta a c, aufert ex cylindraceo cuius altitudo æquet rectam a p, baſis ſit locus hyperbolicus integer f m l r a c, eſt æquale dimidio cylindracei altitudinis a p, baſeos æquantis dimidium tertij gradûs: patet iſtud cuneatum ſolidum eſſe æquale cylindraceo altitudinis a p, baſeos æquantis rectangulum a i l r, quod erat tertium ex propoſitis.

Denique ex earundem propoſitionum præſcripto liquet idem cuneatum aptatum ſuſtentaculo p q ad poſitionem rectæ a r æquiponderare cylindraceo recto (rectum enim ſemper intelligimus, niſi aliud moneamus) altitudinis a p, baſeos æquantis iam dictum locum, quod erat quartum & vltimum ex demonſtrandis.

COROLLARIVM I.

Quod ſcripſi in illa ſexta pagina appendicis ſecundæ poſſe dari cunea-

tum solidum quod insistat loco immenso, & quod sit æquale parallelepipedo noto, patet esse verum ex tertia præsentis propositionis parte.

COROLLARIVM II.

Ex demonstratis in tribus propositionibus postremis constat non rectè inferri omnes locos terminatos curuâ & eius asymptoto, apertos verò quà excurrunt in infinitum, esse maiores quocunque designato spatio finito Nam locus hyperbolæ l f est quidem maior quocunque dato spatio finito; at locus inter curuam l t & asymptotum a c est finito spatio æqualis. Igitur quod locus asymptoticus contineat spatium immensum, id non procedit ex natura generali loci; sed ex speciali. Illius hæc est natura vt habeat partem quocunque dato spatio maiorem, istius vt omnem partem habeat dato certo quodam spatio minorem.

PROPOSITIO XXX.

Iisdem manentibus (*Fig. 95.*) cuneato solido superioris propositionis alterum simile & æquale intelligatur ad partes o. constitutum super loco qui terminatur asymproto a o, & hyperbola coniugata intra angulum b a o. Recta a r bifariam secetur in y.

Ostendendum est cuneatum compositum ex duobus istis insistentibus sursum versus super plano b a c, & ex alteris duobus insistentibus deorsum versus super eodem plano ad partes oppositas, habere centrum grauitatis in puncto y.

Constructo quadrato a r D B, describi intelligatur parabola D π a cuius axis a B, vertex a, tangens a r, ac proinde ordinatim applicata D B. Ductæ a D diametro quadrati a r D B quæcunque f z, ad asymptotum a c parallela, occurrat in ϛ; limbo a π D in π; rectæ a r in y; rectæ l i in z; perimetro hyperbolæ l m in f. Quoniam vt p a brachiũ ad a y longitudinem, ita per vigesimam septimã est y f ad y z; vt autem p a brachium ad ay, ita per duodecimam tertij tetragonismicorum est y ϛ ad y π: ergo vt y f ad y z, ita y ϛ ad y π: igitur rectangulum sub extremis y f, y π est æquale rectangulo sub mediis y z, y ϛ: ergo, per vigesimam octauam quarti tetragonismicorum, dicylindraceo genito ex a π D r ceratoide parabolica, & ex loco hyperbolico c a r l m f ad positionem rectæ a c est condicta ratione æquale dicylindraceo genito ex triangulo rectilineo a D r & ex eodem loco.

Rursus quoniam dicylindraceum ex triangulo a D r, & ex loco hyperbolico genitum est cuneatum illud de quo agit præsens propositio; dicylindraceum verò genitum ex ceratoide parabolica a π D r & ex eodem loco est, vt ex methodo octauæ libri tertij liquet, æquale spatio quod æquiponderat cuneato illi, si libræ planæ axis ponatur a c, sustentaculum p q: ergo dicylindraceum genitum ex triangulo a D r & ex parallelogrammo

a r l i est æquale spatio quod cuneato illi æquiponderat. Igitur cum eiusmodi dicylindraceum genitum ex iam dictis triangulo, & parallelogrammo, sit æquale dimidio parallelepipedi altitudinis a p, baseos a r l i; æquiponderans cuneato illi erit dimidium parallelepipedi baseos a r l i, altitudinis a p: sed cuneatum ipsum est per superiorem æquale eidem parallelepipedo: ergo suspensum cuneatum se habet ad æquiponderans, vt p a brachium ad sui dimidium: ergo si a y sit dimidium totius a r, & si intelligatur cuneatum illud quadruplex, suspendatúrque ex y puncto, in puncto autem p collocetur duplum parallelepipedi illius, librâ p r suspensâ ex a committetur eiusmodi æquilibrium. Præterea quoniam omnes huius duplicis loci hyperbolici dimetientes parallelæ asymptoto a c bifariam secantur occursu rectæ a r; si a r fiat libræ planæ axis, patet vnum locum æquiponderare alteri; ergo si eadem recta a r maneat axis libræ planæ, magnitudo composita ex duplici cuneato posito ad rectæ a r partes o, æquiponderabit magnitudini pariter compositæ & collocatæ ad partes f. Quoniam igitur si axis ponatur f y π, magnitudinis illius partes committunt æquilibrium; & si axis ponatur a r, committunt pariter; necesse est iuxta methodum Archimedeæ libræ, punctum y esse centrum grauitatis illius magnitudinis; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Istud est quod sine demonstratione vlla affirmaui in illa sexta pagina appendicis secundæ, sub calcem elementorum tetragonismicorum; vnde liquet omnia necessaria ad istam demonstrationem cognita nobis iam ante multos annos fuisse. Non dubito quin illius appendicis Lector desiderarit demonstrationem tam inopinati theorematis, quam hîc tandem descripsi. Quod autem in extrema eiusdem appendicis pagina corollarium secundum vigesimæ octauæ libri quarti restrinxi, id nunc infectum volo; agnoscóque timorem tunc errandi meum fuisse vanum.

PROPOSITIO XXXI.

Datur aliqua magnitudo non omni ex parte finita, quæ habet centrum grauitatis; datur aliqua quæ non habet quidem centrum grauitatis, sed habet perpendiculum quietis; datur denique aliqua, quæ ne quietis quidem perpendiculo gaudet.

Istud patet ex paulò antè demonstratis in superiorib' propositionibus; primum enim liquet ex proximè superiore, vbi ostendimus magnitudinem compositam ex quatuor illis cuneatis habere (*Fig 95.*) centrum grauitatis y quamuis locus qui est cuneati basis, ne perpendiculum quidem quietis habeat, vt deinde ostendemus. Alterum verò conficitur apertè ex eadem propositione, si enim non sumatur nisi pars illius quæ ad rectæ a r partes c iacet, illa habebit perpendiculum quietis nempe rectam y f; at verò centrum grauitatis non habebit, cùm in infinitum excurrat ad

partes c ; ac proinde si ex aliquo puncto ducatur axis m n parallelus rectæ l i ; semper pars, quæ ad axis m n partes c iacet, alteri præponderet, vt pote procurrens in infinitum, & ex illo recessu ab axe acquirens vires præponderandi infinitas. Tertium denique ostenditur in loco plano asymptotico hyperbolæ l m, terminato hyperbolæ arcu l m, asymptoto a c, & rectis a r, r l. Si enim habet perpendiculum quietis, esto illud y z ; ergo cùm illa magnitudo ex y suspensa maneat vt iacet ; illi, per demonstrata ab Archimede in sexta quadraturæ parabolæ, æquiponderabit idem spatium, quod suspensæ ex duobus punctis a & r : atqui suspensæ ita æquiponderat per vigesimam septimam spatium æquale parallelogrammo a r l i ; ergo suspensæ ex y tantùm, æquiponderat parallelogrammum a r l i ex p pendens, librâ p a r suspensâ ex a perpendiculo a c. Ergo vt p a ad a y, hoc est, finita magnituditudo ad finitam, ita suspensus locus maior quocunque finito spatio plano, vt in vigesima septima ostendimus, se habet ad parallelogrammum r a i l : ergo non habet perpendiculum quietis ; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Cùm locus ille hyperbolicus non habeat perpendiculum quetis, patet magnitudinem illam vi suspensionis non quieturam, sed fore in perpetuo motu. Si ergo quiescat id non proueniet ex partium vtrinque pendentium æquali virtute ῥοπῆς, sed aliunde, quod Philosophis relinquo discutiendum.

COROLLARIVM II.

Patet præterea centrum grauitatis non esse necessarium ad inueniendam cuneati solidi cuiuscunque dimensionem ; nam ex spatio æquiponderante reperitur per vigesimam secundam quarti tetragonismicorum, illud autem spatium potest haberi etiamsi magnitudo nec centrum grauitatis, nec perpendiculum quietis habeat, vt ex demonstratis patet. Quapropter præcipuus vsus libræ staret, etiamsi non daretur centrum grauitatis : neque enim vereor præcipiuum illum vocare vnde generalis modus existit quadrandi cunei vel vngulæ illius de qua in superioris libri propositione nona satis egimus. Pari ratione dicendum est quadratarium spatium, siue quadratricem ipsissimâ Archimedis methodo demonstratam in septima secundi tetragonismicorum non pendere ex centro grauitatis ; cùm in istis, vbi nec datur centrum grauitatis nec quietis perpendiculum, locum suum retineat. Ista verò figura quadratrix poterit interpolatoria arte ita in speciem immutari, vt nouum aliquid appareat, nulláque etiam libræ mentio interueniat. Sed qui hac arte vtatur, is non Geometra, sed literarius præstigiator mihi sit, qui alienis inuentis pro suis glorietur, atque vt reliqui fures earum rerum quas ceperunt, signa adhibitis etiam aliquoties incantamentis commutant, sic iste nomina tan-

quam rerum notas vanæ gloriolæ mancipium mutet. Quo vitio Stoicos laborasse Piso conqueritur alicubi in Ciceronis Operibus.

COROLLARIVM III.

Quoniam præ oculis habemus hyperbolam l f cum asymptotis suis a b, a c; libet hîc vnum indicare quod semper mihi admirationi fuit in Sciotherica, & cuius causam penitus nosse nunquam potui, vt in cæteris plurimis quæ ex infinita magnitudine consequuntur. Atque vt exemplum omnium facillimum assumam pono planum b a c esse horizontem regionis sub æquatore constitutæ, hoc est (ne in tam longinquas oras abire cogamur huius experimenti capiendi vel intelligendi gratiâ) pono planum b a c incedere per axem mundi, & per sectionem horizontis nostri cum æquatore; super illo autem stare erectum perpendiculariter stylum D a. Igitur planum b a c erit plano sextæ horæ astronomicæ parallelum, quod intelligimus ductum per D verticem styli, hoc est per centrum mundanæ sphæræ, vbi ille vertex constitutus intelligitur ab Artificibus. Pono solem percurrere parallelum aliquem extra æquatorem, & describere extremâ styli vmbrâ perimetrum hyperbolicam d e l, talem enim describet vt ex duodecima primi conicorum liquet. Pono denique vmbram styli porrigi ad quamcunque longitudinem, quasi sol esset virtutis infinitæ, nec tamen esset maior ipso vertice, & lux secundaria siue reflexa non consumeret ipsam vmbram. His positis dubij enucleatè proponendi causa. Patet ex nuda contemplatione schematis, horæ sextæ matutino & serotino momento vmbram styli necessario congruere asymptotis a c, a b; si a c ponatur occidentem versus, & a b ad orientem spectare. Reliquo duodecim horarum tempore toto vmbræ extrema pars est in perimetro hyperbolæ, vt patet. Quæro qua ratione cùm inter asymptotum a c & hyperbolam iaceat interuallum, & verum spatium quod Apollonius vocauit locum, quo pacto vmbra ad perimetrum pertransierit, videtur enim saltasse; fac enim instanti A vmbram esse in recta a c infinitam; instanti proximè consequenti fit finita, & eius extremum congruit alicui puncto perimetri hyperbolicæ: ergo spatium quod est inter asymptotum & hyperbolam pertransitum fuerit in instanti. Similis prorsus est ratio difficultatis, dum vmbra deserit perimetrum hyperbolæ, & horæ sextæ momento quasi saltando reperitur in recta a b, & cùm antea semper mansisset finita, in instanti fit infinita. Noui multa posse responderi; non dari duo temporis momenta sibi instantia & sese ἀμέσως consequentia, sed neque fortasse dari vlla; istam hypothesim non esse possibilem &c. Sed noui etiam istis responsionibus non tolli admirabilitatem rei, nec penitus obtundi difficultatem qua mens finitis rebus assueta pungi se sentit.

COROLLARIVM IV.

Lubet adhuc immorari in Sciothericis, vt annotem tria alia admiratio-

ne digna. Primum est in nostro horizonte Tolosano, & in quouis alio vbi eleuatio poli minor est complemento declinationis paralleli quem tunc sol percurrit, vmbræ extremo describi hyperbolam quolibet die, siue arcus diurnus sit plurium, siue pauciorum horarum quàm sex; ac proinde cùm iter solis, vel arcus diurnus non sit idem sed modò maior, modo minor; vmbræ tamen extremum semper hyperbolæ integræ semitam peragere. Alterum in vno & eodem Sciotherico Tolosani horizontis & aliorum suprà designatorum (dummodo in illis complementum declinationis solaris & eleuatio poli componant simul angulum maiorem recto) styli vmbram in ortu & occasu solis non cadere in asymptotum hyperbolæ quam eo die decursura est sed in parallelam asymptoto. Eiusmodi autem parallelà secari illam ipsam hyperbolam extrema vmbra describendam, quoties sol est in boreo parallelo; non secari autem quoties fuerit in australi; ex illa porrò sectione fieri vt solis vmbra bis ab orientis ad occidentis momentum cadat in eandem parallelam; vnde consequens est sedem styli esse intra istam æstiuæ siue borealis vmbræ hyperbolam, & extra oppositam hyemalis. In quo illud admirationem apud me magnam habet, quod cùm istæ duæ hyperbolæ sint similes & æquales, percurrantúrque integræ ab vmbra, plus tamen temporis impendatur in obeunda æstiua, quàm hyemali; vtrobique enim impenditur tempus quo sol in arcu diurno moratur, illi autem arcus sunt inæquales, ac proinde & ipsa quoque tempora. Tertium denique est solis vmbram in ortu solis obeuntis Æquatorem esse parallelam rectæ lineæ quam eo die describit acumine vmbræ; transit ergo vmbra post momentum orientis syderis in parallelam illi in qua primùm iacuit, nec in illo transitu vertex vmbræ reperitur vspiam in medio illo spatio. Quando autem sol est in signis australibus; inter parallelam asymptoto in quam projicitur vmbra ipsius exorientis, & inter tramitem hyperbolicum designandum ab ipsa, interiacet interuallum maius illo quod est inter parallelam & asymptotum. Vnde in istis duobus casibus non habet locum quod Philosophus geometriæ ignarus dixerit, in casu superioris corollarij solis vmbram quasi saltu pertransire interuallum quo asymptotus & hyperbola discernuntur, quia illud est minus quolibet dato; ac proinde quia perinde est quod ad istum quasi saltum attinet, atque si asymptotus & hyperbola conuenirent. Nihil dico de velocitate, vt ita dicam, qua decurritur pars hyperbolæ quæ iacet ad partes interminatas, illa enim capi vix potest, cum limes hyperbolicus qui percurri debet sit longitudinis quacunque datâ maioris; hoc verò locum quoque habet in æquinoctialis vmbræ recto tramite; quæ omnia cum aliquando meditarer, admirationem meam hoc hendecasyllabo expressi versiculo quem & Sciotherico adscripsi horario,

Vmbris fallimur, & docemur Vmbris.

COROLLARIVM V.

Prætermittere non possum causam cur in horizonte nostro Tolosano

& in aliis quorum altitudo poli maior est declinatione solis in parallelo eo die obeundo constituti, non possit vmbra solis reperiri bis in eodem verticali ante meridiem, & bis in alio post meridiem, vnde eueniret ille regressus vmbræ admirandus quem primus annotauit & demonstrauit Petrus Nonius acerrimi ingenij Geometra. Vt autem causa dilucidè explanetur, primò statuo id euenire quoties ab imo calce styli duci potest recta quæ tangat hyperbolam quam eo die apex vmbræ describere debet; ex illo enim tactu fit vt quæcunque recta ducatur inter lineam meridianam cui insistit stylus & inter lineam tactûs, secet semitam vmbræ delineandæ in duobus punctis: ergo ante meridiem (eadem est ratio de postmeridiano tempore) vmbræ apex erit in duobus illis punctis, & linea vmbræ erit bis in eadem recta nempe antequàm veniat ad lineam tactûs, ad quam cum peruenerit, redibit, iter relegendo, ad eandem rectam secantem, sed modò vt patet erit longior nempe cum primùm secanti congruet matutina hora, modo breuior cum secundò ad illam redierit, & cùm prouectior euaserit dies ante meridianam horam. Quoniam igitur in nostro horizonte sedes styli est intra hyperbolam quam sol lustrans borealia signa eo die projicit per verticem styli; ex illa sede non poterit duci recta tangens ipsam hyperbolam æstiualis vmbræ (ita enim vocetur quæ respondet signis borealibus) sed neque etiam quæ tangat oppositam hyemalis vmbræ, cùm ex trigesima prima primi conicorum doceamur tangentem rectam cadere inter centrum sectionum oppositarum & verticem eius hyperbolæ quam tangit; vnde etiam liquet in sphæra recta (qui est casus corollarij tertij) non esse possibiles rectas ex ima styli basi eductas quæ hyperbolam tangant; cùm stylus ibi erigatur ex centro ipsius hyperbolæ. Contrà verò quoniam quando altitudo poli minor est declinatione solis in parallelo huius hyperbolæ genitore collocati, sedes styli iacet extra vtrámque hyperbolam, patet ex illa sede posse duci rectam quæ tangat hyperbolam sedi viciniorem. Porrò istud experiri potest etiam in parietibus ædificiorum, quisquis accuratè inuestigarit vnum aliquem super quo poli alterútrius eleuatio sit minor declinatione solis maximâ. In pariete illo, vt res pariat maiorem admirationem, nullas alias rectas describet præter tangentem, quæ vocabitur terminus regressûs, & horam qua vmbra ad illum pertinget, simúlque diem anni; ponimus autem stylum in his omnibus esse perpendicularem ad planum, nullámque esse virgam ferream quæ axem mundi repræsentet. Attamen vt tutò & facilè rem expediat, sum illi autor vt hyperbolam isti diei conuenientem occultè describat, tum vt filum basi styli figat, illúdque tensum eo vsque circumferat, donec hyperbolam sensûs iudicio appareat tangegere: ita enim habebit punctum tactûs, ac consequenter terminum regressûs, momentúmque quo vmbra ad illum perueniet. Postea verò cretâ obducatur hyperbola, vt sola linea regressûs depicta conspiciatur. Non est dubium quin istud etiam à sapiente spectatore iudicetur mirabi-

le. Per numeros res ex se certiùs tractaretur, sed ij in istis hypothesibus vix carebunt vitio aliquo; semper certè relinquent artificem anxium, an expectationi noui huius spectaculi excitatæ responsurus sit suo tempore successus. Cæterùm iste regressus vmbræ non accidit nisi in plano in quo hyperbolam delineaturus est vertex vmbræ; nam si circulum, aut ellipsim aut etiam parabolam descripturus sit, eiusmodi reditus vmbræ accidere non potest: quapropter non abs re fuerit, ibi istud tractasse, vbi hyperbolæ proprietates quædam mirabiles ex instituto referendæ nobis erant. Quod si stylus non ponatur rectus sed inclinatus ad libitum; quolibet die, & vbicunque gentium poterit iste regressus spectari, nempe si postquam vmbræ illius diei conueniens sectio conica in Sciotherico descripta fuerit, ad illam ducatur tangens quælibet, & collocetur stylus in puncto vbi dicta tangens secabit lineam meridianam, is verò inclinandus ita erit, vt vertex illius congruat vertici styli qui perpendiculariter ad Sciothericum erigeretur, sed subducitur vt artificium magis inde commendetur.

PROPOSITIO XXXII.

SOluitur quintum dubium ex centro grauitatis petitum; & sextum, ex eo quod spatium finitum æquiponderet immenso.

I. Dari centrum grauitatis reponitur iure merito inter postulata, quis enim hoc demonstret, aut quis illud quamuis indemonstratum concedere postulanti recuset? Primò enim, si ratione physica agatur, videtur rationi consonum vt quodlibet graue in libræ curuæ hypothesi ex puncto A veluti vnco liberè pendens, quietis situm sibi reperiat aliquem, quacunque sui parte illi admoueatur: atqui, si hoc est, datur centrum grauitatis; nam vbi duo eiusmodi perpendicula siue rectæ ad centrum vergentes se intersecant, ostendetur eò necessariò confluere tertium perpendiculum ex quacunque alia parte suspensum admoueatur vnco A; alioqui perpendiculorum priorum vnum non diuisisset magnitudinem suspensam in duas partes hinc & inde æquiponderantes. Quæ verò demonstrauimus in propositione vigesima prima nihil obstant iam dictis, sed potius ea confirmant, cùm ibi ostenderimus magnitudinem illam compositam, quamdiu conseruat eandem à centro mundi distantiam habere centrum grauitatis per quod omnia illius interualli perpendicula transeunt, hic verò ponimus ab eodem vnco A eandem magnitudinem pendere per diuersas suspensiones, pari à centro distantiâ. Istud quod ratio suadet confirmat experientia constans, etiam in perpendiculo pendulo, de cuius oscillationibus aliquid diximus in propositione 59. lib 6. In hypothesi verò libræ Archimedeæ ratio idem suadet: experientia verò neque fauet, neque contradicit; cùm illa hypothesis sit solius rationis, nec grauibus de facto quadret.

II. Inductione præterea mathematica fit probabilissimum dari centrum

trum grauitatis. Primò enim Archimedes ex illius hypothesi quadrauit parabolam; deinde eandem quadrauit seclusæ libræ principiis; nec vlla fuit discrepantia duorum istorum tetragonismorum: ergo vterque veritate nititur. Eandem porro parabolam posteriores Scriptores præcipuè Torricellius & Gregorius à S. Vincentio variis aliis modis absque libra quadrarunt, eámque commutarunt in idem spatium iam per libram ab Archimede inuentum; quæ omnia confirmant libræ principia habere suam sedem in veritatis penetralibus. Denique nulla est rectilinea figura cuius centrum grauitatis non inueniatur per primum librum æquiponderantium Archimedis, & cuius quadratrix siue spatium æquiponderans non fiat cognitum per duodecimam tertij tetragonismicorum, adhibita decima secundi libri eorundem elementorum; semper autem reperitur sicut est suspensum rectilineum ad æquiponderans notum, ita esse brachium libræ ad interuallum quod est à puncto vnde libra suspenditur ad perpendiculum quietis quo rectilineum pendet ex libræ eiusdem vnico puncto, idque in quocunque situ ponatur suspendi; ergo cùm in rectilineis, & etiam in curuilineis parabolicis suspensis in quocunque situ, reperiatur illa proportio esse verissima, quæ in centro grauitatis fundatur, quoties ad omnem positionem magnitudo suspendi pari pacto potest, non est cur in curuilienis aliis non debeat admitti, semoto prorsus omni errandi timore.

III. Cùm Archimedes non esset acturus nisi de figuris & magnitudinibus vndique terminatis, non est mirum quòd non postularit dari centrum grauitatis nisi in figuris: præterquam quod in aliis quibusdam non vndecunque terminatis dari centrum grauitatis, res est adeo à primis hominum cogitationibus remota, vt demonstrari potius debeat, quàm postulari; nam si hyperbolam & asymptotum ad se propius semper accedere, & nusquam conuenire, Proclus alicubi vocat παραδοξότατον, quantò magis istud vt communi hominum opinioni repugnans suspiceret.

IV. Quòd autem pondus finitum æquiponderet immenso pendenti de vno libræ puncto, id concedimus aduersari rectæ rationi; non autem si pendeat de duobus; nam quando ita pendet, non licet inferre dari vllam proportionem inter finitam magnitudinem & infinitam. Quapropter cùm nihil contra eiusmodi assertionem adducatur quod falsitatis eam conuincat, & cùm aliunde euidenter sequatur ex principiis libræ fundatissimis, non est cur ea propterea respuamus, quod ex illis necessariò consequatur aliquid præter opinionem hominum vulgarem: ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO XXXIII.

Soluitur vltimum dubium desumptum à difficultate intelligendi demonstrationes ex principiis libræ deriuatas.

I. Principio statuendum est, quorundam hoc esse vitium, vt non ha-

le. Per numeros res ex se certiùs tractaretur, sed ij in istis hypothesibus vix carebunt vitio aliquo; semper certè relinquent artificem anxium, an expectationi noui huius spectaculi excitatæ responsurus sit suo tempore successus. Cæterùm iste regressus vmbræ non accidit nisi in plano in quo hyperbolam delineaturus est vertex vmbræ; nam si circulum, aut ellipsim aut etiam parabolam descripturus sit, eiusmodi reditus vmbræ accidere non potest: quapropter non abs re fuerit, ibi istud tractasse, vbi hyperbolæ proprietates quædam mirabiles ex instituto referendæ nobis erant. Quod si stylus non ponatur rectus sed inclinatus ad libitum; quolibet die, & vbicunque gentium poterit iste regressus spectari, nempe si postquam vmbræ illius diei conueniens sectio conica in Sciotherico descripta fuerit, ad illam ducatur tangens quælibet, & collocetur stylus in puncto vbi dicta tangens secabit lineam meridianam, is verò inclinandus ita erit, vt vertex illius congruat vertici styli qui perpendiculariter ad Sciothericum erigeretur, sed subducitur vt artificium magis inde commendetur.

PROPOSITIO XXXII.

Soluitur quintum dubium ex centro grauitatis petitum; & sextum, ex eo quod spatium finitum æquiponderet immenso.

I. Dari centrum grauitatis reponitur iure merito inter postulata, quis enim hoc demonstret, aut quis illud quamuis indemonstratum concedere postulanti recuset? Primò enim, si ratione physica agatur, videtur rationi consonum vt quodlibet graue in libræ curuæ hypothesi ex puncto A veluti vnco liberè pendens, quietis situm sibi reperiat aliquem, quacunque sui parte illi admoueatur: atqui, si hoc est, datur centrum grauitatis; nam vbi duo eiusmodi perpendicula siue rectæ ad centrum vergentes se intersecant, ostendetur eò necessariò confluere tertium perpendiculum ex quacunque alia parte suspensum admoueatur vnco A; alioqui perpendiculorum priorum vnum non diuisisset magnitudinem suspensam in duas partes hinc & inde æquiponderantes. Quæ verò demonstrauimus in propositione vigesima prima nihil obstant iam dictis, sed potius ea confirmant, cùm ibi ostenderimus magnitudinem illam compositam, quamdiu conseruat eandem à centro mundi distantiam habere centrum grauitatis per quod omnia illius interualli perpendicula transeunt, hic verò ponimus ab eodem vnco A eandem magnitudinem pendere per diuersas suspensiones, pari à centro distantiâ. Istud quod ratio suadet confirmat experientia constans, etiam in perpendiculo pendulo, de cuius oscillationibus aliquid diximus in propositione 59. lib 6. In hypothesi verò libræ Archimedeæ ratio idem suadet: experientia verò neque fauet, neque contradicit; cùm illa hypothesis sit solius rationis, nec grauibus de facto quadret.

II. Inductione prætereа mathematica fit probabilissimum dari centrum

trum grauitatis. Primò enim Archimedes ex illius hypothesi quadrauit parabolam; deinde eandem quadrauit seclusæ libræ principiis; nec vlla fuit discrepantia duorum istorum tetragonismorum: ergo vterque veritate nititur. Eandem porro parabolam posteriores Scriptores præcipuè Torricellius & Gregorius à S. Vincentio variis aliis modis absque libra quadrarunt, eámque commutarunt in idem spatium iam per libram ab Archimede inuentum; quæ omnia confirmant libræ principia habere suam sedem in veritatis penetralibus. Denique nulla est rectilinea figura cuius centrum grauitatis non inueniatur per primum librum æquiponderantium Archimedis, & cuius quadratrix siue spatium æquiponderans non fiat cognitum per duodecimam tertij tetragonismicorum, adhibita decima secundi libri eorundem elementorum; semper autem reperitur sicut est suspensum rectilineum ad æquiponderans notum, ita esse brachium libræ ad interuallum quod est à puncto vnde libra suspenditur ad perpendiculum quietis quo rectilineum pendet ex libræ eiusdem vnico puncto, idque in quocunque situ ponatur suspendi; ergo cùm in rectilineis, & etiam in curuilineis parabolicis suspensis in quocunque situ, reperiatur illa proportio esse verissima, quæ in centro grauitatis fundatur, quoties ad omnem positionem magnitudo suspendi pari pacto potest, non est cur in curuilienis aliis non debeat admitti, semoto prorsus omni errandi timore.

III. Cùm Archimedes non esset acturus nisi de figuris & magnitudinibus vndique terminatis, non est mirum quòd non postularit dari centrum grauitatis nisi in figuris: præterquam quod in aliis quibusdam non vndecunque terminatis dari centrum grauitatis, res est adeo à primis hominum cogitationibus remota, vt demonstrari potius debeat, quàm postulari; nam si hyperbolam & asymptotum ad se propius semper accedere, & nusquam conuenire, Proclus alicubi vocat παραδοξότατον, quantò magis istud vt communi hominum opinioni repugnans suspiceret.

IV. Quòd autem pondus finitum æquiponderet immenso pendenti de vno libræ puncto, id concedimus aduersari rectæ rationi; non autem si pendeat de duobus; nam quando ita pendet, non licet inferre dari vllam proportionem inter finitam magnitudinem & infinitam. Quapropter cùm nihil contra eiusmodi assertionem adducatur quod falsitatis eam conuincat, & cùm aliunde euidenter sequatur ex principiis libræ fundatissimis, non est cur ea propterea respuamus, quod ex illis necessariò consequatur aliquid præter opinionem hominum vulgarem: ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO XXXIII.

Soluitur vltimum dubium desumptum à difficultate intelligendi demonstrationes ex principiis libræ deriuatas.

I. Principio statuendum est, quorundam hoc esse vitium, vt non ha-

beant bene cognitas eas res quas docere volunt, cúmque eas non satis firmè conceptas animo atque comprehensas teneant, non posse non obscurè de iis loqui; quis enim in aliorum mentibus id rectè imprimat, quod in sua peruersè expressum habet? & quis à fonte turbido riuos crystallinos deriuet? Hunc itaque ingenij defectum vllatenus excusare iis quæ mox dicturi sumus, minimè intendimus; fatemur enim culpâ eius qui loquitur sæpiùs fieri vt non intelligatur; concedendum tamen putamus, nullam aliquando esse eius culpam, qui non intelligitur. *Istud*, inquit Tullius, *duobus modis sine reprehensione fit: si aut id de industria facias, vt Heraclitus, cognomento qui σκοτεινὸς perhibetur, quia de natura nimis obscurè memorauit: aut cum rerum obscuritas, non verborum facit, vt non intelligatur oratio: qualis est in Timæo Platonis. Epicurus autem, vt opinor, nec non vult, si possit, planè & apertè loqui: nec de re obscura, vt Physici, aut artificiosa, vt Mathematici; sed de illustri & facili, etiam in vulgus perulgata, loquitur.* Hæc ille, cui assentior, si qui dedita opera obscurè loqui consectatur, iustam id faciendi causam habeat; alioqui enim, abutitur auditoris otio, & contra humanæ locutionis leges peccat, reprehensionémque meretur. Iure autem optimo artificiosa Mathematicorum collocat inter ea quæ sæpe non intelligantur absque vllo loquentis vitio.

II. Præterea negare nemo potest quin etiam iis qui præcognitorum apparatum habeant necessarium, quíque summa animi contentione demonstrantis mentem assequi moliantur, intellectu difficillima sint Archimedis, Apollonij, Euclidis & aliorum Antiquiorum plurima theoremata, præcipuè verò quæ Archimedes de æquiponderantibus scripsit, cuius causa nunc inquirenda nobis est. Primò quidem certò statuendum est eos animo clarè comprehendisse ea, quæ posteris tradiderunt; deinde nec minùs certò constare debet eos non caruisse copia verborum quibus cogitata sua promerent; videas enim quosdam qui gallicè, verbi gratiâ, planè explicent mentem suam, at verò si latinè eadem de re sermonem habeant, tenebris sua ipsi sensa tam densis obuoluant, vt discerni penitus non valeant. Tertiò neque existimandum est eos dedita opera obscuritatem dictorum affectasse; cur enim se summa illa voluptate priuasse credantur, quam quisque experitur dum sua inuenta & facile intelligi & probari experitur? Quartò igitur id referri debet in eam rerum, quas tractant, naturam reconditam, procúlque à prima & communi mentis humanæ luce positam. Quoties in theorematis constructione adhibentur solida, eórumque sectiones variæ; noua adest causa difficultatis, eo quod trinæ illorum dimensiones nunquam perspicuè repræsententur in plano. Sæpe tamen figuræ descriptio est plana nihilque intricata, & tamen demonstratio perspicuè non apparet. Mihi certè quintus Euclidis liber semper difficilis captu visus est, cùm diagrammata sint facilia; ita quoque decimus difficultate summa comprehensus mihi fuit, cuius tamen figurarum descriptiones negotium non facessunt. In Hypsiclis deinde & Fluſ-

ſatis libris intelligendis ſemper laboraui plurimùm, ſed ibi ad difficultatis communis magnitudinem fit acceſſio ex vario planorum & linearum in ſolidis corporibus ductu. Specialem verò difficultatem paſſus fere ſemper fui, quoties demonſtratio proceſſit per reductionem ad impoſſibile; tales occurrunt mihi nunc nobiliſſimæ duodecimi Elementorum ſecunda, decima, duodecima; tales quoque ſunt illæ in quibus Archimedes probat proportionem cylindri ad ſphæram, coni ad cylindrum, ſpiralis ad circulum &c. & vt à libra exemplum petamus talis eſt decima ſexta quadraturæ parabolæ, vnde fluxit ſeptima noſtra libri ſecundi tetragon ſmicorum.

III. Diſſimulandum non eſt Antiquos illos multa in demonſtrandis ſuis inuentis reticére, indéque nonnullam oriri difficultatem percipiendi ſtatim, quæ dicuntur, præſertim inexercitatis. Hunc ſcribendi modum in Eudemo Simplicius agnoſcit in primum Phyſicorum fol. 13 pag. 2. & refert ad ἀρχαϊκὸν ἔθος *ad Antiquorum morem.* Quiſque verò illum experitur eorum lectione, & manifeſtè patet in Archimede ex ſupplementis Commandini, aliorumque. Exiſtimo tamen remotæ illius ætatis Scriptores ita calluiſſe has diſciplinas, vt quæ inter ſcribendum omitterent, ea ſuppleri à Lectore facilè poſſe exiſtimarent: ſicuti nunc ſi quis dicat æquales eſſe angulos alternos qui fiunt à recta incidente in duas parallelas, quamuis Elementa Euclidis non adducat ad confirmationem ſuæ aſſertionis, ab omnibus Geometris intelligitur, nec ab vllo deſideratur illa Euclidis commemoratio. Quapropter ſi iam nobis non ſint in procinctu ea quæ ætate Archimedis obuia erant Geometris, non eſt vituperandus mos ille ſcribendi, vt pote eruditioni ſæculi illius accommodatiſſimus, ſed potiùs dolendum eſt noſtrum illi in hoc cedere. Fortaſſe etiam illud rerum compendium affectarint, vt vitarent illam minima quæque perſequentem μικρολογίαν demonſtrationum mathematicarum, cuius tædio nonnullos ab iis auerti teſtatur Ariſtoteles in extremo Metaphyſicorum libro ſecundo. Non abs re fortaſſe erit annotare, verſionem, qua vſus eſt S. Thomas, retinuiſſe vocem *micrologiam*; Interpretem quoque Auerrois Arabicam vocem illi græcæ reſpondentem, videri retinuiſſe, dum *ſcatinizare* ſcripſit; nam quod græcæ μικρὸν, id Hebraicâ linguâ (à qua deriuata eſt Arabica) קטן dicitur; vnde ſicut ab illa deducitur μικρολογίζεσθαι, ita ab iſta *catinizare* vel *ſcatinizare* inflexione latinâ deriuari potuerit. Cæterùm illa vox de mente Ariſtotelis ſonat eo loci vitium illud quo minima quæque nonnulli conſectantur. Sicuti enim (inquit Philoſophus) in contractibus celebrandis ſi minima quæque ſordidè caues, odium contrahentis tecum incurris ex illiberali tuo facto; ita in demonſtrandis rebus, ſi minima percenſere velis, eorúmque cauſam longiùs excurrendo reddere, tædio eris auditori; cùm plurima ſint quæ ſatis ſubaudiuntur, & quæ ſine audientis faſtidio expreſsè ingeri non poſſunt. Hinc patet difficile dictu eſſe cur Beſſarion Cardinalis illam Ariſtotelis vocem reddiderit eo loci

curiositatem; sensus enim ille non conuenit assertis Aristotelicis: sed neque satis video, an textûs Arabici Interpres latinus planè intellexerit vitium quod ibi Philosophus ea voce designat, dum id esse ait *proteruire in contractibus*. Porrò voce illa græca notari aliquoties auaritiæ recularum omnium satagentis sordes accuratissimus & doctissimus Menagius in *origine vocum Francicarum* animaduertit: aliorum verò sit iudicium an eidem voci supponatur vitium illud litigantium cauillatorum, quod nos *chicanerie* dicimus; quam quidem dictionem nostram à voce hispana *chico* Menagius ille deduci vult; fortasse an veriùs ab istâ ipsâ Arabicâ, quasi dictum initio fuerit *chitania*, postea *chicania*. Vnde & vox ipsa hispana *chico* ortum forsitan duxerit.

IV. Tullius dum loco iam laudato libri secundi de finibus, geometriæ *artificiosa* ex se obscura esse affirmat, eiusmodi voci non subjicit tantum instrumenta machinalia; ita enim angustè nimis loqueretur, sed hac voce explicata haberi vult ea omnia Geometrarum inuenta, quorum demonstrationi *κατασκευὴν constructionem* præmittunt: demonstraturi enim aliquid construunt ex arte diagramma idoneum comprehendendæ veritati propositæ. Artificiosum itaque opponitur Physico, quod effectrice natura prodit in lucem; at diagramma istud geometrica arte efficitur. Huc spectat, vt opinior, quod Proclus in Euclidem docet dimensionem cylindri & coni spectare ad geometriam, quia cylindrus & conus sunt per mentem: ad Geodesiam verò pertinere vt metiatur *σωροὺς ὡς κώνους, καὶ φρέατα ὡς κυλίνδρους, οὐδὲ δι' εὐθειῶν νοητῶν, ἀλλ' αἰσθητῶν, οἷον διὰ σπάρτων, καὶ διὰ σταθμῶν*: *cumulos acuminatosque aggeres veluti conos, & puteos tanquam cylindros: neque per rectas mentis opus, sed per subiecta sensibus, veluti per amußim & perpendiculum.* Quod autem grauis Autor geometriã & Mathematicas disciplinas addisci docet faciliùs quàm physicam, id ita intelligo, vt velit facilius esse comparare sibi notitiam eorum omnium quæ in Mathematicis demonstrata sunt, quàm scientiam eorum quæ ad vniuersam physicam spectant: nam ad istam scientiam acquirendam oporteret innumera inueniri & demonstrari quæ vel inuenta non sunt, vel nondum demonstrata. At si comparentur ea quæ necdum reperta sunt in Mathematicis, cùm iis quæ nondum comperta habentur in Physicis, quis statuat quænam profundiùs lateant, quamdiu nescitur vbi vnumquodque eorum defossum lateat?

V. Ex hactenus dictis liquidò constat difficultatem & obscuritatem inuentorum Mathematicorum potiùs verti debere eorum laudi quàm vituperio; & siquidem sublimia ea sint, vti re ipsa sunt, inde veriùs accendi quam extingui studium illa cognoscendi: quodsi quis natiuam, vt ita dixerim, rerum ipsarum difficultatem obscuret cogitationum suarum vel sermonis tenebris, id non esse Geometriæ, sed Scriptoris vitium. Si quis demum qui ne pictum quidem vllum (vt dici solet) antea vnquam Geometram viderit, conqueratur à se non intelligi demonstrationes illas; istâ querimoniâ non ostendi aliud contra Scriptorem illarum, quàm in-

fœlicem eum esse, quod nactus sit Lectorem nimis ineruditum. Cæterùm vnum, quod omisi dicere, præterire non possum; Archimedem, licet in demonstrationis processu non statim planè intelligatur vbique, dum tamen ipsum theorema proponit, id facere mira perspicuitate; verbi gratia *parabolæ segmentum esse trientem trianguli cuius est quadratrix: cylindrum esse sesquialterum sphæræ in ipso inclusæ; superficiem sphæræ esse quadruplam circuli maximi in ea descripti* &c. Modus autem adeo clarus proponendi theoremata, satis indicat tenebras quas deinde experimur dum ducimur ad penetrale vbi illud latebat, pertinere ad longum & cœcum iter quod peragendum est vt eò veniatur.

VI. Reuocemus iam illud Aristotelicum, *puerum posse quidem fieri Mathematicum, non tamen Sapientem aut Physicum*, & monstremus male inferri mathematicos disciplinas esse faciles captu. Aristoteles enim ibi non inquirit an faciles difficilésve sint; sed tantùm cur pueri addiscere illas possint, & nequeant Sapientiam aut Physicam; respondétque id ea de causâ fieri, quod ad illas addiscendas non prærequiratur experientia multis annis parta, prærequiratur autem ad Sapientiam & Physicam. Neque opponas censuisse Aristotelem disciplinas illas conuenire ætati puerili, cuius tamen in iudicando vires sunt admodum debiles: nam in illis alia sunt facilia, ea videlicet quæ non procul absunt à primis principiis; alia sunt difficiliora, quæ longiùs absunt; alia difficillima, quæ longissimè. Vnde licet Plato voluerit pueris primùm tradi mathematicas scientias, in illis tamen addiscendis ad trigesimum vsque ætatis annum perstare eos iubet, prout rectè annotat Blancanus suprà pag. 24. vbi de hac ipsa re ita scribit; *dicam syncerè, quod ipse, dum eas per plures annos docerem, expertus sum; quoscunque reperi ingenio in mathematicis pollere, hi pariter in aliis omnibus excellebant. Requirit enim studium istud omnes ingenij partes, imaginationem, discursum, & memoriam. Idcirco Veteres puerorum ingenium ad Mathematicas quasi ad Lydium lapidem experiebantur, iisque inepti à reliquis studiis arcebantur. Audi Platonem 7. de Rep.* An & hoc aduertisti quod homines naturâ Arithmetici ad omnes doctrinas, vt ita dixerim, acuti videantur. Hactenus ille. Sed quod ad illam mathematicas disciplinas reliquis præmittendi legem attinet, non omnibus ea probatur: nam S. Thomas in librum Ethicorum sextum lectione septima ita loquitur, *erit ergo congruus ordo addiscendi: vt primò quidem pueri logicalibus instruantur, quia logica docet modum totius Philosophiæ. Secundò autem instruendi sunt in Mathematicis, quæ experientia non indigent, nec imaginationem transcendunt. Tertiò autem in naturalibus, quæ etsi non excedunt sensum & imaginationem; requirunt tamen experientiam. Quartò in moralibus quæ requirunt experientiam, & animum à passionibus liberum, vt in Primo habitum est. Quintò autem in Sapientialibus & diuinis, quæ transcendunt imaginationem, & requirunt validum intellectum.* Ridiculus porrò fit quisquis ex hoc S. Thomæ loco inferendum contendat, Logicam puerilem & perfacilem esse scientiam; ipso quippe initio id ætatis adolescentes percipient quæ in Logica

faciliora erunt, progressu verò temporis reliqua maturiori ingenio addiscent.

VII. Restat examinandum quod S. Thomas asserit sub finem Commentariorum in secundum Metaphysicorum lectione 5. ibi enim explicans Aristotelicum illud assertum [quosdam reperiri qui omnia sibi mathematico more probari volunt, eo quod assueti non sint nisi mathematicis demonstrationibus] addit, *hoc conuenit propter consuetudinem his qui in Mathematicis sunt nutriti, & quia consuetudo est similis naturæ. Potest etiam hoc quibusdam contingere propter indispositionem, illis scilicet qui sunt fortis imaginationis, non habentes intellectum multùm eleuatum.* Cùm igitur ex S. Thoma non opus sit ingenio admodum sublimi ad mathematicas disciplinas percipiendas, iure merito quæritur cur homines ingenij acris, & phantasiæ viuidæ admodum, atque tenacis, tantopere laborent in intelligendis iis quæ Archimedes scripta reliquit de spiralibus præsertim & libra. Respondeo S. Thomam non loqui ibi nisi de illis Mathematicis qui assuefacti tantummodo sunt demonstrationibus Euclideis primorum præcipuè librorum; potest enim contingere vt illorum aliquis *fortis sit imaginationis,* parúmque polleat ingenij viribus; iste igitur si dum sublimia in aliis scientiis dicuntur, ea συνείρειν vt Aristoteles eo loci ait, hoc est rationis nexu iungere nequeat, id præ ingenij imbecillitate faciet, in iis præcipuè rebus quæ nulla linearum vel superficierum descriptione continentur. De isto quoque Mathematico intelligi debet, quod S. Thomas & Auerroes asserunt *in illo virtutem imaginatiuam dominari supra virtutem cogitatiuam.* Certum enim est eum qui noua & abstrusa quærere instituit, non assequuturum quod vult, nisi *forti eius imaginatiuæ fortior dominetur cogitatiua.*

SCHOLIVM.

Punctum extremum lineæ circulum describentis quò remotius fuerit à centrò, eò velociùs ferri ab eadem virtute motum, Archimedes initio libri primi de æquiponderantibus, inter postulata reponit. Petimus, *inquit*, grauia æqualia æquali distantia suspensa, inter se æqualiter ponderare: grauia item æqualia, distantiâ inæquali suspensa non æqualiter ponderare, sed id quod in longiori distantiâ pendet deorsum ferri. *Postulat igitur idem in æquali à centro libræ distantiâ, pari impetu deorsum ferri. Inde enim existit æquilibrium, quòd extrema libræ capita vtrinque premantur deorsum æquali impetu, id est, ea vi quæ æquè velocem in vtroque causaret motum, nisi sibi mutuo ipsi motus obsisterent: quanta autem est velocitas eiusdem puncti, tanta est resistentia ad motum oppositum. At verò Iordanus Autor non ignobilis, inter Scriptores Mathematicos vndecimi seculi relatus à Blancano nostro, in opusculo de ponderositate, grauia æquali distantiâ suspensa inter se æqualiter ponderare probat quæstione 2. quæ quia nonnulla alia continet non inutilia lubet illam hic apponere emendatam, & iuxta Authoris, nisi fallor, mentem restitutam.*

PROPOSITIO XXXIV.

SI libra fuerit horizonti parallela, & æqualibus interuallis ab ea suspensa fuerint grauia æqualia, ab eo situ non discedet; & si ab eo submoueatur, sibi relicta ad eum reuertetur. Si verò inæqualia appendantur ex parte grauioris vsque ad perpendiculum declinare cogetur.

Sit (*Fig. 96.*) libra b c bifariam secta in a, & ex a pondera b, c æqualia, de punctis b, c pendentia liberè; sit f a e perpendicularis ad horizontem. Dico si libra ex a suspendatur ita vt sit parallela horizonti, ipsam permansuram in eodem situ; & si ab eo situ dimoueatur, ad eum redituram; denique & si b alterutrum ponderum ponatur esse maius, depressum tamdiu iri libram ad partes b, dum recta a b congruat perpendiculo a e.

Ad istud probandum Iordanus assumit primò; quod grauiùs est, velociùs descendere: secundò, idem eò velociùs descendere, ac proinde grauius esse, quò eiusdem deorsum motus rectior, & perpendiculo similior fuerit: tertiò obliquiorem descensum in eadem circuli quantitate minus capere de directo, id est respondere minori directo.

His ita positis, ex centro a interuallo rectæ a b descriptus intelligatur circulus b f c e; & per b, c actis rectis b h, c d æquidistantibus ipsi a e, sit primò b c parallela horizonti. Quoniam angulus b a e est ex constructione rectus, erunt quoque anguli h b a, a c d recti, ac proinde rectæ b h, c d tangent circulum in b & c; anguli igitur contactûs h b e, d c e erunt æquales. Cùm igitur descensus tam ponderis b, quam ponderis c fiat per circumferentiam circuli versus e. & cùm æquè obliquus sit hinc inde descensus, eo quod circumferentiæ b e, c e æquali angulo recedant à perpendicularibus b h, d c; aliunde verò pondera b, c sint ex se æqualia, libra non nutabit in alteruttam partem; cùm neque ratione ponderum, neque ratione anguli in descendendo decliuioris se superent.

Secundò (*Fig. 97.*) libra b c non sit horizonti parallela; sed cæteris vt in priori casu manentibus; depressa sit ex parte b, & eleuata ex parte c. Per puncta a, c, b ducantur rectæ q p, c l, b g horizonti parallelæ, & inter c & p sumpto quouis puncto i, arcui c i fiant arcus c x, b o æquales, & per i, x, o ducantur i n, x s, o t horizonti parallelæ. Quoniam arcus c i, c x sunt æquales, erit recta m r maior rectâ r z; ergo cùm arcus i c, c x sint æquales, & arcus c x parallelis horizonti lineis x s, c l interceptus respondeat minori parti r z, arcus verò c i maiori m r, sint autem r z, u y æquales, erit descensus grauis c per arcum c i minùs obliquus, descensu b per arcum b o: ergo graue c descendet, cùm hoc ipso quod viam habet minus recedentem à perpendiculari c d, sit grauius: ergo libra b a c

mouebitur donec punctum b respondeat puncto q, & punctum c puncto p.

Tertiò (*Fig. 98*) sit pondus b maius pondere c, & libra b c sit parallela horizonti; ita vt punctum b respondeat puncto q, & punctum c puncto p; manifestum est inclinationem factum iri ad partes b, cùm enim sicuti in primo casu ostensum fuit anguli descensûs sint æquales vtrinque, & pondus b sit pondere c ex se grauius, manebit adhuc grauiùs respectu habito ad situm.

Rursus sit libra b t ad horizontem inclinata, & ponatur b inferius (vt libet) & c superius. Ex recta b c productâ auferatur recta c g ipsi a c æqualis; ex centro g describatur circulus c z: ex c excitetur ad b c rectam perpendicularis c m; tanget recta c m vtrumque circulum in c. Quoniam verò rectæ h b, d c sunt parallelæ, anguli h b a, d c g erunt æquales: sed anguli g c z, a b e mixti sunt etiam æquales; ergo si ex æqualibus rectilineis h b a, d c g auferantur æquales mixti a b e, g c z; residui mixti h b e, d c z erunt æquales: sed angulus d c z mixtus superat mixtum d c p excessu anguli curuilinei p c z: ergo angulus mixtus h b e superat mixtum d c p, excessu anguli curuilinei p c z: sed angulus p c z est duplus anguli contactûs m c z: ergo excessus quo angulus mixtus h b e superat mixtum d c p, est angulus duplus anguli qui ad contactum circuli fit ex peripheria ipsius circuli & ex recta contingente.

Quoniam igitur licet, vt in secundo casu ostensum fuit, pondus b habeat descensum obliquiorem pondere c, & eatenus pondus b fiat leuius, quia tamen proportio anguli h b e (qui est obliquitas descensûs ponderis b) ad angulum d c p (qui est obliquitas descensús ponderis c) est minor qualibet proportione quæ est inter maiorem & minorem quantitatem, quarum excessus multoties repetitus superet minorem; minor etiam erit quàm ponderis b maioris, ad pondus c minus: cùm ergo pondus b plus addat super pondus c, quàm obliquitas super obliquitatem, grauius erit b in hoc situ quàm c: ergo cùm pondus b non possit quiescere in situ libræ horizonti parallelæ, aut inclinatæ ad illum: superest vt quiescat in situ perpendiculi a c. Quod autem proportio anguli h b e ad angulum d c p sit minor qualibet proportione quæ est inter maiorem & minorem quantitatem quarum excessus multoties repetitus superet minorem; & quod pondus b maius & c minus ita se habeant vt eorum excessus sæpius replicatus componere possit pondus ipso pondere c maius, ostenditur hoc pacto.

Quoniam inter d c & c m rectas nulla per c duci potest recta quæ non secet circulum, cùm c m recta tangat in c, omnis angulus rectilineus minor angulo rectilineo d c m, erit etiam minor angulo mixto d c p. Cùm ergo angulus m c p talis sit vt quantumuis repetitus non possit adæquare vel superare rectilineum angulum vel minimum vt ad propositionem 16. tertij Euclidis demonstratur à Clauio: ergo & angulus p c z curuilineus, cùm, vt ostensum est, sit duplus anguli contactûs, talis erit vt quantumuis duplicatus

duplicatus non possit adæquare vel superare vllum rectilineum angulum: ergo multò minus poterit adæquare vel superare angulum mixtum d c p, quem ostendimus esse maiorem quocunque rectilineo angulo abscisso ex angulo rectilineo d c m: ergo angulus d c z seu h b c maior ita se habet ad angulum d c p minorem, vt excessus maioris, qui est angulus curuilineus p c z, quantumuis repetatur non adæquet vel superet, ipsum angulum d c p.

Iam verò quòd excessus quo pondus b maius superat minus c, tale sit vt sibi ipsi coaceruatus superare possit grauitatem c; assumitur inter postulata: sicuti, quòd inæqualium spatiorum excessus quo maius superat minus sibi ipsi toties possit accumulari, vt definitum spatium excedat, assumptum est (λῆμμα vocat Archimedes in epistolâ præfixâ quadraturæ paraboles) quo vsi sunt omnes Geometræ vt testatur idem Archimedes, & quo ipse vtitur in ipsa quadratione paraboles proposit. 16. & 20. & de Conoid. prop. 5. Semel autem eo concesso in spatiis inæqualibus, eadem rationis euidentia constat admittendum esse in ponderibus, & in omnibus aliis in quibus non reperiuntur partes ita dissimiles, sicut sunt duo anguli mixti angulum rectilineum constituentes, quorum vnus est angulus contactûs, alter est huius complementum ad totum rectilineum: quapropter Archimedes hoc ipsum de duabus lineis inæqualibus recta videlicet & circuli circumferentia assumpsit propositione 4. de lineis spiralibus. Quòd si de linea recta, vel de circumferentia circuli est verum; verùm quoque erit de angulo rectilineo, cum anguli rectilinei partes per 33. sexti sint in ratione partium peripheriæ circuli quibus insistunt. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXV.

SI brachia libræ fuerint inæqualia, æqualibus appensis fiet ad partes longioris inclinatio.

Istud demonstrat Iordanus quæstione 5. in hunc fermè modum. Sit (*Fig. 99.*) libra a b horizonti parallela, sitque c g perpendicularis ad eundem; brachia ex centro c prodeuntia sint c a maius, c b minus, pendeantque ex a & b pondera æqualia. Dico inclinationem debere fieri ad partes brachij c a longioris.

Interuallo rectæ c a describatur circulus a g i, & factis b c, i h æqualibus ex centris c, h describantur circuli æquales b f, i u per puncta b, i. Ex a, i, & b excitentur perpendiculares e a, d b, l i ad rectam a i, quæ tangent circulos in a, i, b; circulus autem i u tanget circulum i g interiùs: ergo angulus l i g erit pars anguli l i u: sed angulo l i u æqualis est angulus d b f; angulo vero l i g, angulus e a g: ergo angulus e a g est minor angulo d b f: sed angulus e a g est obliquitas descensûs ponderis a, & angulus d b f est obliquitas ponderis b: ergo cùm pondera b & a sint ex se æqualia, & pondus a habeat descensum minus obliquum, catenúsque

fit grauius, præponderabit: ergo inclinatio libræ fiet ad partes a; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVI.

NOnnullæ animaduerſiones in demonſtrata à Iordano propo-ponuntur.

Primò apertum eſt demonſtrationes iſtas procedere ex illo poſtulato, grauia ferri deorſum per lineas inuicem parallelas; ac proinde caſtigandum eſſe primum Iordani poſtulatum, quod ita habet, *omnis ponderoſi motum eſſe ad medium*: & pro eo reponendum eſſe, *ponderoſa ferri deorſum per lineas parallelas*.

Secundò dato pondera ferri deorſum per parallelas, ſi libra cuius brachia ſunt æqualia, & vtrinque ſuſpendunt pondera ex ſe æqualia, à ſitu horizonti parallelo ſubmota habet vim reſtituendi ſe eiuſmodi poſitioni. Dico eandem quoque vim obtinere quando brachia fuerint inæqualia, modo pondera ſuſpensâ ſint ſubcontrariè in proportione brachiorum. Ratio huius eſt quòd pondera, quæ ita inuicem ſe habent, æquiponderare ſibi inuicem oſtenduntur in 6. & 7. Archimedis libri primi de æquiponderantibus, ex eo quòd reducantur ad libram habentem brachia, & onera æqualia.

Tertiò ſi motus grauium ſit ad medium quod eſt centrum mundi; dico libram æquis brachiis & oneribus à ſitu horizonti parallelo ſubductam non redituram ſponte ſua in priſtinum ſtatum.

Sit enim (*Fig.* 100.) libra b c in ſitu ad horizontem obliquo, ſitque b depreſſius, c elatius pondus; inter ſe vero b & c ſint æqualia. Sit præterea g centrum mundi, ad quod conueniant rectæ b g, c g: per b & c agantur tangentes b h, c d. Quoniam c eſt ſuperius & b inferius, erit recta g c ex centro educta maior rectâ g b: ergo in triangulo g b c, angulus g b c erit maior angulo g c b: quoniam verò arcus b e eſt quadrante minor, angulus b a e erit acutus: ſed angulus a b h eſt rectus; ergo duæ a g, b h concurrunt ad partes g.

Ex angulo g b c maiori auferatur c b u æqualis minori b c g; cadet ergo punctum u inter puncta c, g. Et quoniam c d, b l ſunt parallelæ, anguli alterni b l c, l c d erunt æquales: ſed b l c externus eſt maior interno & oppoſito l b g in triangulo l b g; ergo angulus l c d eſt maior angulo g b l: ſed anguli l b c, d c b ſunt æquales, vt pote recti, item ablati u c b, u b c: ergo reſidui l b u, u c d ſunt æquales: cum ergo u c d ſit maior angulo g b l, erit l b u maior angulo g b l; exceſſus autem erit angulus rectilineus, ac proinde maior angulo contactûs.

Vel ergo recta b l cadit inter rectas b u, b g; vel congruit cum b g; vel inter b l, b u cadit b g. Primò cadat recta b l inter b u, b g (*Fig.* 100.) Cùm ex maiori angulo u b l ablato angulo contactûs e b l relinquatur angulus mixtus u b e, & ad minorem g b l addito eodem angulo conta-

ctûs conficiatur g b e, erit g b e minor adhuc, quam u b e, siue quàm u c m: ergo cùm descensus per b e minùs declinet à recto descensu qui fieret per b g, magis verò declinet descensus per c m à recto qui fieret per c g, erit pondus b, ratione sitûs, grauius pondere c: ergo pondus b descendet.

Secundò recta b l congruat rectæ b g (*Fig.* 101.) Cùm angulus l b e mixtus, sit angulus contactûs demptus ex rectilineo u b l, erit u b e, hoc est u c m, maior quam l b e: ergo sicut in priori casu ostensum est, graue b ratione sitûs erit ponderosius, & descendet.

Tertiò inter rectas b l, bu cadat recta b g (*Fig.* 102.) Quoniam recta b l tangit circulum in b: recta b g secabit circulum inter puncta b, o: ergo angulus mixtus g b n erit minor angulo mixto u b n seu u c m: ergo, sicut in primo casu ostensum est, punctum b descendet; quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

In quarta huius libri propositione monuimus libram nullam appellari ab Archimede, nisi fuerit horizonti parallela; cuius rei causa haud scio an fuerit illa ipsa quæ mouit Iordanum ad scribendas propositiones superiores. Vtcunque tamen se tunc habuerit cogitatio Archimedis, demonstrata nunc à Iordano nihil obsunt iis quæ in illa quarta scripsimus; quia possumus in omnibus illius casibus adiungere libram grauitate carentem è qua graue quodcunque suspensum pendeat per parallelas ad horizontem perpendiculares, & nulla grauitate præditas; sicuti ipse Archimedes idipsum facit in libro de quadratura paraboles. Quòd si rotundiùs solui nodum optes, dici potest libræ Archimedeæ principia ita progredi, quasi nullum esset Iordani assumptum, *idem eò velociùs descendere, ac proinde grauius esse, quò eiusdem deorsum motus rectior, & perpendiculo similior fuerit*: Siue enim assumptum istud sit verum, siue falsum; rectè potest aliquid ratione concludi ex hypothesi, quod nullum sit, vt vberius explanatum suprà fuit.

PROPOSITIO XXXVII.

EXperimentum quod ope libræ cœpit Villalpandus in ponderando congio Farnesiano, discutitur.

Villalpandus tom. 3. pag. 351. testatur congium Farnesianum aquâ plenum bilance, quam iustam fuisse ait, filo suspensâ examinatum à se fuisse; inter examinandum autem hoc contigisse. Cùm congius in vnâ lancium statutus fuisset, in alterâ verò pondera primùm inani vasi æquiponderantia, tum lapis decem æquas libras pendens; & cùm deinde in congium aquam P. Griembergerus è quadam ampullâ effunderet, *mirum*, inquit, *dictu effusâ tandem sexies ampullâ vas vsque ad colli terminum ex æquo plenum, pondera simul eleuata, libraque examen ita in medio fixum stetit, vt non mobilis libra*

videretur, sed fixa ac permanens: atque ita permansit donec cominus omnes accedentes, oculati possent esse testes iustæ librationis vasis ex æquo pleni.

Ludouicus Sauot in libro gallicè scripto de numismatis antiquis tertiâ parte c. 32. existimât Villalpandum narrare pondera eleuata fuisse sola vi congij & aquæ immissæ; ergo verò existimo id neque ita narrari, neque re ipsâ factum esse; sed id, vt solet, manu zygostatæ (is erat Grembergerus vt ex narratione conjicitur) sensim totam libram adducentis ad æquilibrij positionem: simul autem atque ita adducta fuere, libram hæsisse in illo situ.

Demus tamen pondere solius congij pleni eleuata fuisse pondera; causamque illius eleuationis simul & æquilibrij consequuti inquiramus. Perdoctus Sauot existimat causam esse reducendã in genus libræ (quod Italis & Hispanis familiare esse dicit) habentis centrum in superiore scapi parte, quod fallacissimum esse satis patet. Istud vt negem duo aut tria faciunt: primum quod ipse Villalpandus paulò ante nimirum pag. 349. libræ veram formam descripsit, vt doceret cuiusmodi libra ad istud adhibenda foret. *Libræ* inquit *perfecta ratio in eo potissimùm consistit quod ex rectâ regulâ à medio suspensâ ex vtraque parte sit sibi vniformiter æqualis, craßitudine, longitudine, figurâ, & pondere, atque vt* O M N I N O R E C T A *sit, & ab eius extremis binæ, æquales, & vniformes pendeant lances.* Cùm ergo deinde testetur libram quam vsurpauit fuisse *æquam*, cæteras verò ipse appellet *iniquas*, satis docet à se adhibitam esse libram, quam paulò superiùs adhibendam esse docuerat.

Alterum est, quod quamuis libra Villalpandi habuisset centrum supra lineam horizonti parallelam ex cuius extremis lances suspenduntur, attamen non apparet causa cur in æquilibrio consistere debuissent, quod tamen factum narratur; nec dubito quin ita euenerit saltem iudicio sensûs, ita vt nullum inclinatæ libræ vestigium agnoscerent quicunque præsentes aderant. Vnde vlteriùs conficio discrimen ponderum admodum exiguum fuisse, si enim notabile fuisset, notabilis quoque inclinatio libræ eiusmodi contigisset. Quod verò Sauot ait, lancem cui impositus erat congius *longè* à mensa cui opposita lanx cum suo pondere incumbebat, eleuatam fuisse; fateor eleuatam narrari à Villalpando; nego tamen *longè* eleuatam dici. Quod cùm non soleat vulgo fieri, nec dicatur factum, placuit tamen huic Authori, vt tantò verosimiliùs dicat aquam ponderis nouem librarum in lance eleuatâ fusam potuisse non solùm attollere vtcunque pondus decem librarum in lance depressa situm, verum etiam vsque eò donec libræ iugum parallelum esset horizonti; quod postremum est prorsus impossibile; nam cùm brachia libræ ponantur æqualia, & horizonti parallela, si pondera sint inæqualia, non æquiponderabunt sibi inuicem. Laudatus itaque Autor gratis dicit cap. 30. tertiæ partis isto Villalpandi in libra tractanda errore induci magnam ponderum varietatem; nullus enim, vt puto, fuit error, & quamuis aliquis fuerit sensu per-

cipi non potuit, nec proinde in eo genere trutinæ quod adhibitum fuit, notabilem aliquod causare ponderum discrimen.

Dixerit fortasse aliquis eleuationem illam libræ potuisse accidere, ex eo quod quando centrum libræ est in medio librili & in eius grauitatis centro, ipsa sua sponte redit ad æquilibrium ab illo deturbata, si causa deturbans cesset vt ex Iordano demonstratum fuit quod contingere nequit si punctum suspensionis fuerit in superiori vel in inferiori scapi parte, prout apertè colligitur ex naturâ huius libræ, & ipse Iordanus huc respicit quæstione 25. ex. Edit. Veneta citata *si sub regula centrum designetur vix continget in hoc situ stabiliri pondera.* Imo Villalpandus postquam dixit vitiosas esse libras quas Romæ vidit omnes, eò quòd earum lances *ex curuatis sursum regulis pendent*, subdit ex harum constitutione hoc vnum necessariò sequi, *vt quamuis æquissima pondera lancibus adhibeantur, quiescere tamen nullà ratione possint.* Vnde colligi posse videtur Villalpandum exponendo libræ vltroneum (si tamen vltroneus fuit) motum donec scapus parallelus horizonti existeret, voluisse indicare omni vitio eam caruisse. Istud tamen non placet, quia iam demonstrauimus illum libræ motum non euenire quando pondera in mundi centrum feruntur, prout ferri iam certum est apud Physicos, & apud ipsum Villalpandum pag. 319.

Non deerit qui dicat germanam huius causam extitisse, quòd cum libra omni ratione exacta esset, cùm primum ventum est ad æqualitatem ponderum, impetum quamuis leuem quo infusa labebatur aqua præponderasse, illumque euanuisse dum ad situm horizonti parallelum peruentum fuit: ergo &c. quod erat propositum.

SCHOLIVM.

Libet hoc loco animaduertere in restituendis ponderibus antiquis & mensuris multos mirâ opinionum varietate laborasse, singulosque in refellendis aliorum sententiis aliquid adducere vnde earum fundamenta conuellantur. Agricola Alciatum Budæumque redarguit, quod cùm per denarios antiquos explorare istud tentarint, iustos non adhibuerint, neque eos quos adhibere debuissent. Villalpandus pag. 305. *Lucam Pætum reprehendit quòd cùm istud aggrediatur per Congij Farnesiani (quem decem aquæ librarum capacem esse ex inscriptione contendit) examen librâ factum; trutinam illam adhibeat quam* Romanam *appellamus; eam enim indicari putat his Pæti verbis* sicque plenum cùm iustissima trutina (qua hodie Romæ vtimur) appendissem, inueni &c. *Eiusmodi autem trutinam*, infinitis propemodum erroribus subjacere *contendit; imò & bilances omnes quas Romæ vidit, iniquas esse eo quod ex* curuatis sursum regulis *constent. Villalpandi rationem in eodem congio trutinando castigat postremus eorum, quos vidi, Sauot, quo autem successu iam diximus. Pede antiquo pondera & mensuras restitui posse concedunt omnes; sed Pætus Colotianum rejicit, aliumque probat; è contrario Sauot cap. 29. partis tertiæ aliis reiectis Colotiano vtendum censet. Pedis ipsius longitudinem in libris editis repræsentatam ab Autoribus, castigandam censent Autores, eò quod charta à prælo madida, postea con-*

trahi soleat, dum exsiccatur; sed contractionis modum alij alium statuunt: Snellius contendit chartam sexagesima sui parte fieri minùs latam, Ricciolus l. 2. Almag. c. 7. n. 2. quinquagesimâ tantùm.

PROPOSITIO XXXVIII.

QVid Aristoteles problemate decimo tertio Mechanicorum intelligat per τὸ ζυγὸν, quod Leonicus *libram* vertit.

Quod Aristoteles cap. 10. proponit his verbis διὰ τί ῥᾷον ὅταν ἄνευ βάρους ᾖ, κινεῖται τὸ ζυγὸν, ἢ ἔχον βάρος, ὁμοίως δὲ καὶ τρόχος &c. Leonicus ita vertit. *Cur facilius quando sine pondere est, mouetur libra, quàm cum pondus habet? similique modo rota &c.* Manifestùm certè est ex ratione quam Philosophus assignat, vt soluat quæstionem, τὸ ζυγὸν ibi esse machinam quandam quæ circa axem horizonti perpendicularem voluatur, sicuti & ipsa figuli rota cuius etiam meminit, torqueri solet. Istius porrò machinæ vsus est ad onera imposita circumquaque in orbem deferenda, cuiusmodi est in Nonnarum cœnobiis tympanum illud quod gallicè *le tour* (eò quòd torni ratione versetur) & quo foris asportata intrò inuehuntur. Rationem itaque huius reddit Philosophus, quia grauia non solum resistunt quando sursum & in oppositum eius quo sponte vergunt, impelluntur, verùm etiam quando in obliquum & ad latus, vt euenit in versatione huius machinæ quam ζυγὸν appellant.

Cæterùm de hac ipsâ machinâ intelligi consequenter debet idem ipse Aristoteles cap. 13. διὰ τί ῥᾷον κινοῦνται περὶ τὸ αὐτὸ ζυγὸν οἱ μείζους τῶν ἐλαττόνων κόλλοπες, καὶ οἱ αὐτοὶ ὄνοι λεπτότεροι ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἰσχύος τῶν παχυτέρων; An quia, inquit, ζυγὸν & ὄνος pro centro sunt, quæ autem inde procedunt magnitudines sunt instar linearum à centro eductarum? Celeriùs autem & plus mouentur quæ maiorum sunt circulorum ab eadem vi, quàm quę minorum. Subdit post pauca διὸ πρὸς μὲν τὸ ζυγὸν τοὺς κόλλοπας ὄργανα ποιοῦνται, οἷς ῥᾷον στρέφουσι, ἐν δὲ τοῖς ὄνοις πλεῖον γίνεται τὸ ἔξω τοῦ ξύλου, αὕτη δὲ γίνεται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου. Censeo tamen ζυγὸν hic sumi non pro totâ machinâ, sed (prout in aliis plurimis per synecdochen solet) pro eius parte circa quam tanquam cardinem versatur; ab illâ enim vt centro prodeunt trabes seu vectes totum tympani ambitum dimetientes, & tabulatum sustinentes. Κόλλοπες autem vel sunt trabes inde procedentes, vel certè cylindraceum organum, aut aliud simile.

Ex his liquet ζυγὸν hîc non esse *ergatam* vt volunt Henricus Stephanus in lexico, & Philander in cap. 4. libri 9. cùm ergata fune ductorio leuet onera, ζυγὸν autem non leuet, sed circumferat in orbem. Sed omnium longissimè aberasse mihi videtur Budæus in Commentariis linguæ græcæ pag. 471. dum ζυγὸν iugum lyræ interpretatur, quod manu sinistrâ tenent cytharoedi, & κόλλοπας veluti verticilla quibus chordæ intenduntur: cùm lyræ istud iugum nec ad sustinenda onera, eáque circumferenda sit factum; nec appareat quo pacto citiùs versetur quando nullo premitur

onere; quæ tamen omnia de suo iugo tanquam nota Aristoteles assumit; causa verò huius experimenti allata quid ad lyram?

Faciliùs concesserim Stephano & Philandro, ipsique interpreti Leonico ὄνον esse suculam, machinam scilicet illam tractoriam, quæ axe horizonti parallelo, & vectibus versata circumuoluitur fune quo leuantur onera; quò autem gracilior fuerit iste axis ligneus, eò longior erit pars vectis extra lignum eiusdem axis excurrens, ac proinde cùm id tantùm quod est extra eiusmodi lignum habeatur pro linea ex centro, tanto erit eiusmodi linea longior vt Philosophus docet, quo axis fuerit gracilior. Ergo &c. quod erat propositum.

COROLLARIVM.

Hinc patet perfacilè esse viros etiam peritissimos errare in exponenda vera vocum aliquarum significatione, quoties eæ sunt desumptæ ex arte quam ipsi ignorent; quis autem omnes calleat, sitque omnibus, vt dicitur, armis ornatus? id certè optandum potius est quàm sperandum; quamuis enim eiusmodi generalem omnium comprehensionem Vitruuius exigat à suo quem efformat Architecto, satis tamen intelligitur plus exigere quàm oporteat, & quàm fortasse velit. Duo hîc referam de quibus interrogatus aliquando fui ab homine qui ex Geometria peti posse aliquam lucem suspicabatur, in interpretandis Scriptorum aliquot locis. Quæsiuit de loco illo Liuij l. 8. *Clypeis antea Romani vsi sunt, deinde postquam facti sunt stipendiarij, scuta pro clypeis fecere*: vbi (vt rectè notat Turnebus. l. 11. c. 27.) nisi clypeum à scuto distinguamus, necesse est à sensu aberremus: idem ipse Liuius iam libro primo scripserat *imperatum esse secundæ classi pro clypeo, scutum*; vbi Halicarnasseus pro clypeo ἀσπίδα græcè habet, pro scuto θυρεὸν. Respondi sicut ex Virgilio intelligimus clypeum fuisse rotundum, cùm cyclopis oculum, qui rotundæ figuræ est, argolico comparet clypeo; ita ex Geometris constare θυρεὸν esse figuræ periphericæ oblongæ, quæ vulgò dicitur *oualis*: Geometræ enim istam figuram vocant sæpius quidem ἔλλειψιν; aliquando tamen θυρεὸν, vt Eutocius obseruat Commentariis in Apollonij conica sub initium. Alterum verò quod rogatus sum attinet ad locum ex Anastasio Bibliothecario desumptum, in vita Gregorij II. Autoris hæc sunt verba; *trecenta septuaginta quinque millia Sarracenorum vno sunt die interfecti, vt eiusdem Eudonis Francorum Ducis missa Pontifici epistola continebat: mille tantùm quingentos ex Francis fuisse mortuos in eodem bello dixerunt. Adijciens quod anno præmisso in benedictionem à prædicto viro eis directis tribus spongiis, quibus ad vsum mensæ Pontificis apponuntur, in hora qua bellum committebatur idem Eudo Aquitaniæ Princeps populo suo per modicas partes tribuens ad sumendum eis, nec vnus mortuus ex his qui participati sunt.* Hunc locum emendatiùs repræsentat Typographiæ Regiæ Parisinæ codex pag. 275. ita enim habet, *qui Pontifex anno præmisso in benedictionem eis direxerat tres spongias, quibus ad vsum mensæ Pontifices vtebantur.* Quæsiuit igitur à me vir Historiæ

amantissimus an quid edules illæ spongiæ sint ad geometram attineret dicere: sibi enim non satis probari quod doctissimus alioqui Scriptor ait illas fuisse sine vlla metaphora spongias quibus mensa Pontificis detergi soleret. Respondi spongias illas tres, mihi videri fuisse tres ex illis panes, qui Eulogiarum nomine mitti solebant; quem vsum olim viguisse, doctè ostendit Cardinalis Baronius tom. 3. ad ann. 313. Geometram verò statim suspicari à figura & similitudine istos panes appellatos fuisse spongias; spongiæ enim, quibus vulgò vtimur, figuram habent quasi Hemisphæricam, vt & panes; suntque molles & innumeris ocellis præditæ, quod & panibus præsertim primariis competit. Ille quidem nutu fauit coniecturæ; autorem tamen illius significatûs desiderare visus est, ne minimè dubitaret de meo sensu: sed statim ad manum fuit vigesimus Isidori de Originibus liber, vbi cap. 1. panem quemdam describit *spongiæ* nomine appellatum: *panis*, inquit, *aqua diutissimè laxatus, similam modicam accipit, & fermentum modicum, & habet humectationis plusquam omnis panis, vnde & spongiæ nomen accepit*. Tum planè acquieuit responso, pronuntiauitque illud quod hîc inculcatum volumus, *nunquam Interpretem posse nimis cautum esse in perquirenda vi verborum quæ vertenda habet, veniáque dignissimum esse, si quid propterea tantùm peccet in isto genere, quia non omnes artes calleat; iuréque potiori in Interprete quàm in Architecto vniuersum scientiarum apparatum requiri oportere.*

SCHOLIVM.

Animaduersione dignum censeo. Primò esse quasdam voces quas Aristoteles hîc vsurpat in duplici significatione σπάρτον enim vel σπαρτίον apud ipsum est aliquando punctum suspensionis quod κρεμαστὸν Archimedes appellat propos. 6 quadraturæ parabolæ, aliquando est perpendicularis ad horizontem per punctum suspensionis ducta τὸ γὰρ σπαρτίον inquit cap. 2. ὅτι κάθετος. Vox πλάστιγξ similiter modo sumitur pro totâ librâ cap. 1. γίνεται γὰρ τὸ μὲν σπάρτον κέντρον, μένει δὲ τοῦτο τὸ δὲ ἐπὶ μέρος τῆς πλάστιγγος, αἱ ἐκ τοῦ κέντρου modò accipitur pro lance vna quæ ex scapo pendet vt cap. 20. τὸ μὲν οὖν ἐπὶ θάτερα ἔχει πλάστιγγα, τὸ δὲ ἐπὶ θάτερα, ἀντὶ τῆς πλάστιγγος, τὸ σφαίρωμα. Vox φάλαγξ pariter aliquando sumitur pro scapo seu pro iugo transuerso vnde lances pendent, vt dum loco citato purpurarij dicuntur excauare occultè scapi alteram partem, & in eam liquatum fundere plumbum; aliquando accipitur pro totâ trutinâ Romana, *capite nimirum 20. de qua fusius postea. Porrò vocem τὸ ζυγὸν videtur mihi Aristoteles quoties pro libra vsurpat, sumere semper pro ea cuius brachia vtrinque sunt æqualia; cùm tamen ὁ ζυγὸς in proœmio & initio cap. 1. sumi videatur pro quacunque trutinâ, sicuti sumitur apud Archimedem propositione 6. tetragonismi paraboles. Porrò sicuti apud Græcos eadem vox ζυγὸς sonat & iugum quod subeunt boues agrum araturi, & libram de qua nunc agimus; ita pariter* iugum *apud latinos duplicem illum significatum obtinuit; vnde in 2. de diuina. apud Tullium Roma dicitur nata* cum esset in iugo luna, *id est in signo cœlesti quod libra nuncupari solet.*

Secundò libræ scapum transuersum ætate Aristotelis fieri ex ligno consueuisse, vnde technarum suarum ansam sumebant viles illi purpurarij; purpurarios *enim appello*

pello respiciens ad purpurariam illam Actorum 16. πορφυρόπωλις; quid autem ponderando venderent conthesne, an lanam pannosque infectos colore purpureo an quiduis aliud mihi satis non constat: viles autem fuisse eiusmodi artifices satis intelligitur ex eo quòd tam illiberalem fallendi modum adhibere vulgò censerentur; & quòd Plutarchus in vitâ Periclis vt notum ponat, nos quædam mirari, vt purpureas vestes, quorum artifices contemnamus, contra quàm accidat in operibus virtutis, eorum enim admiratio creat in nobis æmulationem, & imitandi studium.

PROPOSITIO XXXIX.

QVid Aristoteles in Mechanicis scripserit de conuenientia circuli, libræ, & vectis.

I. Aristoteles causam admirationis quam scientiæ machinalis effecta pariunt, in circulum refundit ipso initio Mechanicarum quæstionum, ita vt quæ admiranda vulgò videntur in libra, ad circulum referantur; quæ in vecte, ad libram; reliqua verò prope omnia in machinalibus motibus, ad vectem τὰ περὶ τὸν ζυγὸν γινόμενα εἰς τὸν κύκλον ἀνάγεται τὰ δὲ περὶ τὸν μοχλὸν, εἰς τὸν ζυγὸν, τὰ δ' ἄλλα πάντα σχεδὸν τὰ περὶ τὰς κινήσεις τὰς μηχανικὰς, εἰς τὸν μοχλόν. Hinc problemate tertio inquirens cur exiguæ vires vecte magna mouent pondera, vectis insuper onus accipientes: an inquit huius causa est quod vectis libra sit; ὁ μοχλὸς ζυγὸν κάτωθεν ἔχων τὸ σπαρτίον, καὶ εἰς ἄνισα διῃρημένον· τὸ γὰρ ὑπομόχλιόν ἐστι τὸ σπαρτίον μένει γὰρ ἄμφω ταῦτα ὥσπερ τὸ κέντρον. Problemate verò 20. cur statera paruo appendiculo magna trutinet causam interrogando reddit, ἢ ὅτι ἅμα συμβαίνει ζυγὸν καὶ μοχλὸν εἶναι τὴν φάλαγγα. deinde explicaturus quo pacto φάλαγξ sit μοχλὸς ait πᾶσαν φάλαγγα γίνεσθαι μοχλὸν ἀνεστραμμένον. Libra igitur reducitur ex Aristotele ad circulum quia sicut in circulo est centrum, ita in libra est punctum suspensionis; & sicut in circuli descriptione dum lineæ motu fit, extremum lineæ immotum hæret in centro, ita dum libræ versationes fiunt, longitudines eius describunt circulum ex puncto suspensionis tanquam ex centro; τὸ γὰρ σπαρτίον ἐστὶ κέντρον cap. 9. & cap. 3. dixit tàm ὑπομόχλιον in vecte, quàm σπαρτίον in librâ manere ὥσπερ τὸ κέντρον; ibidem dixit σπαρτίον esse κάθετον quod intelligendum est, quia perpendiculum vnde pendet libra, vel quod libræ examen dirigit, transit per libræ punctum illud manens; vnde fit vt tam ipsum punctum, quàm perpendiculum eodem σπαρτίῳ nomine donentur; denique sicuti in circulo ab eadem vi illud punctum mouetur citiùs, quod longiùs à centro distat, ita in librâ illud punctum mouetur citiùs ab eadem vi, quod longiùs abest à σπαρτίῳ.

II. Vectis reducitur ad libram: eò quod sicuti in librâ distinguuntur σπαρτίον siue punctum immobile, & hinc inde duæ longitudines cum duobus ponderibus examinationem facientibus: ita in vecte est aliquid immobile velut centrum, appellaturque ὑπομόχλιον, latinè apud Vitruuium lib. 10. cap. 8. *pressio* eò quod vecti ad onus admoto suppositum maximè prematur: sunt item duæ longitudines vectis, vna quæ quasi lingua sub

onus subditur, altera ex aduerso quam suis viribus premit vectiarius; vnde mouens & motum pondus respondent duobus libræ appensis ponderibus. Hinc facile intelligitur ratio quam problemate 3. paulò ante proposito assignat: cùm enim vectis ea pars quam vectiarius viribus suis deprimit fit instar brachij libræ, id verò quod ὑπομοχλίῳ incumbit, instar centri; alterũ verò brachium fit ea quæ velut rostrum sub onus mittitur: & cùm mouentis vires admotæ & oneris rursum leuandi grauitas sint instar ponderum suspensorum: dicendum est ideo faciliùs elationem oneris fieri, quoniam ab æquali pondere celeriùs mouetur longior recta earum quæ à centro sunt: & quia sicuti in libra *Vt se habet graue mouens ad motum, ita subcontrariè se habet longitudo moti ad longitudinem mouentis* ὃ τὸ κινούμενον βάρος πρὸς τὸ κινοῦν, τὸ μῆκος πρὸς τὸ μῆκος ἀντιπέπονθε.

III. Ex his clarè liquet Aristoteli cognitum fuisse theorema illud quod Archimedes longo post interuallo temporis demonstrauit propositionibus sexta & septima libri primi de Æquiponderantibus, quod & nos in alio etiam libræ genere ostendimus suprà propositione 18. 19. 20. Archimedes igitur hoc summùm ibi præstitit vt theorema à maioribus acceptum noua ratione demonstrarit; quod facilè mihi persuadeo, præcipuè cùm ex principio Aristotelico vsurpato initio Mechanicorum possit ostendi diuersa prorsus via ab Archimedea vt propositione sequenti patebit: ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO XL.

Grauia ex longitudinibus à centro prodeuntibus suspensa si pari velocitate descendant se habent vt longitudines ipsæ contrario ordine sumptæ.

Sit pondus (*Fig.* 103.) a b ex se grauius, & pondus c ex se leuius, affixa punctis b, c ita vt ex illis liberè pendeant: puncta autem b & c sint extremitates rectarum f c, f b ex centro f eductarum, & horizonti parallelarum. Pari velocitate grauia a b & c intra idem tempus lata fuerint, & graue c decurrerit arcum c e; graue verò a b arcum b d. Dico vt pondus b a ad pondus c, ita esse lineam f c ad lineam f b.

Ponderi c pondus a æquale auferatur ex pondere b a, residuumque sit pondus b. Quoniam igitur pari velocitate pondera a b & c feruntur, & pondus a b est maius, linea f b erit minor linea f c: si enim esset maior velociùs ferretur solum pondus a, quia describeret peripheriam maiorem intra æquale tempus: si autem esset æqualis, solum pondus a æquevelociter ferretur ob parem rationem: ergo addito pondere b, compositum pondus a b velociùs ferretur: est ergo recta f b minor recta f c.

Recta f c occurrat arcui b d in u. Quoniam recta f u est minor quàm f c; & vt f u recta ad f e rectam, ita est arcus c e ad arcum b u, erit c e maior arcu b u; sed b d arcus est æqualis arcui c e: ergo b d arcus est maior arcu b u; ergo u cadit inter b & d. Rursus quoniam si solum gra-

ne a moueretur ex b, quando ipsum a esset in u, graue c esset in e, & semper angulus b f u foret æqualis vel idem cum angulo c f e: ergo intra illud tempus graue a causarit velocitatem b u: ergo pondus b causarit reliquam velocitatem u d: nam composita velocitas constat ex velocitatibus, quas singulæ partes totius grauis producunt: ergo vt pondus a ad pondus b, ita arcus b u ad u d arcum: & inuertendo vt pondus b ad pondus a, ita arcus u d ad b u: ergo componendo vt pondus b a ad a seu ad c, ita arcus b d ad b u arcum.

Quoniam igitur vt arcus b u ad c e, ita se habent semidiametri b f, c f: & quoniam arcus c e, b d sunt æquales, vt arcus b u, b d ita erunt semidiametri b f, c f: sed arcus b u, b d se habent vt pondera c & b a, sicuti ostensum fuit; ergo vt pondera c & b a, ita semidiametri b f, c f; & inuertendo vt pondus b a ad pondus c, ita semidiameter c f ad semidiametrum b f; quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Hinc manifestum fit, si ex recta b f abscindatur f h æqualis ipsi f c, & pondus c intelligatur transferri in h, committi æquilibrium. Cùm enim pondera a b & c ex extremis libræ b c ex f suspensæ punctis b & c, sint æqualis velocitatis, in descendendo erunt pariter æqualis resistentiæ in ascendendo: ergo committetur æquilibrium & æquiponderabunt sibi mutuò: recta enim b h si sit horizonti parallela quiescet; si autem sit ad illum inclinata, sese propria vi in eiusmodi situ collocabit, vt cum Iordano ostendimus.

COROLLARIVM II.

Grauia, si fuerint vt brachia libræ subcontrariè sumpta, æquè ponderabunt. Hæc propositio, vt patet, est conuersa illius quam modò ostendimus: ita verò demonstratur. Vt b f ad f h brachium libræ, ita sit pondus h vel c ad pondus a b: dico pondus h æquiponderare ponderi a b; siue velocitatem ponderis h esse æqualem velocitati ponderis a b. Si enim velocitas ponderis h non est æqualis velocitati ponderis a b; erit vel maior vel minor. Sit igitur, si fieri potest, maior vel minor. Sit verò pondus g, cuius ex h suspensi velocitas sit æqualis velocitati ponderis a b ex b suspensi. Quoniam ex b & c pendent pondera a b & g æquè velocia, pondus a b ad pondus g erit vt recta f h ad f b ex iam demonstratis; sed vt recta f h ad f b, ita ponitur esse pondus a b ad pondus h: ergo vt pondus a b ad pondus h, ita ipsum pondus a b ad pondus g: ergo pondera g & h sunt æqualia quod est absurdum, cùm ponantur esse inæqualia. Si ergo grauia &c.

COROLLARIVM III.

Hæc est, vt puto, via qua vtebantur Mathematici ante Archimedéam demonstrationem, quam ego quidem isti quamuis ingeniosè excogitatæ præfero. Cæterùm hanc etiam, quantum diuinare licet in tanta codicis

corruptela methodum adhibuit Iordanus in opusculo de ponderositate editionis Venetæ apud Curtium Troianum anno 1565. nam prima quæstione hoc videtur velle quod nos propositione 34. 35. 36. proposuimus; & in sexta, illud quod modò demonstrauimus.

Istud ἀντιπεπονθὸς quod in æqualitate vtrinque constituenda interuenit in eò est positum, quòd quantum vna pars libræ exceditur in pondere, tantum alteram excedat in longitudine à centro, prout enim longiùs receditur ab eo, crescunt vires premendi deorsum; ac proinde quando libra in æquilibrio posita diuidi dicitur bifariam, & in æquas partes, sensus non est vel longitudines esse æquales, vel pondera ipsa inuicem; sed virtutem ponderandi quæ ex ipso pondere & ex ipsa distantia simul sumitur, esse vtrinque æqualem. Quapropter mirum videri non debet si ab Aristotele quæstione 20. id quod excurrit à centro φάλαγγος (genus est stateræ vt propositione sequenti dicemus) ad eam partem cui adhæret pondus, quod σφαίρωμα nominauit, ἥμισυ τ. φάλαγγος dicatur: est enim ἥμισυ vnà cum pondere quantum ad virtutem ponderandi. Atque hoc loquendi genere id pondus quod in se est minus, dicitur tamen ab Archimede propositione 5. aliàs 7. libri primi Æquiponderantium μεῖζον ὥστε ἰσοῤῥοπεῖν: vel vt interpretatur Eutocius μεῖζον κατὰ τὴν ἰσοῤῥοπίαν *maius quantum ad virtutem deprimenda libra spectat.* Quia vero virtutis Iustitiæ genuinum symbolum est libra, ideo illam etiam teste Aristotele ἀντιπεπονθὸς κατὰ ἀναλογίαν sectatur, quod etiam δίκαιον à δίχα quasi bipartitum græcè nominari idem affirmat; vnde parœmia δίχαιον ταλάντιον & δικαιότερος ζυγοῦ.

PROPOSITIO XLI.

QVodnam trutinæ genus sit φάλαγξ, & quâ ratione paruo appendiculo magna pensitet onera de mente Aristotelis in Mechanicis quæstionibus.

Philosophus problemate 20. inquirit cur φάλαγξ qua carnes suo tempore ponderabantur paruo appendiculo magna trutinaret onera, cùm alioqui tota non esset nisi ἡμιζύγιον; qua enim parte carnes imponebantur solùm suspendebatur lanx; in alterâ verò parte sola erat φάλαγξ.

I. Vt Aristotelis mens planè percipiatur prænoto quædam. Primò esse vulgare trutinæ genus quam *Romanam* dicunt, & quæ vt ait Isidorus l. 16. orig. cap. 24. *duas lances non habet; sed virga est signata libris & vnciis, & vago pondere mensurata.* Subdit absolutè dici *Campanam*, idque à regione Italiæ nomen accepisse vbi primùm eius vsus repertus est. Quod ad inuentores & nomen attinet, crediderim ita verum esse, vt id nominis, cùm apud Antiquiores non extet, post irruptionem Gottorum inditum sit stateræ; ideóque Campani inuentores eius dicantur, quòd, postquàm hac hominum illuvie omnes pæne artes extinctæ erant, ipsi stateram restaurarint, suóque opificio nobilitarint. Cæterùm isto ipso Isidori loco abu-

itur Angelus Rocca Episcopus Tagastensis in tractatu de Campanis pag. 26. dum ex eo probat tintinnabulum æreum iam tum *campanam* esse appellatum. Rectiùs ista *campana* voce pro staterâ vtitur Anastasius Bibliothecarius in vitâ Eleemosynarij.

II. Secundò idem trutinæ genus longe ante Isidorum descripsit Vitruuius l. 10. cap. 8. appellatque *stateram*: itáque eam describit vt *ansa quâ sustinetur sit propius caput illud scapi collocata, vnde lancula pendet* (hodiè pro lance, vncos substituunt artifices) *æquipondium verò in alteram partem scapi per puncta vagando, quo longiùs, aut etiam ad extremum perducitur paulò, etiam pari pondere, amplißimam pensionem parem perficit, per scapi librationem & examinationem longius à centro* (id est à puncto vbi axiculi quibus immittitur ansa, prominent) *recedentem.*

III. Tertiò Eustathius Iliad. μ. pag. 876. animaduertit ab Homero describente Achiuorum & Troianorum diu inuicem pugnantium ἰσοπαλὲς, & si ita loqui liceat ἀτάλαντοι, in neutram partem inclinante victoriâ, vsurpari comparationem petitam à pauperculâ æquitatis tamen amante fœminâ quæ summa exactione lanæ pensum aliis distribuendum exploratura, adhibet vel τάλαντα; vel σταθμόν. Quibus verbis duo genera trutinarum designari ipse putat, illo libram geminis lancibus instructam, ideóque non in singulari τάλαντον, sed in plurali τάλαντα scriptum esse à Poeta, vt indicaret τὰς δύο πλάστιγγας τοῦ σταθμοῦ; isto verò ὁλκήν τινα ὄγκου πρὸς ὃν ἀντιπίπτει τὰ σταθμώμενα, *magnitudinis cuiusdam pondus cui ex aduerso quæ ponderanda sunt, pari pensione opponuntur* quibus verbis apertum est istud aliud trutinæ genus ad *stateram* esse reuocandum; cùm non duas lances, sed ex vna parte pondus quoddam habeat, ad quod examinantur ea quorum pondus perspectum habere cupimus. Talem porrò esse ait τὴν λίτραν, καὶ τὰ τοιαῦτα. Sciendum verò est ipsum paulo ante docuisse hanc vocem σταθμὸς posse sumi latè & strictè (quod & multis aliis competit) latè quidem & ὁλικῶς vsurpari pro trutina binis constante lanculis, cui quinque respondeant voces τάλαντον, τρυτάνη, σταθμὸς, ζυγὸς, πλάστιγγες. Vnde liquet λίτραν, esse diuersam trutinæ formam, & ex vna parte constitui *pondere*, quod quia communiter librale erat, libra à pondere vago vel fixo, fortasse appellata fuit: dum autem dixit *alia id genus* fortasse indicauit φάλαγγα.

IV. Quartò staterarum duplex concipi potest genus primò quidem ita vt pondus illud sit vagum; centrum autem vnde fit suspensio sit fixum idemque in omni libratione; quo pacto contingit in *Romanis* nostris, & in illa quam ex Vitruuio, Isidoroque retulimus. Secundò ita vt pondus ipsum fixum semper hæreat eidem scapi capiti: centrum autem sit vagum, & scapus modo ex vno puncto suspendatur, modo ex alio, prout ratio ponderis & rei ponderatæ exiget. His positis in hunc modum.

V. Assero problema illud vigesimum intelligi debere de postrema hac stateræ ratione, cuius vagum sit centrum, & pondus fixum. Esto scapus (*Fig.* 104) a b parallelus (vt solet) horizonti, sustinens ex puncto b lan-

cem b e, & in puncto a habens fixum pondus a in sphærulæ, si placet, modum. Iste scapus hac arte sit compactus vt ex quotlibet punctis o, n, m, l, h, g, f liberè suspendi possit. Appositæ præterea sint notulæ indices ponderis quod in lance esse oportuerit, cum scapus ex punctis singulis suspensus hæserit in æquilibrio, horizonti parallelus; vt ita dignosci possit quanti sit ponderis res quæ lance sustinebitur. Dico hanc esse φάλαγγα, de qua problema agit, pondúsque a esse illud σφαίρωμα ὃ τῷ ζυγῷ πρόσκειται, & quod ibidem τὸ σταθμὸν dicitur: puncta verò f, g, h &c. esse illa σπαρτία ratione quorum φάλαγξ a b habet vt æquiualeat multiplici libræ, ἣ τῶν σπαρτίων ἕκαστον γίνεται τὸ κέντρον τῆς φάλαγγος, *quatenus vnumquodque spartorum euadit centrum phalangis*; dum scilicet æquilibrium committitur phalange a b suspensa modò ex f, modò ex g &c. Quid autem adderetur scapo vt suspendi ex illis punctis commodè posset, non explicat Aristoteles; vnde nec satis constat cuiusmodi essent hæc σπαρτία, quæ Blancanus in illam quæstionem Mechanicorum vigesimam vertit *trutinas*; Philander verò in Vitruuij cap. 8. lib. 10. *puncta, lineas, siue denticulos* interpretatur. Quomodocunque tamen explicetur illorum σπαρτίων modus, certum est phalanga esse stateram postremo loco suprà propositam; subdit enim Aristoteles τοιούτου δὲ ὄντος, πολλὰ ζυγά ἐστι καὶ τοσαῦτα, ὅσαπερ ἐστὶ σπαρτία, ἀεὶ δὲ τὸ ἐγγύτερον σπαρτίον τῆς πλάστιγγος καὶ τοῦ ἐπικειμένου βάρους, μεῖζον ἕλκει βάρος, διὰ τὸ γίνεσθαι τὴν μὲν φάλαγγα πᾶσαν μοχλὸν ἀνεστραμμένον, ὑπομόχλιον μὲν γὰρ τὸ σπαρτίον &c. *Cùm ita sit exstructa phalanx, multis æquiualet libris; tótque, quot habet sparta: semper verò spartum quod propinquius est lanculæ & ponderi superposito facit leuationem maioris oneris; quia phalanx omnis est vectis inuersus: nam hypomochlij vicem subit spartum &c.*

VI. At cuius structuræ fuerit hæc phalanx, vt hypomochlij vicem gereret spartum illud, quod & centrum libræ existeret; & vt libra esset vectis inuersus, quis planè explicet? Cùm enim hypomochlio innitatur vectis ab ipso hypomochlio diuersus, qui fieri potest vt phalanx sit pro vecte; & pro hypomochlio, centrum phalangis vnde ipsa pendet? Et cùm Inuersus vectis sit propriè quando hypomochlion est supra vectem, pondusque vecte ipso non eleuatur sursum, sed deorsum truditur; quis explicet quonam pacto istud quadret phalangi? Blancanus ait *stateram esse vectem, quamuis quodammodo inuersum, quia ipsius fulcimentum siue hypomochlium est trutina ipsa supernè collocata, pondus verò leuandum est ipsa merx, potentia verò appendiculum a.* Hæc explicatio mihi non satisfacit non solùm quia σπαρτία facit esse diuersa à phalange, cùm tamen Aristoteles dicat ea esse centrum ipsius phalangis quà libram repræsentat; sed etiam quia licet ansa libræ sit supra scapum, quà tamen scapum sustinet, vt liberè in alterutram partem inclinetur, est sub ipsum scapum. Licet autem clarè intelligere nequeamus modum huius inuersionis, quam satis non explanauit Aristoteles; propterea tamen confundere non debemus quæ ipse apertè distinxit: ea propter Philandro non assentimur existimanti Aristotelem hîc loqui de primo & vulgari genere stateræ descriptæ à Vitruuio eo loci: attamen

excusamus rei difficultate inconstantiam illius in explicandis σαρτίοις; modò enim concedit esse puncta, seu lineas atque denticulos quibus scapus est distinctus, modò negat eadem puncta in scapo esse, cum pro hypomochlio sunt.

VII. Manifestum ex Aristotelis verbis est ζυγὸν hoc problemate vsurpari pro trutina quacunque siue eius à centro longitudines fuerint æquales siue inæquales, dummodo vnum centrum fixum habuerit; phalanga autem esse illud ftateræ genus cuius pondus est fixum quidem, centrum autem non est idem, sed vagum.

VIII. Manifesta denique est solutio problematis: cum enim idem ab eadem vi impulsum eò velociùs feratur affixum termino lineæ circulum describentis, quò ipsa linea fuerit longior, & cùm in librâ centrum circuli sit punctum suspensionis; & in vecte hypomochlium; causa, cur magna suspendantur onera, erit quia centrum sumitur prope scapi illud caput à quo lanx pendet: ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO XLII.

VTrum antiquitùs, apud Hebræos maximè, fuerit vsus ftateræ *illius quam vulgus Romanam* appellat.

I. Villalpanda tom. 3. in Ezechielem pag. 349. & 350. repudiat istud ftateræ genus veluti *deceptionum* seminarium, ideoque quodammodo prohibitum fuisse contendit Hebræis, nullamque eius mentionem extare in sacris eorum codicibus, quod ipsum penè affirmat de Romanis antiquioribus. Ego verò licet libram eiusmodi vitiosam fore concluserim in corollario secundo vigesimæ primæ, si suspensio eius fieret proximè centrum mundi, nolim tamen videri assignasse causam eiuscemodi deceptionum, cùm inde nulla oriatur quæ sensu percipi queat, eò quod vt ibi dixi, portio circuli ex centro mundi descripti & scapus libræ rectus, iudicio sensûs, nihil discrepent. Ex dictis verò satis constat eiusmodi fallacias, si quæ sint, oriri ex vitio vel artificis, vel materiæ, & perinde posse esse communes alteri cuiuis librandi instrumento; constat præterea iam olim apud Græcos, & saltem ætate Vitruuij apud Romanos ftateram fuisse in vsu; nec Vitruuium de eâ vt recens inuectâ, aut nullo adhuc nomine insignitâ scribere.

II. Reliquum igitur est vt ostendamus sacras paginas illius meminisse. Egregius ad istud se offert locus Isai. 42. *quis librauit in pondere montes, & colles in statera?* vbi Dei potestas & sapientia ἀνθρωποπαθῶς describitur ex eo quod soleant homines maiora pondera trutinis *Romanis* librare, minora verò bilancibus. *Quis* inquit textus originalis *phalange* בפלס (acutè animaduertit Plantauitius Pausanus Episcopus Lodouiensis pag. 574. primi tomi ab Hebrææ voce פלס profectam fuisse græcam φάλαγξ) *montes* vt pote immensæ molis *pensitauit*, & *bilancibus* במאזנים *colles* instar leuiorum sarcinarum trutinauit? Ista enim vox Hæbraica ex origine & duali

numero trutinam duarum lancium, quasi duarum aurium sonat; vt *bisaurem* potius quàm *bilancem* eam dixerit sapientissimus sacræ linguæ Autor, quò ostenderet Iustitiam, (cuius symbolum est bilanx) duas aures in iudicando adhibere, vnamque ita præbere vni partium, vt alteri seruet alteram. Neque tantùm vocem פלס phalangem interpretor ex identitate radicalium literarum, & ex eo quòd trutinæ duarum lancium ad quam leuiora exiguntur, nulla alia meliùs opponi possit eâ quæ illarum altera saltem caret, & loco illius pondus aut centrum vagum habet trutinandis magnis oneribus opportunissimum: verùm etiam quia omnia passim onomastica tam Rabbinorum quàm Christianorum, præcipuè Pagnini, in eam significationem consentiunt.

III. Interpretes LXX, videntur omne dubium tollere dum priorem vocem vertunt ἐν σταθμῷ, posteriorem ἐν ζυγῷ. Cum propositione quadragesima prima ostenderimus τὸν σταθμὸν esse trutinæ illud genus quod vni lancium sustinenti onera examinanda opponit certum aliquod pondus, quod vel re ipsa, vt in statera Vitruuiana, vel δυνάμει, vt in phalange Aristotelica, sit vagum. Hoc ipsum indicat originis affinitas, vnde enim σταθμὸς græcè, inde *statera* latinè nimirum vt ait Eustathius à στάσει, ἵστησι γὰρ ἐν ἰσότητι τὰς ὁλκάς. Non modicum denique fauet versio vulgata, dum ἐν σταθμῷ reddidit *in pondere*: & *non in ponderibus*: iste enim trutinæ modus non habet nisi vnum pondus, quod vagando per puncta scapi amplissimas pensiones facit, & quod *æquilibrium* in suæ stateræ descriptione vocat Vitruuius; Aristoteles verò in sua phalange modò σφαίρωμα, modò τὸ σταθμὸν appellat; Isidorus autem prop. 41. antecedenti laudatus *pondus vagum* nominat. Neq; vllum mouere debet, quòd ἐν ζυγῷ verterit *in statera*: sicuti enim, vt memorata iam propositione diximus, vox græca σταθμὸς nunc latè, nunc specialiter sumitur teste Eustathio; ita & quæ ipsi latinè respondet *statera*.

IV. Hoc ipsum euenit aliis eiusmodi instrumenti nominibus; alioqui frigidè admodum interpreteris hunc Procli locum l. 2. in Euclidem p. 18. vbi hoc laudi Matheseos vertit quòd ζυγὰ καὶ τρυτάνας ἐδημιούργησεν, & alium Vitruuij l. 10. cap. 1. sub finem *trutinarum librarumque ponderibus examinatio reperta vindicat ab iniquitate iustis moribus vitam*. Aristoteles plurima eiusmodi passim habet vt ex adnotatis satis liquet, & ex eo quòd phalangis vocem ipsi ζυγῷ attribuat in fine cap. 1. Mechanicarum quæstionum: phalanx enim seu phalanga est teres fustis, indeque *phalangarij* sunt baiuli à phalangis quibus onera ponderáque ferunt, id maximè cauentes vt onus ex media phalanga pendeat, alioquin inæqualiter premunt sustinentes, vt rectè aduertit Vitruuius l. 10. c. 8. Cum igitur φάλαγξ sit teres fustis quo onera quasi librata transuehuntur, non est mirum quod modo pro scapo cuiuscunque libræ accipiatur, modò pro scapo *stateræ* pressè sumptæ, seu potiùs pro tota ipsa *staterâ*, quam primo aspectu fustem esse dixeris. Eustathius Iliad. B. pag. 149. nomen partis attrbui toti docet in aliis eiusdem significationis vocibus tribus τρυτάνη, φάλαγξ, ζυγὸς: propriè ζυγὸς est scapus,

pus, diciturque metaphoricè iugum eò quod illi lances vt iugo iuuencæ sint alligatæ: πλάστιγξ propriè est lancula cui onera imponuntur: τρυτάνη denique quid sit non explicat. Cornutus in saty. 1. Persij scribit trutinam esse foramen intra quod est lingua bilancis ad quod est examinatio; idem fortasse dici possit de τρυτάνη quod de trutina, ipsa enim vocum similitudo satis insinuat eiusdem illas esse significationis, vnamque ab altera esse profectam. Ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO XLIII.

CVius momenti sit libræ vsus ad discernendum quanta in integro opere sit portio argenti auro mista.

Vitruuius l. 9. cap. 3. agens de coronâ illâ Hieronis votiuâ cui Artifex, cum eam ex auro puro conflare debuisset, argentum admiscuerat, narrat furtum ab Archimede deprehensum fuisse hac ratione. *Duas, inquit, dicitur fecisse massas æquo pondere, quo etiam fuerat corona, vnam ex auro, alteram ex argento. Cum ita fecisset, vas amplum ad summa labra impleuit aquâ, in quo demisit argenteam massam; cuius quanta magnitudo in vase depressa est, tantùm aquæ effluxit. Ita exemptâ massâ quantò minus factum fuerat refudit, sextario mensus, vt eodem modo, quo prius fuerat, ad labra æquaretur. Ita ex eo inuenit quantum ad certum pondus argenti certa aquæ mensura responderet. Cum id expertus esset, tum auream massam similiter pleno vase demisit, & eâ exemptâ, eadem ratione mensurâ additâ, inuenit ex aquâ non tantum defluxisse, sed tantum minus, quantum minus magno corpore eodem pondere auri massa esset, quàm argenti. Postea verò repleto vase in eadem aquâ ipsâ coronâ demissâ, inuenit plus aquæ defluxisse in coronam quam in auream eodem pondere massam; & ita ex eo quod plus defluxerat aquæ in coronâ quàm in massa raciocinatus, deprehendit argenti in auro mixtionem, & manifestum furtum redemptoris.*

Ego ægrè admodum adducor vt credam ab Archimede exploratum hoc pacto fuisse eiectæ aquæ pondus. Primò quidem, quoniam illi non poterat perspecta non esse via istud inquirendi per libram; cùm theoremata quibus demonstratur istius modi methodus, ab illo ad nos profecta sint, vt ex dicendis patebit. Secundò quia ille modus à Vitruuio non tam ex propriâ quâ ex vulgi opinione expositus (non enim id de suo affirmat, sed ita *dici* testatur) valde remotus est ab eâ diligentia quam Mathesis sectatur. Non enim constare potest quandonam tantum aquæ infusum sit in vas plenum, vt amplius nihil capere possit; cùm quotidiano experimento doceamur, plures nummos in vas quod plenum putamus immitti, absque eò quòd quicquam aquæ efluat: quomodo ergo extractâ massâ tantundem aquæ refundi poterat, quantum exundarat? & quomodo ratio iniri poterat eius aquæ quam massa illa, dum ex vase eximebatur, sibi adhærescentem asportabat? Multò igitur probatior in hoc genere est libra, quâ venamur aquam ipsis nummis depressis respondentem, nec quod ipsis

adhæret liquoris diſpendium in ratiocinio iſto facimus, vt ex ſequentibus problematis manifeſtum erit.

PROBLEMA I.

PEr duas eiuſdem corporis non liquidi, & aquâ grauioris ſuſpenſiones, vnam in aëre, alteram in aquâ ipsâ factam, inueſtigare pondus aquæ quæ tantæ ſit magnitudinis, quantæ ipſum corpus ſuſpenſum: hæc autem eſt quam demerſum pondus in vas plenum expelleret.

Quoniam propter irregularem quorundam corporum compoſitionem non poteſt eorundem magnitudinis per geometriam certa proportio inueniri; & quoniam pretia quorundam quæ emuntur & venduntur, debent magnitudinibus ipſorum corporum proportionari, neceſſarium fuit, inquit Iordanus ſub finem opuſculi de ponderoſitate fol. 16. editionis Venetæ ſuprà laudatæ, *per ipſorum pondera corporum, eorum magnitudinum proportionem reperire, vt ſingulis magnitudinibus per proportiones ſuorum ponderum cognitis, valeant certa pretia ſociari. Primò igitur inſtrumenti per quod examinantur ponderum quantitates, ratio danda eſt. Eſt ergo examinis ponderum virgula recta, in cuius medio eſt foramen recipiens perpendiculum, cum quo ſuſtinetur virgula, cum ponderibus in extremitatibus ipſius appenſis, cum debet magnitudinis alicuius quantitas per menſuras ponderũ deprehendi &c.* Hæc ille emendatis Typographi erratis; quæ omnia perſpicua ſunt, & oſtendunt non vtilitates ſolùm alias huius ſuſpenſionis, verùm inſtrumentum etiam examinis cuiuſmodi ſit docent; virgula enim illa eſt librile tranſuerſum, quem ſcapum appellauit Vitruuius. Hoc verò addi debet, ſecundam ſuſpenſionem quæ fit in aquâ, ita intelligi debere, vt tàm ſcapus, quàm pondus ex aduerſo magnitudinis examinandæ appenſum, extent in aëre; ſolaque magnitudo vinculo quod in mole & grauitate cum aquâ conueniat, pendula mergatur: eiuſmodi autem ſunt pili equini ex Marino Gethaldo apud Cabæum Meteor. lib. 2. tex. 6. qu. 13. initio; his ita poſitis.

a

b . . . . c . . . d

Sit magnitudo a aquâ grauior, cuius in aëre libratæ pondus ſit b d, & in aquâ ſit b c: erit b c minus ipſo b d, per ea quæ Archimedes demonſtrat lib. 1. in 7. propoſitione de iis quæ vehuntur in aqua. Dico magnitudinis aqueæ ipſi a paris, pondus eſſe c d. Quoniam enim magnitudo a in humido leuiore merſa ſuſpenditur pondere b c, erit per 7. illam Archimedis, in eodem humido tantò leuior, quanta eſt grauitas humidi magnitudine æqualis: atqui illud, quanto eſt leuior, eſt pondus c d: ergo pondus c d eſt pondus magnitudinis aqueæ ipſi a paris. Si ergo ex pondere b d auferatur pondus b c, differentia c d erit pondus quæſitum; quod erat faciendum. Idem verò ſequetur ſi loco aquæ ponatur quiuis alius liquor ipſo graui a leuius; quod & in ſequentibus intelligi debet.

PROBLEMA II.

PEr duas eiuſdem corporis non liquidi, aquâ leuioris ſuſpenſiones, vnam in aëre, alteram in aquá modo infra præſcribendo factas, inueſtigare idipſum quod in priori propoſitum fuit.

b . . . e . . . g . . . . . d



Sit magnitudo a f aqua leuior, & ligetur vnà cum magnitudine c aqua grauiore, ita vt tota magnitudo a c ſit ipsâ aquâ grauior. Magnitudo igitur a f in aëre ſuſpendatur pondere d g; magnitudo verò ſola c in aqua ſuſpendatur pondere g b; ipſa autem compoſita magnitudo a f c in aqua æquiponderet ponderi e b: pondus b e erit minus pondere b g, per 5. Archimedis in libro laudato. Dico magnitudinis aqueę ipſi a f paris pondus eſſe d e conflatum ex g d, & ex differentia g e.

Quoniam magnitudo a f eſt aqua leuior, dēmiſſa in humidum vſque eò demergetur, vt tanta moles humidi quanta eſt partis demerſæ, eandem quam tota magnitudo a f, grauitatem habeat, ex demonſtratis ab Archimede propoſitione 5. Pars ergo demerſa ſit f: ergo aqua tanti ponderis, quanti eſt magnitudo f a, erit æqualis mole ipſi f. Rurſus quoniam compoſita magnitudo a f c in aquam proprio pondere merſa fuit, & eius pars a f eſt aqua leuior; tota magnitudo a f c ſurſum tanta vi feretur; quantò aqua, magnitudine par ipſi a f, grauior eſt ipſa magnitudine a f, per ſextam eiuſdem libri Archimedis: atqui moles aquæ ipſi a f æqualis & diſtributa in duas partes quarum vna ſit æqualis moli f, altera moli a, per grauitatem partis prioris eſt æquè grauis atque moles a f: ergo aqua tantæ molis quantæ eſt a f, ſuperat grauitatem magnitudinis a f, grauitate poſterioris partis, quam diximus magnitudine æqualem eſſe ipſi a: ergo leuitas qua a f ſurſùm fertur tanta eſt, quanta eſt grauitas molis a. Atqui leuitas qua a f ſurſum fertur, tanta eſt quantum eſt pondus e g; cùm tantò leuior effecta ſit magnitudo c, ex acceſſu magnitudinis a f: ergo d e grauitas compoſita ex grauitatibus g d, g e eſt grauitas molis aqueæ paris ipſi magnitudini a f. Si ergo ponderi g d inuento addatur e g differentia ponderum b e, b g inuentorum; habebitur pondus d e, quod inueſtigandum erat.

PROBLEMA III.

PRoportionem quam in grauitate habent duo dati liquores, poſitâ paritate magnitudinis, inuenire per ſuſpenſionem eiuſdem grauis non liquidi.

Sint duo liquores a & b; oporteatque inuenire eorum in grauitate proportionem, poſita æqualitate molis. Habeatur graue d non liquidum,

a. b.

d.

e...h..g....f

& grauius singulis liquoribus. Pondus magnitudinis d in aëre sit e f; in liquore a, sit e g, (quod vt in problemate primo ostensum fuit erit minus ipso e f) pondus eiusdem d, in liquore b suspensæ sit e h, (quod etiam erit minus ipso e f propter eandem causam.) Dico vt f g pondus ad pondus f h, ita esse grauitatem liquoris a ad grauitatem liquoris b, posita æqualitate eorundem liquorum in magnitudine. Quoniam enim pondus g f est per primum problema æquale ponderi liquoris a parem magnitudini d molem obtinenti; & pondus h f est etiam æquale ponderi liquoris b parem eidem magnitudini d molem obtinenti: ergo liquor a ponderis f g, & liquor b ponderis h f sunt magnitudine pares inter se, cùm sint pares vni tertiæ magnitudini d: ergo liquores a & b si pares sint magnitudine habent se inuicem in grauitate, vt f g, f h. Si ergo ponderis e f & ponderis e g sumatur differentia, inuentum erit pondus g f; & si ponderis eiusdem e f & ponderis e h sumatur differentia inuentum erit pondus h f: atque ita factum erit id, quod faciendum proponebatur.

PROBLEMA IV.

DAtâ maſsâ in quâ admixtio sit duorum metallorum in mole æquali inæqualiter ponderantium, inuenire quantum vniuscuiusque metalli commixtum sit nullâ massæ solutione factâ.

Habendæ sunt duæ aliæ massæ singulæ tantùm ponderantes quantùm data, quarum vna sit ex vno metallo puro; altera ex altero item puro. Præterea inueniendum est (quo autem pacto dicetur paulò post) quanti ponderis aquam qualibet trium massa excludat dum in eius locum succedit.

Massa igitur data sit s t mixta; pura & ponderosior sit m n; pura minus ponderosa sit p q. Præterea numerus partium aquæ æqualis ponderis & molis exclusarum à masſâ s t sit i l; numerus verò exclusarum à massa m n, sit a c; & denique numerus exclusarum à massa p q sit d h. His ita positis propositum sit inuenire quantum ex vnaquaque masſâ purâ sit in mixta s t.

Sit peractum id quod quæritur; sitque pars s u ex pura m n, & numerus partium aquæ expulsarum ab ipsa sit i x; sit verò pars u t ex pura p q: numerus igitur partium expulsarum ab ipsa erit x l. Quoniam massa m n in æquali mole ponitur ponderosior quàm p q, erit moles p q maior mole m n, cùm illi æquiponderet: moles autem s t erit maior quàm m n, minor verò quàm p q; cúmque vt se habent moles, ita se habeant aquæ expulsæ, erit aqua d h maior aqua a c, & aqua i l; ipsa autem i l erit maior aqua a c; cúmque aquas a c, d h, i l vniformes in mole & pondere (vt ponimus) communis mensura metiatur, erit numerus mensurarum quas aqua d h continet maior numero a c: numerus autem i l erit minor numero d h; maior verò numero a c.

Vt pondus partis ſ u ad pondus partis u t, ita fiat pondus p r ad r q & pondus m o ad m n. Quoniam maſſa p q ponitur vniformis in mole & pondere, ergo vt moles p r ad molem r q, ita pondus molis p r ad pondus molis r q: ſimilique ratione vt moles m o ad molem o n, ita erit pondus m o ad pondus o n; ponitur enim moles m n eſſe vniformis mole & grauitate. Ex numero a c abſcindatur a b æqualis numero i k, erit a b numerus minor numero a c; ſi enim eſſet vel æqualis vel maior, partes metalli m n ipſi reſpondentes vel æquè vel magis ponderarent quàm omnes m n, quod eſt contra hypotheſim: nam partes metalli puri m n quæ ſunt in mixta s t, minus ponderant quàm tota maſſa s t, & quàm m n ipſi s t æquiponderans. Numero k l fiat h f æqualis, quoniam i l eſt minor quam h d, erit k l ſeu h f numerus multò minor numero h d. Et quoniam a c eſt minor quam i l, ipſe verò i l minor quam h d, erit exceſſus quo numerus i l ſuperat numerum a c, minor exceſſu quo numerus d h ſuperat eundem a c. Sit ergo h g exceſſus quo numerus i l ſuperat numerum a c: ergo numerus g d eſt maior numero c a. Fiat g e ipſi c a æqualis; quoniam g h eſt exceſſus quo numerus i l ſuperat numerum a c ſeu e g: ergo numerus e h eſt æqualis numero i l.

Rurſus quoniam maſſa p q eſt vniformis; ergo vt moles p q ad r q, ita erit aqua d h, quam grauitate & mole vniformem eſſe ponimus, ad aquam f h (ſunt enim t u, r q mole & grauitate pares, ac proinde excludunt mole & grauitate pares aquas k l, f h) ergo diuidendo vt moles ſeu pondus p r ad molem ſeu pondus r q; ita erit moles ſeu pondus d f, ad molem ſeu pondus f h: ſed vt moles d f ad molem f h, ita eſt numerus d f ad numerum f h: ergo vt pondus p r ad pondus r q, ita eſt numerus d f ad numerum f h. Simili prorſus ratione oſtendetur vt pondus m o ad o n ita eſſe numerum a b ad b c: ſed vt pondus m o ad o n, ita eſt pondus p r ad r q: ergo vt numerus d f ad f h, ita eſt numerus a b ad b c.

Rurſus numero a c fiat i z æqualis; erunt ergo g h, z l æquales numeri, ac proinde cùm k l f h ſint tiam æquales, reſidui k z f d erunt etiam æquales: cúmque i z a c ſint æquales: & i k a b ſint etiā æquales ex conſtructione, erunt b c k z æquales: ergo tres numeri b c, f g, k z ſunt æquales, treſque reſidui a b, e f, i z ſunt etiam æquales.

a . . . . . . b c   m ——— o —— n

d . . . e . . . . . . f . . . . g . . h   p ———— r — q

i . . . . . . k . . . . z . . l   s ——— u —— t

Quoniam ergo vt numerus d f ad f h, ita eſt numerus a b ad b c vt oſtenſum fuit, ſiue ita eſt numerus e f ad f g: ergo alternando vt numerus d f ad e f, ita numerus f h ad f g: & per diuiſionem rationis vt numerus d f ad d e, ita eſt numerus f h ad g h: & alternando vt numerus d f ad f h, ita eſt numerus d e ad g h. Sed vt numerus d f ad f h, ita eſt pondus p r ad r q;

& vt pondus p r ad r q, ita est pondus s u ad u t: ergo vt numerus d e ad numerum g h, ita est pondus s u ad pondus u t.

Componetur autem hoc modo: ex noto numero i l auferatur notus a c, & habebitur numerus z l vel g h. Rursus ex noto numero d h auferatur notus e g seu a c: & habebuntur duo simul d e, g h: si ergo inuentus g h auferatur ex duobus simul d e, g h relinquetur d e. Inuenti ergo erunt numeri d e, g h ostendentes rationem ponderis s u ad pondus u t; quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Archimedes tantâ animi voluptate hoc inuento perculsus fuisse dicitur vt nudus balneo, in quo tunc casu lauabat, exiliens domum versus, identidem græcè clamaret εὕρηκα, εὕρηκα: istud narrant Vitruuius loco citato, & Plutarchus in opusculo contra Epicurum. Proclus in primum Euclidis pag. 18. edit. Heruagiana narrat Perionem ex hoc tam inopinato Archimedis inuento perhiberi dixisse ἀπὸ ταύτης τῆς ἡμέρας Ἀρχιμήδει λέγοντι πιστευτέον, in posterum Archimedi quiduis affirmanti fides erit adhibenda. *Addit verò eo loci Plutarchus à Pythagorâ bouem sacrificatum fuisse ob inuentionem cuiusdam propositionis mathematicæ, siue,* inquit, *illa fuerit,* basim trianguli rectanguli posse spatium æquale spatiis quæ duo reliqua latera possunt; *siue extiterit problema περὶ τοῦ χωρίου τῆς παραβολῆς*, de areâ parabolæ: *quibus verbis tetragonismum parabolæ adscribere videtur Pythagoræ; sed id, vt in prolegomenis tetragonismicis iam diximus, creditu perdifficile est; Archimedes siquidem huius se authorem profitetur ipso initio suæ quadrationis, testaturque vir sincerus & in veterum lectione versatus à nemine, quem ipse sciat, istud fuisse vnquam tentatum; quamuis non defuerint qui licet inutili operâ conati sint circulum & ellipsin quadrare.*

COROLLARIVM I.

Cabæus noster l. 2. Meteor. text. 25. qu. 4. pag. 150. 151. ad solutionem problematis mox proponendi, à se ideo adhibitam fuisse Algebram testatur; *quia*, inquit, *mihi hæc facillimâ visa est, & accommoda etiam iis qui Algebram ignorant*: ex demonstratis tamen longè facilior eruitur, vt ad libri pœnam cuilibet perspicuum fiet. Ponit argenti defæcatissimi massam ad istud destinatam expellere ex vase aquam cuius pondus sit 97. æris autem purissimi massam ad id similiter paratam expellere aquam cuius pondus sit 105. denique *monetam* datam & æquè ponderantem subire in locum aquæ, cuius pondus sit 99. Hoc posito proponitur inuestigandum, quantum argenti puri sit in numismate illo proposito. Istud arithmetica vulgaris longè facillimè conficit in hunc modum præscriptum in præsenti propositione. Differentia ponderum æris & argenti puri & grauioris ipso ære inuenitur esse 8. subductis 97. ex 105. differentia ponderum argenti puri & numismatis dati inuenitur eadem methodo esse 2. Si igitur numisma diuidatur in 8. partes, quot videlicet vnitates continet differentia primò inuenta, duæ illarum notatæ per differentiam secundò repertam

ſunt æris : ſex reliquæ ſunt argenti puri. Aliud ponit exemplum quo pondus aquæ ab argento puro eiectæ eſt 489. ab ære puro 561. à numiſmatis 495. quod ſoluitur eadem ratione. Nam differentia puri argenti & auri inuenitur 72. differentia verò argenti puri & numiſmatum eſt 6. Si igitur numiſmata diuidantur in 72. partes, ſex illarum ſunt æris, reliquæ 66. ſunt puri argenti. Periculum facit in tertia *quadam mixturâ in ære campano antiquo ex ære & ſtanno compoſito.* Pondus aquæ à ſtanni puri maſſa eiectæ eſt 113. ab ære puro & æquiponderante 146. à *campano ære* 142. differentia æris puri & ſtanni puri & ære ipſo grauioris eſt 33. differentia ſtanni puri & ęris campani eſt 29. Si igitur æs campanum diuidatur in 33. partes æquales, 29. ex illis ſunt æs purum : reliquæ 4. ſunt ſtannum purum. En tibi problematis facilem, breuémque ſolutionem, pro qua iſte Autor aliam via abſtruſiore, longioréque quæſiuit, quæſitámque Lectori dedit tanquam omnium, ſuo quidem iudicio facillimam. Cæterùm ſolutionem problematis de corona illa, Archimedis inuento nobilitatâ Q. Rhemnius Fannius Palæmon in fine libelli de ponderibus & menſuris expoſuit verſibus; quis verò Recentiorum Arithmetices præcepta ſcribentium non meminit illius? Peletarius non in Arithmeticâ ſolùm, ſed in Algebrâ etiam illud tractauit l. 1. c. 24. exemp. 11. Peletarium Cabæus in hoc ſecutus eſt; ſed Algebram aduocare vt via longior & ſpinoſior inde euadat, non puto operæ pretium; laudem tamen induſtria ſuam meretur. Porrò Archimedem vſurpaſſe iſtud genus ſuſpendendæ coronæ in aqua exiſtimarunt alij plures in quibus eſt Cabæus lib. 2. Meteor. ſuprà laudato p. 149. col. 1. vbi ait ſe non poſſe adduci vt aliter ſentiat de Archimedis accuratiſſima praxi.

COROLLARIVM II.

Ex demonſtratis in problemate tertio liquet, ſi idem graue ſuſpendatur in liquoribus inæqualis ponderis, ab exceſſu ponderum graui illi reſpondentium, peti differentiam grauitatis liquorum. Hinc igitur habemus viam experiundi vtra duarum aquarum ſit leuior; & ita fortaſſis conciliabuntur inter ſe contrariæ opinantium ſententiæ. Nam ex Antiquis Plinius cap. 3. lib. 31. ita ſcribit *leuitas illa deprehendi vix poteſt, nullo penè momento ponderis aquis inter ſe diſtantibus .... quidam ſtatera indicant de ſalubritate, fruſtante diligentiâ, quando perrarum eſt vt leuior ſit aqua.* Ex Recentioribus V. C. Sauot tertia parte de numiſmatis cap. 34. ſub finem, *ſuſpendi egomet*, inquit, *diuerſis tempeſtatibus, & locis, aquas pluuiales, fluuiaticas, fontanas, ciſternitias & puteales; ſed tam exiguo momento ponderis inter ſe diſcreparunt, vt diſcrimen potius procedere videretur ex vitio aliquo leui & occulto libræ, aut ex manûs vacillatione, quàm ex vlla grauitatis inæqualitate, cùm illud vix attigerit ad quingenteſimam ſuſpenſi partem; qua tamen leuior viſa eſt aqua pluuia, ſuſpenſa ſtatim atque è cœlo deciderat.* Villalpandus in Apparatu pag. 350. idem ferè ſentit de hoc experimento, *aqua*, inquit, *minimùm pondere variat, quippe cùm ego ipſe viginti aqua*

vncias ex diuersissimis aquis ponderauerim, vixque reppererim drachma vna à se inuicem distare. Cabæus loco supra laudato pag. 146. col. 1. parum discrepat ab illis duobus, *inter aquas,* inquit, *non reperio æquale pondus data paritate molis, & in* 100. *libris aquæ erit differentia* 1. 2. 3. *& plurium vnciarum.* Differentia suspensorum iuxta Sauot est vna quingentesima; iuxta Villalpandum vna octogesima; iuxta Cabæum vna, vel duæ, vel tres, vel paululò plures millesimæ ducentesimæ: vnde liquet eos vix discordare inter se, sed Plinio fauêre plurimùm. Attamen oppositam sententiam sequi videtur Hippocrates aphoris. 26. sect. 5. vbi aquam quæ citò calesit, & citò refrigeratur leuissimam esse definit, ὕδωρ τὸ ταχέως θερμαινόμενον, καὶ ταχέως ψυχόμενον, κουφότατον. Ad istum locum responderi posset cum Galeno pag. 290. edit. Basile. 1538. ἐν τῷ σταθμῷ κουφότερον εἶναι τὸ τοιοῦτον λεκτέον . . . ἀλλὰ κουφότερον εἶπεν νῦν τὸ μὴ βαρῦνον τὴν γαστέρα, καὶ διεξερχόμενον ταχέως ὕπαρ καὶ βαρὺ τὸ ἐναντίον αὐτῷ, τὸ μὴ διεξερχόμενον ταχέως. *Istud librâ non esse pensandum: sed id leuissimum dixisse hoc loco, quod non grauat stomachum, & egeritur citò; sicuti & graue dicitur quod è contrario non digeritur citò.* Ratio tamen Galeni non multùm cogit, quia, *inquit*, circuitione illa non fuisset vsus Hippocrates, sed directò ad libræ iudicium nos remisisset; nam illud κατάγιον libræ non ita est in promptu, vt videtur existimare Galenus. Sed demus Hippocratis locum facere illum sensum; quid dicemus ad inscriptionem illam antiquam apud Sauot ex Grutero; *Imp. Diocletianus C. Aug. hoc excauato saxo quæsitam aquam iugi profluuio scatentem inuenit Martiâ salubriorem, Tiberinâ leniorem curandis ægritudinibus, statera indicatum.* Vides apertè ex stateræ indicio leuiorem iudicatam fuisse istam Diocletiani aquam. Fortasse igitur qui aquam trutinando leuiorem repererint, accuratum illum & non vulgarem libræ vsum adhibuerint; qui vix ac ne vix quidem leuiorem inuenerint, illam, vt vulgò solet fieri, suspenderint. R. P. Zucchius hunc explorandi ponderis quo vna aqua excedit aliam annotauit in noua de Machinis Philosophia pag. 87. edit. Roman. 1649. vbi vir experientissimus videtur compertum habere vnam esse alia leuiorem; ita enim quæstionem absolutè proponit, *qua ratione grauitas aquæ, & quidem vnius supra aliam, facillimè & exactissimè deprehendatur.*

COROLLARIVM III.

Ex iisdem principiis quibus monstrata in præsenti propositione nituntur, peti debet causa experimenti cuiusdam celebris quod R. P. Maignan refert cursûs Philosophici tom. 4. cap. 16. prop. 3. à n. 8. pag. 1685. Illud autem, prout à nobis non semel captum fuit, ita se habet. Selige inter phialas vitreas communes vnam aliquam, ita collo angustam, vt cùm eam aqua penitus impleueris, & pollicem eius ori impegeris, eo illud planè obtures, & aqua digito compressa supereffluere nequeat: para prætereà aliam phialam vitream instar glandis vel nucis, cuius collum peranguisto foramine pateat; & circumligetur filo sustinente pondus aliquod aptum ad hoc vt istius phialulæ immissæ in aquam ipsum collum deorsum vi ponderis

ponderis vergat, & venter ampullæ sursum versus, aquis exeat. Phialulæ nomine intelligemus corpus compositum ex ipso vitro phialæ; ex perpendiculo quo ceruix eius prona tenetur, & ex aëre intra ventrem incluso; tria enim ista cùm colligata sint, mouentur simul, vt patet. Experti autem sumus. I. Istud pondus appendendum, eligi certa quadam ratione oportere: aliquando enim totam machinulam pertrahebat ad imum vasis, siue phialæ maioris; ac proinde minuendum erat; aliquando ita leue erat vt quantumlibet digito premeretur aqua vasis, non descenderet phialula; aliquando ita accommodatum prodibat, vt leui compressione aquæ eiusdem deprimeretur; fuit denique cum ita se haberet, vt mitteretur quidem deorsum, sed non nisi vehementi compressione. II. Dum pollice immisso in vasis, hoc est maioris phialæ osculum, premebatur aqua; perspicuè conspeximus in ventrem phialulæ ingredi aquæ aliquid; & dum laxata compressione assurgebat phialula, exire aquæ illud ipsum quod vi pressûs intrusum fuerat. III. Quando autem compressiuncula leui demittebatur, paululum aquæ admittere in ventrem deprehendebatur: & quando grauiori compressione opus erat, plus etiam aquæ trudi, & extrudi ex eodem ventre. Hinc factum est, vt cùm tres eiusmodi phialulæ in eodem vase simul natarent; vnâ compressione validiore tres simul descenderent; minus validâ, duæ tantùm, & vna supernataret; mediocri, vnica tantùm deprimeretur. IV. Hæc omnia experti fuimus, siue vas collocaretur osculo cœlum spectante, siue ad pauimentum inuerso, siue etiam ad latus & parietes. V. Accidit etiam istud mirabile, vt cum vnus astantium ex calami, quo scribimus, superiore parte spongiosâ, frustulum abscidisset, illique aciculam pro perpendiculo fixisset, perinde descenderet & ascenderet, atque phialula; pressâ, laxatâque vasis aquâ. VI. Experientia frequente constitit post aliquantum tempus ascendendo & descendendo impensum, phialulam quasi lassatam concidere, in imóque vase iacêre, nec assurgere pressu omni intermisso; extractam tamen inde & aëre nouo repletam, ad ludum pristinum redire.

Causa cur phialula descendat est, quod accessione aquæ pulsæ; corpus illud compactum ex vitrea ampullulæ substantiâ; ex perpendiculo adiuncto; ex aëre qui intra aluum machinulæ ante compressionem inclusus continebatur; & ex aqua intrò populsa (nam aër vt aduertit R. P. Maignan n. 10. pag. 1688. *non difficulter patitur se densari*, & ita densatus præbet locum intromissæ aquæ) si extra aquam lance pensaretur, eleuaret illam aquam, quæ locum illius corporis impleret, vel quæ paris esset molis illi machinulæ ex quadruplici illo corpore compactæ; illa verò eadem machinula semoto aquæ intrusæ pondere, eleuaretur ab eadem illa aqua paris magnitudinis. Locus phialulæ est vt patet vnus & idem, ante & post aduentum ingestæ aquæ; vnde fit vt eiusdem molis magnitudo extra aquam pensitata nunc esse leuior, nunc grauior debeat. Causa itaque cur natet est quia examine libræ extra aquam facto foret leuior eâ aquâ quæ necessa-

ria sit ad implendum totum machinulæ locum; ratio verò cur postea cadat deorsum, est quia postea foret grauior; ratio denique cur aliquando pendula hæreat vel in descendu, vel in ascensu, est quod eadem illa aqua eodem examine librata, neque grauior, neque leuior reperiretur machinulâ illâ ex quatuor corporibus composita. Quando loco phialulæ spongiosa substantia ponitur, causa submersionis & emersionis est eadem, vt patet; intruditur quippe aquæ aliquid in cauernulas substantiæ illius. Cur verò phialula tandem alternis ire & redire neget, ratio est quod aër inclusus, siue omnino corrumpatur, siue multùm, vt dicere solemus, *alteretur*, ita tandem debilitatur, vt non habeat vim dilatandi se, & expellendi aquam inditam, cum pollicis compressio cessat.

COROLLARIVM IV.

R. P. Maignan cap. 14. prop. 27. n. 2. pag. 1325. ita scribit *video communem esse in contrarium opinionem, quæ tenet grauia non grauitare in propriis sedibus; sed non satis video quo firmo argumento id sibi persuaserint Autores physici, si grauitare intelligant dicto meo sensu.* Ergo cùm agnoscat se contra communem, pro qua veritatis præsumptio stat, pugnare sententiam, validioribus sibi machinis aduersus illam opus esse intelligit; vnde istam quam modo descripsimus adhibet, cap. 17. prop. 3. n. 8. p. 1685. *eáque euidentius comprobari* contendit falsitatem communis illius sententiæ. Ratio verò inde petita hæc est, anser (ita vocat machinulam illam) grauitatem assumit vt descendat; deponit, vt ascendat; sed aquam solam assumit vt descendat, & deponit vt ascendat; ergo aqua grauitat in suo loco. Prima propositio negari potest; nam secunda est in confesso apud omnes, cùm accuratis experimentis constet. Sed ecce syllogismum qui rem demonstrare videtur: *illud corpus grauitat in aquis, cuius aduentu mergitur aliud, quod extabat iisdem aquis: atqui aduentu aquæ solius, anser antea enatans mergitur: ergo aqua grauitat in ipsis aquis.* Subtile, fateor, argumentum istud est, non tamen cogit, vt equidem reor. Hoc vt explicem, aduerto illum anserem componi ex quatuor corporibus, quorum vnum est aër, qui dum vitro inclusus mergitur, non grauitat; neque enim id omne quod deorsum rapitur, grauitare dicitur; ita si cucurbitam aère plenam appenso graui pondere demittas in maris fundum, non ideo grauitabit; sed potius descensui illi resistet per leuitatem suam. Non igitur id omne grauitat quod trahitur deorsum; sed id tantùm quod motum deorsum per se causat; non autem quod illi pro viribus repugnat, vel quod se habet ad illum indifferenter. Ponamus iniectum vna compressione esse tantum aquæ in ventrem anseris, vt nouem eius partes sufficerent ad illum deprimendum; ponamus quoque pondus aquæ esse ad olei in pari mole pondus, vt 10. ad 9. Si igitur cogitemus in locum aquæ intrò coniectæ succedere parem olei molem, adhuc anser (estò segniùs) descendet, oleo licet repugnante; ergo corpori natanti superuenit aliud corpus, quod ex se in aqua leuitat, & ex illius tamen ac-

cessione, corpus immergitur. Si igitur corpus quod adjicitur natanti remoueat tantùm illud quod impediebat ne motus deorsum produceretur à causa præexistente sed impedita; illud non dicetur *grauitare*; sed remouendo prohibens poterit vel *leuitare*, quamuis minùs, illo quod submouet; vel indifferenter se habere ad motum deorsum. Prima igitur syllogismi illius propositio est absolutè falsa, & vt vera euadat ita corrigi debet, *illud corpus, cuius accessione aliud antea extans, vndis mergitur; vel grauitat, vel submouet impedimentum, quo corpus cui aduenit, sponte sua descendere nequibat.* Qui autem censent partes aquæ sese nihil comprimere, ita vt si sentiendi vi præditæ forent, vna non sentiret onus alterius sibi superpositæ, dicent illud aquæ quod ingeritur in aluum anseris habere se indifferenter ad descensum; tollere tamen aduentu suo id quod impediebat ne substantia vitri apta per se grauitare in vndis, grauitaret de facto; impediebat autem aër intra aluum anseris nondum compressus alio corpore extra vndas grauiore.

PROPOSITIO XLIV.

BReuiarium præcipuarum rerum quæ in hoc libro tractatæ fuerunt.

I. Explicatur propositione prima & quarta quid Antiquiores velint esse centrum grauitatis, in quo Archimedis isorrhopica fundantur. Alicuius magnitudinis centrũ grauitatis posse esse extra ipsam magnitudinẽ ostenditur propositione secunda & tertia: vnde colligitur necessitas rectæ illius rigidæ; nempe vt ope illius possit graue è suo centro extrà posito pendêre: eam autem censeo subaudiri ab iis qui in tradenda definitione centri grauitatis mentionem illius non faciunt. Illud Archimedis pronuntiatum, *vnumquodque suspensorum ex quo puncto constitutum est, manet; cum in linea perpendiculari fuerit punctum suspensionis, & centrum grauitatis*, demonstratur propositione nona. Propositione vndecima ostenditur vnum aliud ab Archimede assumptum, cuius demonstratio non extabat; in propositione autem duodecima proponuntur dubia nonnulla aduersus postulata Archimedea; ea porrò dubia magnam partem à nobis cogitata sunt; nec enim vllum legimus, qui libram Archimedeam oppugnarit.

II. Libræ curuæ ab Archimedea diuersæ definitiones & postulata habentur sub finem duodecimæ; huius autem libræ æquilibrium fit grauibus pendentibus per lineas non parallelas, sed conuenientes in centrum; quæ duo libræ genera vulgò in vnam confunduntur, cùm longè diuersa esse ostendantur in decima tertia & sequentibus decem; in quarum decima octaua & decima nona monstratur in hoc libræ genere grauia suspensa esse etiam reciprocè vt brachia, quoties æquilibrium committitur: hoc ipsum in vniuersum tam pro Archimedea recta, quàm pro curua alia, demonstratur in vigesima. In corollario secundo vigesimæ primæ ostenditur libras omnes quas vulgò *Romanas* appellamus esse fallaces, si ad geo-

metricas rationes exigantur. In propositione vigesima tertia, ostendimus centrum grauitatis absolutè dictum non dari in omni magnitudine, comparata ad libram curuam.

III. Propositio vigesima quarta soluit tria dubia ex propositis in duodecima, nihil videlicet obstare certitudini principiorum Archimedeorum quod figuræ planæ careant grauitate, ac proinde suspendi nequeant; quod grauia non ferantur lineis parallelis; quod lineæ quibus grauia pendent, ponantur ἀβαρῆ; cùm tamen superficies ponantur graues; & quod à graui brachium libræ eodem modo grauari ponatur; siue graue breuiori, siue longiori linea pendeat; istud verò postremum in vigesima quinta propositione monstratur. Vigesima sexta soluit quartum dubium ex coaptatione figurarum petitum; sub cuius finem ad solutionem sexti dubij propositi in duodecima, ponuntur definitiones *loci asymptotici, & perpendiculi quietis*. In quatuor sequentibus propositionibus ea de hyperbola demonstrantur, ex quibus liquidò constat præter vulgi opinionem inter magnitudines non vndecunque clausas, dari quandam quæ maior sit omni finita data; dari etiam quæ sit æqualis figuræ, siue finito spatio; dari præterea maiorem quacunque data, cui certum & finitum pondus æquiponderet; dari quæ careat tam centro grauitatis, quàm perpendiculo quietis; dari quæ careat centro grauitatis, habeat tamen perpendiculum quietis; dari denique quæ centrum grauitatis obtineat. In quatuor postremis corollariis trigesimæ primæ occasione loci asymptoti proponuntur mirabilia quædam de hyperbola quam extrema styli vmbra in sciothericis describit motu solis diurno. Quod sub finem corollarij quinti scripsi de sectione tangentis cum linea meridiana, intellexi etiam de ea linea quæ in murorum planis efficitur à circulo maximo recto ad planum eiusdem muri, ducto per polos æquatoris. Propositione trigesima secunda soluitur quintum dubium ex centro grauitatis petitum, & sextum ex eo quod spatium finitum æquiponderat immenso. R. P. Maignan tom. 3. Cursûs Philosophici cap. 14. pag. 1309. propositionem sibi probandam præmittit his verbis, *quodlibet corpus graue habet in seipso centrum grauitatis suarum partium*. Certè si haberet *in seipso*, non esset necessaria illa, quam diximus linea connectens, & falsa forent quæ demonstrasse nos putamus. Cum autem Archimedes non demonstrarit, sed postularit dari illud centrum, neque nos suppleuerimus vllam ea de re demonstrationem geometricam; videndum est numquid inde subsidij petatur; quapropter transcribo illius verba. [Centrum, *inquit*, grauitatis in quouis graui voco cum Luca Valerio *illud punctum à quo suspensum graue per se manet, partibus quomodocunque circà constitutis*. Et tale punctum dico necessariò esse in omni graui: ratio autem est, quia quæcunque lineæ habent extrema, habent etiam medium; ergo cùm radij grauitatis (id est lineæ sumptæ non secundum longitudinem de qua nunc non agitur, sed secundum momenta grauitandi) quæ in quouis corpore, sunt quasi diametri ductæ ab vna par-

te circumferentiæ ad oppositam, ibidem habeant extrema; erit necessariò aliquod cuiusque medium secundum momenta grauitatis; ac proinde erit aliquod cuiusque in particulari punctum ex quo si suspenderetur haberet vtrinque momenta æqualia, id est, maneret in æquilibrio. Ac insuper si dictæ lineæ sunt æquales tum in longitudine tum in momentis grauitatis, aut etiam si sint vtrouis modo vel vtróque simul inæquales; facta hinc inde compensatione, vt manifestum est fieri posse, quatenus ei cui deest potest adjici ex eo quod alteri redundat: his inquam positis, consequens est esse vnum omnium dictarum linearum, seu totius grauis ex eis constantis centrum vnum commune grauitatis.] Hactenus vir eximiè doctus non in Philosophicis solùm sed in Mathematicis etiam; ac proinde nihil dubito quin ipse agnouerit probationem istam non esse inter mathematicas demonstrationes, sed summùm inter physicas verisimilitudines reponendam. Dum lineas sumi vult *non secundum longitudinem, sed secundum momenta grauitandi*, id equidem non ita interpretor, vt velit intelligi lineam sine longitudine, istud enim fieri nequit; cùm lineæ definitio includat *longitudinem* pro genere: existimo igitur eum velle sumi non quamcunque lineam, sed lineam grauem quà grauem. Peto igitur vtrum istam lineam velit esse mathematicam qualem illam describit Euclides *longitudinem sine latitudine*; an lineam physicam, id est gràcile longúmque corpusculum? Mathematicam, non respondebit; quia & illas lineas à structura solidorum rejicit, & quia graues re ipsa non forent, si adessent; & quia, quamuis adessent forentque graues, demonstrata de lineis in vniuersum, non continuò possunt ad solida transferri; nisi ratio specialis ita faciendi demonstretur. Omitto dicere illarum linearum bisectiones in plurimis corporibus, ex iis quorum forma *irregularis* vulgò dicitur, non posse cadere omnes in idem punctum, vt obuia geometriæ demonstratio probat. Dicet ergo à se intelligi virgulam vel bacillulum teretem. At hoc ipsum est quod demonstrari debet; videlicet in illo solido terete dari medium eiusmodi, nempe centrum grauitatis, siue *punctum à quo suspensum graue per se manet, partibus quomodocunque circà constitutis*; neque enim manifestum est tale medium dari, ex eo quod bacillus habeat vtrinque extrema: postea verò quàm istud demonstratum fuerit, facilè ex primo æquiponderantium Archimedis libro ostendetur totius ex illis bacillis compacti solidi dari centrum grauitatis.

IV. Demum in trigesima tertia soluitur vltimum dubium desumptum à labore intelligendi demonstrationes ex principiis libræ deriuatas. In propositionis istius progressu n. 4. Proclum in primum Euc. p. 12. edit. Heruag. ita reddidi, vt dicat *Geodæsiam non metiri per rectas lineas geometriæ proprias, & quæ in sola mente consistunt; sed per sensiles; vt per amußim & perpendiculum*; διὰ σπάρτων καὶ διὰ σάθμης. Licet enim verborum istorum græcorum varia possint afferri significata; non dubito tamen quin ille sit germanus Procli sensus; scio equidem vocem σάθμη ex Eustathio Iliad. ο. pag. 1028.

significare aliquando funiculum illum, quem Fabri materiarij & carpentarij rubrica aut atramento imbuunt, vt eo super materia tenso & eleuato describatur linea rubra vel atra, dum infligitur subiecto tigno; & in eo sensu accipi ab Homero. Altera eiusdem vocis significatio ab Antiquis vsurpata eodem teste, est *κάνων* vel *γνώμων regula vel norma:* dum autem dicit hanc significationem esse Antiquorum τῶν παλαιῶν, non vult dicere priorem alium significatum esse tantùm Recentiorum, cùm vt ipse ibidem monstrat, Homerus eo loci illum vsurpet: forsitan innuit illam vim vocis fuisse tunc exoletam. Tertia quoque ad rem geometricam spectans significatio eiusdem vocis apud Suidam, est illud *perpendiculum* è quo plumbum pendere solet; hanc apertè indicat is quem profert locus Poëtæ appellantis *στάθμην μολιβοχθέα plumbo-grauatam.* Itaque στάθμην non malè interpretati fuerimus *perpendiculum*; sed si ea voce malis ibi intelligi funiculum illum cuius ictu recta delineatur, non repugno; dum modo *στάθμην*, quæ vox multò generaliorem habet significandi vim, interpreteris *perpendiculum.* Hæc leuiora videri possent, nisi attinerent ad Geometricas voces, quas nusquam negligimus. Vnde istud etiam aduertimus ipsam vocem latinam *amussis*, sicuti & græcam *στάθμη*, significare modò funiculum illum, modo regulam & normam; ipsúmque vocabulum *linea* denotare apud probos Autores nunc funiculum illum, tintilem, nunc perpendiculum; quo sensu Tullius *ad lineam* dixit, quod alij *ad perpendiculum.*

V. Propositionibus 34. 35. 36. nonnullæ Iordani propositiones circa libram restituuntur, & quædam in illas adnotantur; illud verò in illis paradoxum iure censeatur, libram mathematicam, & omni vitio carentem, si ab æquilibrio dimoueatur vi aliqua externa, vbi sibi relicta fuerit, regredi ad æquilibrium: Propositione trigesima septima examinatur Villalpandi celebre experimentum in congio Farnesiano de lance suspendendo. Propositione trigesima octaua τὸ ζυγὸν apud Aristotelem in Mechanicis quid sit inquiritur, & ostenditur nec esse libra vt Leonicus vertit, nec ergata, vt Stephanus, nec iugum lyræ vt Budæus, sed speciale organum tympano illi Nonnarum, quod vulgò *tornum* dicunt, simile. In corollario ostenditur vtilitas geometriæ ad locos aliquot Scriptorum intelligendos, vt quo differant scuta à clypeis apud Liuium, & quid apud Anastasium Bibliothecarium sint spongiæ tres à Pontifice Gregorio II. Eudoni Duci missæ.

VI. Propositionibus 39. 40. 41. vectis, libræ, & circuli conuenientia ab Aristotele in Mechanicis relata exponitur: ad quod libræ genus spectet illa, quam ibidem appellat *φάλαγγα*, agitatur: lex illa reciproca ponderum & brachiorum libræ, Aristoteli cognita fuisse ostenditur, & noua quadam ratione demonstratur. Hanc adeo peruulgatam legem non fuisse legitimè probatam ab Archimede scripsit R. P. Ricciolus in noua de Machinis philosophia part. 2. sect. 4. & part. 3. sect. 2. fortasse ad id permotus fuerit quod nihil tunc cogitarit de principio illo *vnumquódque*

ſuſpenſorum ex quo punctò conſtitutum eſt, manet; cùm in linea perpendiculari fuerit punctum ſuſpenſionis, & centrum grauitatis; cùm tamen eo maximè nitatur illa demonſtratio Archimedea, ſicuti & ea quam ſuprà dedimus in propoſitione vigeſima. Speramus futurum vt Archimedeæ rationi acquieſcat cum illius principij probationem legerit in nona huius libri propoſitione, & cum principij eiuſdem vſurpandi methodum examinarit in propoſitionibus noſtris 18. 19. 20. Ratio verò illius reciprocæ legis phyſica quam ipſe profert in hypotheſi quæ re vera eſt, grauium ſcilicet ad idem centrum vergentium, nonnihil eneruari videtur per demonſtrata in corollario ſecundo vigeſimæ primæ; ibi enim oſtendimus legem illam *grauia inæqualia vtrinque pendentia tunc committunt æquilibrium, cùm reciprocè ſe habent vt recta brachia libræ* non conuenire iſti libræ, ſed Archimedeæ tantùm.

VII. propoſitione 42. oſtenditur contra Villalpandum libram quam *Romanam* dicimus, apud antiquos Romanos & Hæbræos fuiſſe in vſu: denique propoſitione vltima monſtramus methodum non vnam ex Archimedeis principiis examinandi pondera rerum per duas ſuuſpenſiones libræ, quarum vnâ res eadem pendeat in aëre, alterâ, mergatur in aquâ. Ex illis verò iiſdem principiis oſtendimus cauſam cur machinula mirabilis quam *anſerem* appellat R. P. Maignan in curſu philoſophico, modo ſubeat vndas, modo emergat ex illis, modo ſtet in medio itinere pendula pro arbitrio moderatoris: illo verò experimento non probari aquam *grauitare* in aqua ibidem demonſtramus.

VIII. Cæterùm quæ ad principiorum libræ elucidationem hoc libro ſcripſimus, ea nunc ſufficiant; ne ad quæſtiones phyſico-mathematicas ab iſorrhopicis dependentes tranſitum faciamus; id enim foret præter inſtitutum præſentis libri, & propè infinitum; cùm Recentiores quidam nec ignobiles Philoſophi in ſingulis penè cauſarum naturalium effectis explicandis ad *æquilibrium* confugiant. Sed de iis alius eſſe debet agendi locus; nempe is vbi quæſtionum magna pars magis diſceptatur, quam demonſtretur; quanquam & hoc ipſum, ſi rectè fiat, laudis & vtilitatis plurimum habere cenſemus. Quoniam enim phyſicarum rerum hæc eſt natura, vt obſcuriores ſæpe ſint, quàm vt mathematicè demonſtrari queant; non erit vlla eas contemplantis culpa, quod euidenti mentis luce illas non detegat; ſed ille ſummè laudandus, qui rationes excogitet quarum aliæ in obſucriſſimis aſſenſum auditoris rogent, vt ſimile quid in veteri agriculturæ prouerbio dicitur; aliæ in minus obſcuris exorent; aliæ deniq; in minimè nubiloſis, cogant. Cùm itaque Geometræ ſit non verſari niſi in iis quæ cogunt, conſultè abſtinuimus in duobus hiſce poſtremis libris à quæſtionibus phyſico-mathematicis, quæ ſe plurimæ offerebant; pauculas tamen propè inuiti attigimus propter ſummam quam habebant connexionem cum re mathematica quam tunc pertractabamus. At, inquies, in libro ſexto, cum ageretur de grauium accelerato deſcenſu, ea ſaltem ex Phyſice referri inter poſtulata non oportebat, quibus non ſtantibus,

reliqua corruunt: nam si tempus & spatium descensûs istius non componuntur ex partibus in infinitum diuiduis, euerti necesse est omnia ibi constituta. Respondeo primò istud nequaquam esse necessarium; neque enim propositionis hypotheticæ veritas corruit, ex eo quod res de facto non inuestiatur illâ hypothesi; ipso etenim meridie ista assertio est vera *si sol est sub horizonte, nox est*, de quo satis egimus supra in propositione vigesima quarta. Respondeo secundò illam quæstionis solutionem de compositione physica temporis & spatij hîc necessariam non iudicari ab iis quorum maximè interesse videtur, hoc est, qui tempus & spatium pernegant componi physicè posse nisi ex partium numero finito. Nam R. P. Maignan, qui inter illos vnus inprimis est, cap. 14. cursûs philos. prop. 30. in scholio, contendit contra R. P. Fabry, dogma Galilæi de acceleratione secundum numeros 1. 3 5. 7. 9. non corruere sublata physica spatij & temporis *diuisibilitate* in infinitum; imò optimè stare cum sententia quæ non nisi numero finitas physicas partes in tempore & spatio ponit. Sed hac lite inter duos istos Autores iniudicatâ, persto in prima responsione; cùm apertum sit id nihil officere veritati demonstratorum. Hac certè machina euerti pari successu possint Euclidis elementa; negando videlicet puncta, lineas, & superficies esse possibilia. Quòd si aliquid à nobis postulandum ibi fuerat, quis nobis succenseat quòd postulare ea maluerimus, quæ communi & receptissimâ Philosophorum sententiâ iamdiu in Academiis defenduntur, & quibus datis facilè intelligimus accelerationem illam secundum numeros impares 1. 3. 5. 7. fieri posse; sicuti de facto fieri contendunt Galilæus & Gassendus, quibuscum eo loci disputamus. Addimus denique neque à nobis absolutè postulari lineam esse in infinitum *diuisibilem* quocunque sensu; sed eo, *sine quo non consisterent Euclidis Elementa*; in hæc enim verba concepimus postulatum sub finem trigesimæ quintæ libri sexti.





APPENDIX PRIMA.

VBI RECIPROCA LIBRÆ CVRVÆ lex defenditur contra nonnulla, quæ Typographicâ libri septimi operâ iam nauatâ, opponi posse vidimus.

I. Eciprocam illam curuæ libræ legem quam in propositionibus 18.19.20. libri septimi demonstro, videri repugnare cum propositione quinta R. P. Mersenni in libro de Mechanicis, postea audiui quàm prælo mandatus & excusus erat liber ille huius Operis vltimus: quæ fuit causa vt attentiùs rem totam perpenderem; sed examine peracto, hæc fuit conclusio mea; *methodum nostram in librâ curuâ adhibitam non posse accusari, saluâ methodo quam Archimedes in rectâ vsurpauit.* Si quis enim propiùs rem nostram inspiciat, illam comperiet non esse nisi extensionem methodi Archimedeæ, eiúsque nos vestigiis diligenter insistere. Dubitare certè non possumus quin demonstratio nostra inconcussa debeat stare, si steterint postulata sub finem duodecimæ propositionis adscripta, in quibus illud est potissimum, *grauia æqualia vno sui tantum puncto terminis peripheriarum æqualium alligata, & liberè inde pendentia, nec vltra centrum porrecta, æqualiter inter se ponderare.* Quamuis ad legis illius demonstrationem nihil necesse est grauia illa in peripherias concentricas æquè dispersa, ex terminis peripheriæ centro grauium concentricæ pendêre ope linearum; sed satis est si committant æquilibrium, vbi eiusmodi peripheriarum bisectio fuerit collocata in extremis arcûs illius concentrici, qui vicem libræ sustinet, & suspenditur tantum ex puncto hinc & inde æqualiter distante ab extremis quibus grauia adhærent. Postulamus quidem sub finem vigesimæ secundæ, *grauia esse eiusdem ponderis liberè pendentia per lineas directionis*, sed ad alterius cuiusdam probationem eo egemus; non autem ad rem præsentem; de hoc tamen pôst agemus n. 14. Illud porrò principium propositione nona demonstratum, *vnumquodque suspensorum* &c. necessariò adhiberi debet in curuæ libræ demonstratione istâ, sicuti & in rectæ; vnde si quis contenderet illud esse verum in libra recta, falsum autem in curuâ, labefactaret sine dubio structuram nostræ demonstrationis: attamen ratio adducta in illa nona propositione

paribus vrget momentis pro curua & recta. Ista enim propositio, *si magnitudo aliqua grauis ex vno libræ ad horizontem parallelæ puncto semel pendeat; postea verò quàm fuerit in duas partes secta, singulæ pendeant immota ex singulis eiusdem libræ punctis; libra ipsa ex eodem illo primæ suspensionis puncto suspensa, & duas illas partes sustinens, manebit horizonti parallela*; ista inquam propositio ad demonstrationem illius legis reciprocæ necessaria, non aliter probatur, quàm *quod eadem magnitudo non fiat magis vel minus ponderans, nisi quia, quem ad libram ex eodem sui semper puncto suspensam situm semel habet, deinde mutat*: ergo quamdiu eundem situm retinebit, pari quoque linea directionis premet libram; ergo ita premendo illam, non mutabit priorem illius situm. Hæc verò ratio competit tota libræ curuæ, vt patet: non igitur potest Archimedea demonstratio firmis inniti fundamentis, quin illis ipsis par pro librâ curuâ theorema insistat.

II. Sed vt istud ampliùs declaremus, assumimus maioris perspicuitatis causâ casum vnum particularem; esto itaque (*Fig.* 113.) h b d u peripheria circuli centro i descripta, grauitate carens, & in ea sumptus sit arcus a h b c, qui sit ad totam peripheriam vt 10. ad 16. vel vt 5. ad 8. diuisusque sit bifariam in b: arcus a b, b c secti sint in arcus alios inter se æquales a h, h l, l m, m f, f b, b n, n g, g e, e d, d c; rursus singuli istorum secti sint bifariam in punctis 1. 2. 3. 4 5. 6. 7. 8. 9. 10. in quibus ponantur decem magnitudines inter se æquales, & in commune grauitatis centrum i vergentes innumeris nutibus; iisdem videlicet quibus tendant, si singulæ vno modo dispensentur in arcus a h, h l, l m &c. Ex postulato concesso ab aduersariis, si arcus a b c sustinens istas decem magnitudines suspendatur ex solo puncto b, non mutabit situm. Manebit quoque vt iacet, si intra arcum a b c grauitate destitutum intelligatur alius arcus æqualis, similis, similitérque positus, iste verò arcus sit loco sustentaculi fixi, quod connecti intelligatur punctis 1. 3. 5. b. 6. 8. 10. peripheriæ a b c sustinentis pondera pendentia liberè & pro nutu quæque suo: istud enim manifestum est. Sed neque minùs apertum est, si soluantur connexiones punctorum 1. 5. b. 6. 10. maneantque solæ duorum 3. 8. mansurum quoque vt iacet: quia videlicet partes ex 3. 8. suspensæ, solutis vinculis aliis, manent vt priùs collocatæ fuerant; ad quod *per accidens* se habet partium suspensarum æqualitas, dummodo maneant vt antea, & suspensio sustentaculi fiat ex eodem b. Ex eodem postulato sequitur si arcus h b c frangi intelligatur in e, (ita vt a e, e c partes non cohæreant, & vnâ motâ alia non debeat propterea trahi) & si a b c pendeat ex solo puncto sustentaculi quod congruit puncto f; arcum a b e cum suis ponderibus mansurum vt iacebat antea, quia vtrinque pari interuallo pendent quatuor magnitudines graues 1. 2. 3. 4. & 5. 6. 7. 8. Similiter si arcus e d c intelligatur suspendi ex sustentaculi puncto quod congruit puncto d, portio arcûs e d c manebit cum suis ponderibus sicuti ante diuisionem iacebat, nec vllatenus mouebitur. Hactenus conuenit inter omnes.

Ostendendum superest si sustentaculum ex puncto in quo est b, intelligatur suspendi, & ex illo vnico pendêre liberè, sustinendo arcus a e, e c onustos suis ponderibus, quorum octò pendent ex f, duo ex d; illud ita liberè pendens non mutaturum esse positionem; sed mansurum, vt antea iacebat; ac proinde vt est e b arcus ad b f, hoc est vt 4. ad 1. ita vicissim esse pondus pendens ex f ad pondus pendens ex d. Id verò patet ex eo quod illa magnitudo composita ex decem grauibus suspensa puncto b, & cohærens primo arcui a b c antequam diuideretur, diuisa postea fuit in duas partes cohærentes arcubus separatis a b e, e d c; quarum singulæ pendentes de punctis f, d, manent vt priùs iacebant; ergo habent eandem positionem ad punctum b, vnde pendent: ergo cùm sustentatæ librâ de puncto b suspensâ non mutent vim eleuandi sese mutuò nisi quia fiunt viciniores vel remotiores puncto b sustentanti; & cùm non fiant viciniores vel remotiores neutra pars fiet debilior, neutra fortior; ergo manebunt vt antea iacebant: vel si hoc non consequitur in isto genere libræ, negandum est cogere in Archimedea: ergo &c. quod erat demonstrandum, & quod clariùs patebit ex solutione nonnullorum quæ opponentur.

III. Ex demonstrandi ratione patet quod accuratè hîc inculcandum censeo, vt solutio obijciendorum liquidò constet; & vt obuiam eatur paralogismis, qui in hac materia facilè obrepunt in exercitatorum etiam cogitationes. Illud verò est demonstrationem ex Archimede nostram probare grauia a e, e c de libræ f b d punctis f, d suspensa committere æquilibrium eiusdem libræ ex b pendulæ; illa tamen grauia poni certo quodam modo dispersa & dispensata per curuas a b e, e d c, ita vt partes eorum singulæ suas habeant lineas directiònis non parallelas, emissas ad i centrum ex singulis arcuum punctis. Cogita vniuersam illam grauitatem, quæ ex arcu a e suspenditur, conferri in punctum f; vniuersam verò, quæ ex arcu e c, in punctum d: in hoc casu lineæ directionis vnius brachij erunt in vnam collectæ emissam ex puncto f; alterius verò brachij in alteram ex puncto d; dum verò ita colliguntur, mutant penitus directionis positionem priorem, qua fiebat vt sese secarent omnes; cùm hîc sibi mutuò congruant; non mutarent autem, si in priore situ fuissent parallelæ ad rectas f i, d i; vnde nec suspensæ magnitudines habuissent nisi duos directionis modos diuersos; hîc verò habent innumeros. Graue istud vocetur *dispersum* siue *distributum*; aliud dicatur *coactum* siue *collectum*. Si igitur partes illæ grauitatis non ponatur manêre dispersæ, nihil concluditur vi demonstrationis, vt patet: debet ergo ad effectum demonstrationis obtinendum suspendi graue distributum per innumeras directionis lineas, & manêre cùm iisdem directionis lineis, quando eius partes ex solis punctis f & d ponuntur suspendi; ille autem modus iam explicatus est, generaliúsque patet ex vigesima propositione libri vltimi. Atque hæc libra curua per hoc *essentialiter*, vt loquimur in Scholis, differt à rectâ, vel à compositâ ex duabus aut pluribus rectis, in quarum singulis rectæ directionis inter se æquidistant om-

nes, quamuis non æquidistent directionis rectis librarum non suarum. Quòd si inferas posse dispersa grauia in curuas a b e, e d c colligi in puncta f, d absque vllo æquilibrij & demonstrationis dispendio, gratis & ἀγεωμετρήτως istud colligis, nisi ex naturâ cuiusque generis libræ id demonstres. In librâ quidem Archimedeâ, cùm lineæ directionis omnes sint parallelæ, id verum esse vltro admittimus; at in libra curua sine demonstratione concedi non debet; immò est falsum, vt magis patebit ex subijciendis. Quæcunque igitur super æquilibrio curuæ libræ sustinentis grauia, sunt à nobis demonstrata in libro septimo, intelligi tantùm volumus de grauibus distributis, & non de collectis, vt pote mutantibus naturam libræ curuæ; idque necessariò subaudiri declaramus nunc, licet expresè ibi tunc non monuerimus: etenim demonstrationis vis nihil aliud euincit, vt iam diximus. Præterea aduertimus debere ita assumi quemlibet arcum a b c, & in eo ita dispensari grauia, vt collectio omnium premat punctum b ad i: si enim nihil vrgeat; arcus a b c nihil sustinet, nec fungitur munere libræ, ideóque nec libra appellari potest; poterit tamen si fixum punctum b, vnde arcus a c b suspenditur, prematur iuxta positionem aliarum directionis linearum, quæ à linea b i diuersæ fuerint; vt numero mox sequenti constabit ampliùs. Progredior iam ad ea quæ obstare videntur veritati demonstrationis nostræ.

IV. Primum quod opponi posse videtur est, si libra a b c sustinens ex punctis f, d duas illas magnitudines manet in æquilibrio, apertè hinc sequitur, graue ex d pendens propellere tantumdem punctum b ad i centrum commune per lineam b i, quantùm per eandem lineam impellit graue f: hoc enim est committi æquilibrium grauium duorum, nempe vnum tanta vi vrgere punctum suspensionis b, quanta aliud ex opposito vrget. Vnde etiam conficitur decem illas magnitudines ita dispensatas in decem partes, pari vi premere punctum b, & trahere ad i, quantum traherent omnes positæ in d. Atqui ista sunt manifestè falsa; non igitur committitur æquilibrium; sed latet aliquis paralogismus in nostra illa demonstratione.

V. Ostenditur autem facilè punctum b plus pelli versus i à puncto graui f, quàm à puncto graui d: graue enim d, cùm tendat in i per iter d i, non vrget punctum b nisi quantum obstat illi itineri; non obstat autem nisi per lineam rectam parallelam rectæ d i. Faciamus enim punctum b non esse fixum, & carere omni ῥοπῇ, sicuti & totum arcum b d, cui graue d cohærere ponitur: graue igitur d liberè pergens à puncto d ad i mouendo arcum b d cui inhæret, mouebit punctum b per rectam parallelam itineri d i; ergo quatenus b, quod fixum hæret, resistit sui lationi per illam parallelam, eatenus premitur à graui d: premitur igitur ad positionem solius d i, & nullatenus ad positionem rectæ b i. Hinc fit vt si ex arcûs h b d punctis h, d suspendantur grauia æqualia, non premant sustentaculū b versus i; sed vt ad positionem rectæ d i, æqualibus oppositísque viribus illud premant. Iam verò ponamus graue e ferri sponte & nutu suo ad i

per directionis lineam e i; si punctum b non esset fixum, dum graue e pergit ad i pelleret punctum b, cui per arcum b g e cohæret, per parallelam rectæ e i, fieretque simul & semel appropinquatio puncti b ad punctum i, & recessus eiusdem b à recta b i u: quà itaque fieret approximatio ad punctum i, si b non maneret fixum; eatenus b premitur versus i, à graui e, dum ob adhæsionem illam resistit potentiæ grauis e. Quia verò graue g tendit per g i ad i; & semita g i magis accedit ad situm rectæ b i, quàm accedat recta e i; fit vt graue g plus premat b versus i, quàm premat graue e; quamuis g, & e ponantur æqualia. Hinc clarè liquet graue vnum & idem ex puncto quouis arcûs b h suspensum numquam tantum grauare b versus i, quantum si collocetur in ipso b: graue igitur dispersum 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. ex f pendens non ita premit punctum f, vt premeret collectum. Atque hæc est proprietas curuæ libræ in qua nullæ sunt duæ lineæ directionis æquidistantes (nisi ita volueris appellare lineas h i, i d grauium ex diametro oppositorum) cùm in rectâ librâ pressus sit idem à graui collecto, qui à disperso.

VI. Ista quæ numero quinto iam demonstrata sunt, verissima esse fateor: sed nego inde quicquam fieri contra assertionem nostram: nego, inquam, ex nostra conclusione confici tantumdem pelli punctum b versus i à graui ex d pendente, quantum à graui ex f; nempe quia etiam pernego æquilibrium prout conuenit omnibus librarum generibus oriri ex eo quod punctum b, vnde libra pendet, æquè prematur & propellatur ad i per lineam b i: dicendum enim est procedere ex eo quod vires neutri partium sint sufficientes ad eleuandam oppositam, hoc est, ad longiùs remouendam illam à termino ad quem sponte vergit; eatenus enim tantùm pugnant, quatenus obsistunt suis vicissim propensionibus, siue, ῥοπαῖς. Aio itaque licet b inæqualiter prematur versus i à suspensis f & d; æquilibrium tamen ideo fieri, quia neque graue f potest longiùs à centro i promouere oppositum d; neque ipsum d potest quid simile in graue f: est ergo ἰσοπαλὲς requisitum vt eueniat æquilibrium. Ex demonstratis vero in illo n. 5 satis patet neque consequens esse, vt omnes decem partes graues æquè pellant punctum b ad punctum i, dispersæ atque collectæ.

VII. Alterum quod objici potest est propositio illa R. P. Mersenni quinta Mechanicorum; *vectis & libræ proprietas est, vt potentiæ quæ sunt in ratione linearum perpendicularium ductarum à centro vectis aut libræ super lineas directionis potentiarum, reciprocà; sint æquilibres; hoc est æqualiter trahant aut pellant.* Additur huiusce theorematis ea probatio, quæ me nunquam adegit ad assensum: ego illud ita demonstro. Esto (*Fig.* 114.) circulus d c r centro b descriptus, à quo educti vtcumque sint radij b d, b c, & ex punctis d, c emissæ tangentes d e, c e; intelligatur libra d b c infracta; cuius duo brachia d b, b c sint rigida, & firmissimo nexu colligata; in punctis verò d, c statuantur centra grauium æqualium vergentiū ad e. Aio si libra infracta d b c suspendatur vt iacet ex puncto b, indéque liberè pendêre permitta-

tur, ipsam permansuram esse in eodem situ, absque vllo sui motu; hanc verò libræ ita suspensæ quietem voco *æquilibrium*. Quoniam enim grauia d & c eandem prorsus positionem habent ad punctum suspensionis b (etenim anguli d b e, e b c, necnon d e b, c e b, & latera d b, b c sunt æqualia; itemque d e, e c) non apparet vel tenuis vmbra rationis cur graue d vires maiores habeat ad eleuandum graue c, & vicissim; ergo clarum est omnibus pensatis æqualitatem esse virium, ideóque mansura illa esse, vt iacent, immota; quod erat demonstrandum. Hoc ipsum perinde euidens est, si pro tangentibus d e, e c sumamus secantes d f, f c conuenientes in rectæ b e punctum quodlibet f diuersum à puncto e. Secundò brachia infractæ libræ d b g sint inæqualia, sitque b g minus; per d, centro b descriptus sit circulus d c r, sintque d e, e c tangentes; per g autem ducta sit g h æquidistans rectæ c e. Aio si d e, g h ponantur lineæ directionis, & graue g sit vicissim ad graue d, vt recta b g ad b d, fiatque suspensio ex solo b puncto, mansura grauia d, g vt iacent. Istud patet ex eo quod iuxta leges libræ rectæ, cùm g h, c e æquidistent, & cùm vt b c brachium ad b g ita vicissim sit pondus g ad d vel ad c illi æquale (quod in c poni iam volumus) pondus g in trahenda recta g b per lineam directionis g h æquales vires habeat atque pondus c in trahenda illa eadem recta b g per lineam directionis c e; sed pondus c habet vires æquas ad cohibendum pondus d ne ab eo eleuetur, hoc est remotius fiat à centro e; ergo pares vires habet pondus g; ergo pondera d, g, vt iacent, committunt æquilibrium; quod erat demonstrandum. Hoc ipsum perinde euidens est, si secantes d f, c f ponantur lineæ directionis, & rectæ c f ducta sit æquidistans g l, sintque d f, g l lineæ directionis; nempe pondus d esse ad pondus g, vt est perpendicularis ex b demissa in lineam directionis g l ad perpendicularem ex b demissam ad lineam directionis d f. Tertiò denique si anguli f b d, f b c fuerint inæquales, aio pondera ex d, c suspensa esse vicissim vt perpendiculares ex b demissas ad f c, f d. Priùs tamen monstrandum est lemmatium istud. Esto d b g (*Fig.* 114. eadem) planum suspensum ex b quolibet puncto, carens omni ῥοπῇ, in quo ponantur duo grauia d, c ita collocata, vt graue d nutum habeat ad positionem cuiuslibet rectæ d e, graue autem c ad positionem cuiuslibet c i; neutra verò rectarum d e, c i transeat per b; præterea siue nutus d e, c i æquidistent, siue non, grauia d, c ita sese mutuò cohibeant, vt planum non mutet situm quem ante ipsorum aduentum habebat. Patet si in eodem illo plano intelligantur rectæ d b, b c cohærentes, planum d b c non posse moueri à grauibus d, c retinentibus eosdem nutus, quin moueatur planum m b n, cùm sint vnum & idem. Patet quoque si rectæ m b, b n occurrant nutibus d e, c i in m, n, planum e m b n i, non motum iri ob eandem causam. Si igitur m b n ponatur libra infracta sustinens pondera d, c per lineas directionis m d, n c, ipsam vi ponderum moueri, nihil erit aliud, quàm planum e m b n i moueri vi eorundem ponderum; & si vi eorundem ponderum non possit moueri e d b c i, neque poterit pla-

num c m b n i. Hoc posito (quod sanè concedendum videtur sincero cuilibet veritatis Geometricæ indagatori) demonstratur assertum hoc pacto. Sit libra infracta m b n suspensa ex b, sustineatque ex m, n pondera d, c, quæ vicissim sint vt perpendiculares ex b in lineas m c, c n: aio libram infractam m b q mansuram vt iacet, si ex solo puncto b suspendatur. Perpendiculares sint d b, b q: ergo cùm pondus d sit ad pondus c, vt perpendicularis b q ad b d, si libra infracta ponatur d b q, planum e d b q i non mouebitur ab illis ponderibus, vt primo loco ostendimus; ergo cùm libra infracta d b n sit in eodem plano e d b n i, neque ipsa mouebitur suspensa ex eodem puncto b; ergo quomodocunque se habeant rectæ directionis d e, c i, si pondera d, c sint reciprocè vt perpendiculares ex b in rectas d e, c i demissæ, committetur æquilibrium libræ infractæ, quod erat demonstrandum. Si itaque perpendiculares ex b puncto suspensionis actæ in lineas directionis iam explicatas, vocentur brachia libræ, verum est in libra infracta non minus quàm in recta, *vt sunt pondera, ita vicißim esse brachia.*

VIII. Tria hic genera librarum distinguimus plurimùm diuersa, quamuis eadem reciprocationis proprietate prædita sint; nempe libram rectam, infractam, & curuam. Recta habet brachia in directum posita; infracta habet illa angulum constituentia; curua habet circuli arcus pro brachiis. Differunt autem maximè diuersitate linearum directionis: nam in recta omnes sunt parallelæ inter se; in infracta, omnes vnius ponderis partes suos exercent nutus per parallelas inter se; & omnes alterius æquè prementis ex opposito, per parallelas quoque inter se, quamuis parallelæ ponderis vnius cum parallelis alterius angulum constituant. At verò in libra curua omnes vtrinque directionis lineæ (quæ innumeræ necessariò sunt) vergunt ad vnum & idem punctum. Hæc porrò libra curua propiùs accedit, vt patet, ad proprietates grauium solidorum prout ea de facto suspenduntur à machinariis. Istam verò tam enucleatam explicationem trium librarum debemus dubitationi quæ emersit, & cuius tollendæ causa necessaria fuit. Vnum hic præteriri non debet libram videlicet infractam à Mersenno explicatam non constare nisi duobus brachiis, siue duabus directionis lineis, posse tamen intelligi libram, quæ constet longè plurimis. Vt si (*Fig.* 311.) arcui a h b c intelligas circumscribi figuram rectilineam decem laterum tangentium peripheriam in punctis 1. 2. 3. 4. &c. & in singula latera dispensari parem grauitatem æquabili & vniusmodi lege, ita vt partes grauitatis dispensatæ in singula latera habeant nutus parallelos radio ad tactum emisso. Si ista latera intelligantur firmo nexu colligari, fiatque compositæ lineæ suspensio ex b, & ponatur sustinere ex solis punctis f, d grauia colligata 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. ex puncto autem d grauia 9. 10. connexa inter se, & soluta ab aliorum octo nexu, æquilibrium committetur. Erret verò plurimùm quisquis putarit rationem & virtutem premendi istius libræ non esse diuersissimam à ratione & virtute qua premeret eadem grauitas dispensata in arcum a b c iuxta leges libræ cur-

uæ; aliud enim est grauia dispensata esse vtrobique eadem, aliud pari modo, paribúsque viribus premere suas libras. Vnde liquet iuxta nostram methodum assignari rationem ponderum vtrinque pendentium in libra infracta, etiam quando plura quàm duo habet latera, quoties nempe ea sunt æqualia, circumscripta vel inscripta circulo, comprehenduntur autem eo numero a b c, qui secetur bifariam in b; & ita in c, f, vt dimidium numeri e c sit æquale numero b f.

IX. Respondemus nunc tandem ad illud quod n. 7. obiectum fuerat; propositionem Mersennianam nihil prorsus obstare veritati nostræ propositionis: agit enim de libra infracta; nos verò de curua; id est, de ea cuius partes vno modo graues ad centrum commune vergunt innumeris lineis directionis.

X. Sed ecce in omni genere libræ ostenditur graue suspensum in f ad graue suspensum in d, illique æquiponderans, esse vt est (*fig. 113.*) recta d i ad f q, vel vt sinus arcûs b d ad sinum arcûs f b. Quoniam enim centrum grauitatis decem simul grauium est in recta b i; & quoniam partium duarum ex f & d suspensarum centra grauitatis sunt in rectis f i, d i; idem verò manet æquilibrium in quocunque puncto radiorum f i, i d collocentur eiusmodi centra; ergo si locentur in f, d, iungaturque recta f d occurrens rectæ b i in o; cùm centrum grauitatis duorum simul grauium f, d sit in recta f d connectente eorum grauitatis centra, & cùm sit etiam in recta b i, ipsum erit o: ergo vt o d recta o f, ita in triangulis similibus o d i, o f q sunt homologa latera d i, f q: ergo vt d i recta ad f q, ita est pondus f ad pondus d. Demonstratio verò est eadem in aliis casibus.

XI. Respondemus primò vim argumenti retorqueri posse in aduersarium. Quoniam enim æquilibrium perinde committetur si graue quod in d collocatum fuit, ponatur in B; id ita fiat, & esto B centrum grauitatis, iungaturque recta f B occurrens rectæ b i in p: punctum igitur p est centrum grauitatis magnitudinis compositæ ex duobus grauibus f, B: ergo vt recta p B ad p f, vel vt B i ad f q, ita est graue f ad d, vel ad B: sed vt idem graue f ad d vel ad B, ita etiam ostendimus esse rectam d i ad eandem f q: ergo d i, B i sunt æquales rectæ, totum & pars, quod est absurdum. Obiecta igitur ratio peccat in aliquo.

XII. Respondemus secundò illam perpetuo paralogismo laborare, dum ea quæ sunt libræ planæ attribuit curuæ. In libræ planæ principiis omnis magnitudo habet centrum grauitatis, at in libræ curuæ genere nullam scio præter sphæricam, quæ extra grauium commune centrum posita pendere possit ex vno puncto indifferenter in quocunque situ, quod tamen definitio centri grauitatis requirit: esto quælibet habeat centrum grauitatis *aptitudine proximâ*, punctum videlicet quod in centro grauium cõmuni statutum, verè fungitur munere centri grauitatis, & dat magnitudini *ἀδιαφορίαν* illam ad quemcunque situm. Præterea quod recta connectens *centra aptitudinalia* (ita loqui nunc liceat) duorum grauium in hoc genere

libræ

libræ curuæ, ita à totius centro *aptitudinali* diuidatur, vt ficut fufpenfa pondera ita fint viciffim portiones ipfius rectæ, eft proprietas libræ rectæ, quæ curuæ concedi non debet, nifi poftquam fuerit demonftrata: gratis igitur concluditur *vt o d recta ad o f, ita effe pondus f ad pondus d,* quamuis daremus punctum o effe illud *aptitudinale* centrum.

XIII. Refpondemus igitur vltimò nihil Geometricè contra nos demonftrari vi rationum n. 10. oppofitarum; cùm in illis plurima affumantur contra leges Geometricæ demonftrationis. Occafione illius paralogifmi, quo quæ funt libræ rectæ traducuntur ad curuam, moneo fimile peccatum commiffum iri ab eo qui grauitatis vniufmodi difpenfatæ per totum arcum ab e (*Fig.* 113.) fiue decem illorum fimul grauium centrum quod fuprà vocauimus *aptitudinale* putaret inueniri debere methodo, quam in vigefima prima quinti libri præfcripfimus, & qua euincitur iftud generale & rotúdè expreffum, *vt arcus a f e quicunq; femiperipheria circulari non maior fe habet ad fubtenfam a e, ita eft radius f i ad rectam i r, qua grauitatis centrum arcûs a f e diftat à centro i.* Illa enim methodus fundatur in libræ planæ principiis, in qua omnes partium nutus fiunt per parallelas: at in ifta curua fiunt per rectas conuenientes in idem centrum i. Præterire non poffum ifta quæ hoc in loco aduerfus noftra afferta objiciuntur, non cohærere fecum: fi enim ad æquilibrij rationem neceffe foret vt pondera vtrinque fufpenfa (*Fig.* 113.) premerent punctum b, vt obiectorum primo contenditur; non poffet libra f b d compacta ex rectis f b, b d ita pendêre ex b, vt immota fuftineret graue vnum ex f pendens per lineam directionis f i, alterum verò ex d per lineam directionis d i; nam graue in d pofitum non premeret punctum b. Atqui ex hac quæ objicitur Merfenni propofitione id fieri poteft, fi graue in f collocatum, fuerit ad graue in d pofitum, ficut eft b i finus anguli b i d, ad f q finum anguli b i f.

XIV. Reftat vnum quod quæri poffe video, vtrum fi graue difperfum collocaretur totum in r, ita vt per vnicam directionis lineam r i, omnes eius partes vergerent ad i; perinde premeret punctum f verfus i. Refpondemus fi poftulatum illud feruetur in curuâ librâ, *idem graue per eandem directionis lineam f i pariter trahere punctum b verfus i, fiue collocetur in b, fiue ab eo pendeat per lineam f r, partem radij f i*; dicendum effe magis premendum effe punctum b per totam grauitatem collectam in r, quàm per difperfam in 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. partibus: ratio eft quia fi poneretur tota in r, fingulæ partes premerent punctum b directò verfus i; at verò quando funt difperfæ premunt obliquè, ac proinde minùs potenter, vt fupra oftendimus n. 5. Quod fi quis nollet dare illud affumptum, malletque afferere graue idem in hac librà minùs premere punctum f in minori à centro i diftantiâ, quàm in maiore, poffet refpondere aliter: mihi tamen longè verifimilius eft retinendum effe illud poftulatum: Eo autem retento fi diametro b i defcribatur circulus b y i z, & ex arcu h b d per lineas directionis ad i porrectas transferatur ex arcu h b d fufpenfa grauitas in arcum byiz, idem

consequetur effectus libræ curuæ b y i z suspensæ ex b; eruntque vt brachia huius curuæ, ita reciprocè suspensa. Clariùs autem hoc posito dicetur, quæcunque sit curua b i y z cui grauitas arcûs h b d iam dicta ratione aptetur, vt sunt anguli qui ad i constituuntur, ita reciprocè esse pondera; quem loquendi modum iam sub finem duodecimæ septimi libri indicauimus. Præterea manente b y i z circulo, esto b z quadrans eiusmodi peripheriæ, & b y vncia eiusdem peripheriæ totius; ex y, z ducantur rectæ y b, z b, fiatque libra infracta y b z, sustinens ex y, z grauia committentia æquilibrium per lineas directionis y i, z i. Pondus igitur y erit ad pondus z per demonstrata n. 7. vt recta b z ad b y; hoc est, vt diameter quadrati ad latus eiusdem. At si arcui s z æqualis abscindatur z t, & ex arcu b y i resecetur b y x æqualis ipsi b z t, arcus x b s ad arcum s z t erit in hoc casu vt ternarius ad vnitatem, vel vt 180. gradus peripheriæ circuli b x i z, ad 60. gradus; hoc est, vt arcus b z ad b y. Ex principiis igitur libræ curuæ si per arcum x b t dispensetur æqua lege grauitas x b z tendens ad i per lineas directionis ex i emissas ad quodlibet peripheriæ x b t punctum; libra x b z de b suspensa, & arcubus x y s, s z t ex y, z pendentibus, atque vt iacent manentibus, committetur æquilibrium; ergo in hoc genere libræ, graue x y s pendens ex y ad graue s z t pendens ex z se habet vt ternarius ad vnitatem; in alio autem genere infractæ, graue ex y pendens ad pēdens ex z, se habet vt diameter quadrati ad latus eiusdem. Si igitur pondus libræ istius infractæ dispensetur per arcum x b s, pondus verò pendens ex z, per arcum s z t; libra non manebit in æquilibrio; sed inclinatio fiet ad partes z: ergo ex ista dispensandi ratione magis debilitatur pondus infractæ libræ ex y pendulum, quàm pondus ex z. In duplici grauitate ita dispensata per arcus x y s, s z t considerari & distingui debet primò ipsa in se grauitas seorsum spectata, secundò ipsius vires vt premat illa quidem punctum y ad i; ista punctum z ad idem i: grauitates in se spectatæ sunt vt ternarius ad vnitatem; vires premendi iam dictæ, sunt vt diameter quadrati ad latus eiusdem; quod diligenter notari oportet, vt natura libræ penitus inspiciatur, & ita vitentur mille sophismata. Præterea hoc moneo, si arcui t s abscindatur x π æqualis; quamuis si graue x π penderet ex libræ curuæ x b t puncto λ bifariam secante arcum x π, æquiponderaret magnitudini s z t ex z pendenti; postquam tamen non ampliùs pendet ex λ, sed ex y, non æquiponderat illi, licet non mutet situm; eiusque vires ex sola mutatione puncti suspensionis immutantur: sed hoc quoque verum esse comperies in libra Archimedea, si posueris lineam x b t esse rectam, & fiat libra pendens ex b, maneatque pariter diuisa.

XV. Ad ampliorem libræ Archimedeæ explicationem aduertimus in postulato illo, *cùm brachia vtrinque fuerint æqualia* (Fig. 100.) *c a, a c, & appensæ magnitudines aquè graues; si ad earum alterutram b aliud graue adiiciatur, inclinari libram ad partes adiecti ponderis*, istam inclinationem ita intelligi à nobis, vt linea directionis b h maneat eadem, & in illa etiam maneat graue

appenſum ; vnde fit vt cùm libra [illegible] anı a b inclinatum fuerit in a i, ſi ex a i auferatur a g ipſi a b æqualis, [illegible]enſio progreſſu temporis mutata fuerit à puncto g ad i, ita vt graue in illo ſitu, iaceat in libræ a g puncto i. Hic rem concipiendi modus videtur ſimplicior, minuſque obnoxius errori, & paralogiſmis; quàm ſi conciperemus eiuſdem grauis lineam directionis fieri viciniorem perpendiculo ex a demiſſo; quod tamen in vulgaribus mercatorum bilancibus vſu quotidiano euenit. Cauendum verò imprimis cenſeo ne quis ita libram fingat, vt ex ſe inepta ſit ad inclinationem, accedente vel minimo graui: ſi quis verbi gratia poneret libram c b ſuſpendi ex a immobili; grauia verò vtrinque æqualia ex brachiorum c a, a b æqualium extremis pendêre, nec poſſe diuelli à punctis c, b, lineaſque directionis c d, b h eſſe quoque immobiles; in hac hypotheſi c a b non eſſet vertibilis circa a, quocunque aduentu ponderis; quia videlicet quæcunque alia libræ inclinatæ portio a i eſt maior portione a g vel ab: hæc igitur conſtructio libræ eſt ineptiſſima. Porrò hæc ipſa cautio eſt adhibenda in libra curua; ſi quis enim velit arcum (*Fig*. 113.) f b n ſuſpendi ex b; & ex f, n pendêre grauia ad æquilibrium apta; velit tamen in inclinatione libræ, punctum b hærere immobile, & brachij b f punctum f colligatum manere cum graui f, & graue f quamdiu mouetur, perſiſtere in linea directionis f i; conſtruit libram indeclinabilem, & minimè libram. Sicuti igitur in ſuperiore caſu aliud & aliud libræ punctum reſpondet lineæ directionis, ita in iſto: hocque tantùm eſt diſcriminis, quòd in libra recta punctum illud libræ vſque & vſque remotius euadit à puncto vnde ſuſpenditur libra; at in curua poteſt eſſe propinquius. Sed caſum libræ ex aduentu grauis conſequi debere ſatis eſt ad veritatem demonſtrationum iſorrhopicarum, quomodocunque tandem à Phyſico definiatur modus ille cadentis brachij; dummodo libra ita conſtruatur, vt nihil impediat proximam eius diſpoſitionem ad cadendum ex acceſſione vel minimi grauis.

XVI. Atque ex his omnibus ſatis liquet à methodo Archimedea me non deflexiſſe, niſi certè ille deflexus percipi nequeat niſi lyncea mentis acie, quod aliis inquirendum relinquo, paratus interim doceri; experientia enim frequente didici hominem me eſſe, etiam vbi non niſi demonſtrationibus agere mihi videor. Hoc autem quod n. 3. ſcripſi, hîc iterum mihi deſcribendum eſſe cenſeo, in propoſitionibus libræ curuæ, quam libro ſeptimo tractaui, me non agere niſi de magnitudine diſperſa, & tendente innumeris lineis directionis ad centrum commune grauium; quamuis illi non aſſignem niſi vnum punctum vnde pendeat per lineam directionis illam videlicet in qua eſt punctum è quo vno magnitudo illa diſperſa ſi penderet, quieſceret immota. Si quid verò lectori fortè occurret ibi, quod cum iam explicatis non ita aptè cohærere videatur; huc reduci debet, vel certè iuxta hoc reformari.

XVII. In ſeptimi libri iam laudati propoſitionis quadrageſimæ co-

rollario secundo ostendi alia methodo reciprocæ libræ legem; illa tamen methodus assumit (*Fig.* 103.) possibile esse graue g, quod paribus quibuslibet temporibus per arcum b u d sponte sua latum interualla vsque decurrat æqualia illis quæ percurrerit magnitudo c per se mota. Istud cùm non demonstretur ita esse, Archimedeam demonstrationem illi semper anteculi, quod in eiusdem propositionis corollario tertio satis indico. Principium autem illud esse verum in libra recta patet ex demonstratione legis illius reciprocæ Archimedeâ; esse autem falsum in librâ curuâ, liquet ex demonstratis nostris. Quamuis autem pondera in curuæ libræ arcu, si æstimentur secundum vires premendi quas habent, non sint vicissim vt brachia, sed vt sinus arcuum ex n. 14. id satis est ad hoc vt certum sit in libræ curuæ casu, non posse dari pondus g, quod paribus temporis partibus, spatij partes percurrat pares illis quas decurrit pondus c.

XVIII. Antea quam dimittamus libram proponimus causam quæ nunc nobis occurrit, cur Aristoteles pronuntiarit phalangem esse vectem inuersum; illam, inquam, qua exigui appendiculi ope magna onera suspendebantur in macello, sicuti narratum extat prop. 42. libri postremi. Pone (*Fig.* 104.) phalangem b a suspendi ex f, & carnem h in lance e prægrauem eleuare appendiculum a; hoc enim exigit lex emptionis & venditionis quæ fit per libram: ergo dum carnes appensæ deprimentur eleuabitur sursum versus phalangis b a pars longior f a: proinde cùm vectem imitetur virga a b, & hypomochlij vice sit f; longior phalangis pars f a repræsentabit portionem illam vectis cui admouetur virtus vectiarij: cùm ergo portio illa longior sursum attollatur in magnâ carnium copiâ per phalangem diuendendâ, & cùm in vecte inuerso eadem pars sursum pellatur à vectiario patet ratio verisimilis cur phalangem omnem dixerit Aristoteles quodammodo (vt interpretor) esse *vectem inuersum*.

XIX. Experientissimus Mersennus, quem nunc præ manibus habeo, docet me vnum de reciproco motæ libræ itu & reditu, quod hîc referre debeo. *Iugum* (inquit cap. 13. Reflex.) *bilancis, cuius pars vtraque bes pedis, è linea horizontali depressum, horâ dimidiâ vibratur; ita vt qualibet vibratio duret duo secunda & paulò amplius*. Huius experimenti causa, alia esse debet ab ea quam pro simili effectu in libra Archimedea demonstrauimus cum Iordano prop. 34. libri vltimi; Ostendimus enim in prop. 36. eiusmodi causam cessare in librâ cuius *fondi* sunt ad centrum grauium, ac consequenter in illo quæ allato experimento subjicitur. Causa itaque aliunde peti debet à perito Physico-mathematico; vt, ex eo quod totius illius machinulæ ex lance vtraque, iugo, & funiculis compactæ centrum grauitatis fuerit infra punctum, cui ipsa machinula nitebatur pendula: sicuti si chartaceum, aut ex eiusmodi materiâ aliâ triangulum isosceles vertice suspendas, ita vt basis connectens latera æqualia æquidistet horizonti; deinde verò basim ab horizontali situ dimoueas, sinasque triangulum suo nutu sese mouere, vibrationes hinc inde conficiet non paucas; de quibus nonnulla contem-

platione digna accuratè annotauit idem Mersennus lib. Reflex. cap. 12. & cap. 19. vbi tandem pag. 158. ingenuè fatetur *nullum esse funependulum quod exactè, vel secunda, vel quodlibet aliud tempus aquare possit suis vibrationibus, cùm sint inaquales . . . quanquam tempuscula vibratiunculis illis explicata tam parùm inter se discrepent, vt in praxi pro iisdem sumi possint.* De hoc verò *funependulo*, vel vt alij appellant, *perpendiculo* agit sæpius eo libro, vt cap. 9. 10. 11. & pag. 17. Plurima etiam obseruata leges in eodem Reflexionum libro de grauium casu accelerato cap. 9. 15. 16. & vltimo pag. 91. Paginâ verò 135. fatetur nullâ demonstratione euinci Galilæi eâ de re sententiam; *quemadmodum*, inquit, *neque rationes quæ hactenus allatæ sunt in gratiam vtriusque motûs terræ, quicquam demonstrant, vt optimè annotauit Aristarchi Commentator.* Is est D. Roberuallius, cuius hæc sunt verba in dedicatoriâ libri epistolâ; *nec illud constat quidem an ex tribus Autorum ipsorum celeberrimorum diuersis systematis, aliquod verum sit, ac genuinum Mundi systema: forsan etiam omnia tria falsa sunt, & verum ignoratur.* Non tamen puto eum velle addubitari an ea simul falsa sint, quatenus hinc affirmant tellurem immotam stare, inde contendunt non stare; vtrumque enim horum falsum simul esse nequit; sed illud falsum esse constat quod Galilæus Romæ conceptis verbis, relatis à Ricciolo tom. 2. pag. 499. publicè abiurauit anno 1643. die 22. Iunij. Vult igitur dicere cùm in singulis systematis multæ astruantur conclusiones, nullum fortasse esse, cuius omnes assertiones sint veræ. Redeo ad iugorum libræ *vibrationes* vel *reciprocationes*, vel vt alij loqui malunt *oscillationes* illas; vt addam neque hoc experimentum conferre quicquam mihi videri ad explicandam libræ Villalpandi eleuationem illam quam in propositione 37. dedimus Sauotio: nam si hæc fuisset causa eleuationis, statim visa fuisset libra deprimi in oppositam partem, idque obseruassent omnes qui aderant, nec Villalpandus ipse narrare omisisset. Cæterùm quamuis libra, qua vtimur in praxi, non sit reipsa Archimedea; attamen pro Archimedeâ sumitur absque vllo sensilis erroris periculo, ob summã à centro ad quod lineæ directionis vergunt distantiam; vnde fit vt sensuum iudicio parallelæ æstimentur; quod iam monueramus in corollario secundo vigesimæ primæ vltimi libri.



APPENDIX SECVNDA.

In cuius priore parte potissimùm inuenitur recta æqualis perimetro tam spirali quàm parabolicæ, ex datâ hyperbolæ quadraturâ. In posteriore proponitur imprimis quadratura Nicomedeæ conchoideos ex datâ hyperbolæ & circuli quadraturâ : item figuræ cuiuscunque super quauis curuâ inclinatæ, genitæque ex erectâ datâ.



VOD olim fecit Conon ille apud Archimedem laudatißimus, cum aliquot reconditæ tunc Geometriæ theorematum à se primùm repertorum nudam propositionem ad Amicos priuatim misit demonstratione penes se preßâ; fortasse quia (quod sæpe euenit) illam è mentis arcano in aduersaria nondum transtulerat: hoc ipsum alter seculi nostri Conon D. de Fermat cùm sæpe aliàs, tum nuperrimè de argumento summè arduo præstitit. Postremas ego istas propositiones, quoniam mirificè illustrant ea quæ de quadratricibus vngularibus in quinto, & de spiralibus lineis in sexto libro scripsi, huic operi attexere (quod singulari eius modestiæ inopinatum profectò accidet) non dubito: fieri enim nequit quin iis inspectis, quilibet alius meis ausis faueat, & de publicâ hac ad Geometrica inuenta acceßione non summopere gaudeat. Ista si pro meis euulgare decreuissem; Vir quidem modestißimus, qui non sibi sed Geometriæ famam quærit, æquißimo rem tulisset animo: id tamen alienißimum à me semper fuit; nec existimo Geometræ grauius quicquam obyci posse, quàm quod alicui exprobari aliquando audiui, totus nos es tuus, totus es alienus; & hac ipsa ratione qua Geometra es,

Caluus cum fueris, eris comatus.

Hunc autem iamdiu esse morem Viro Clariß. vt sua per Amicorum manus Geometrica tacitè spargat, luculenter testatur R.P. Mersenn. prop. 47. Hydr. pag 193. tacco, *inquit*, varios illos περὶ ἐπαφῶν; de maximis, & minimis; de tangentibus; de locis planis; solidis; & ad sphæram; quos clariss. Senator Tolosanus D. Fermatius huc ad nos misit. *Plura alia eius inuenta commemorat in præfat. ad Mechanica n. 4. in Ballisticis pag. 57. in Analysi pag. 385. Hinc factum est vt in ore summorum etiam in Italia Geometrarum Torricelly & Caualery semper fuerit, quod testatur doctißimus Bullialdus in præfatione opusculi* de Porismatibus. *Cæterùm non res tantum, sed verba etiam ipsa sunt integerrimi Senatoris; quibus omnibus de meo adycio in posteriore parte innumeras curuilinearum figurarum, in quibus est Nicomedea conchoides, quadraturas: quæ omnia si vera esse comprobabuntur, ex totâ ista appendice confirmabitur illud, quod quidam dixit;* hac tempestate in Geometricis, inuentum & superatum fœliciter esse Bonæ spei promontrium illud, vnde

expedita existat nauigatio, ad inaccessas antè tetragonismorum præsertim regiones.

PARS PRIOR.

I. Sit (*Fig.* 105.) parabole b a d, cuius axis a c, applicata b c, rectum latus a e: quæritur ratio curuæ a b ad rectam b c.

Esto hyperbola m l o, cuius centrum g, transuersum latus f l æquale rectæ a e, quæ est rectum datæ parabolæ latus: axis hyperbolæ sit l n; rectum verò illius latus sit æquale lateri transuerso, vt nempe rectangulum quoduis f n l sit æquale quadrato applicatæ m n. Ad punctum g excitetur perpendicularis g h æqualis rectæ b c in parabola. Deinde ductis rectis h m, & l i, ipsis g n & g h parallelis, per punctum m in quo recta h m occurrit hyperbolæ ducatur applicata m n.

Aio quadrilaterum m h g l, cuius tria latera sunt rectæ m h, h g, g l, quartum verò latus curua hyperbolæ m l, esse ad rectangulum i g, vt curua parabolica a b est ad rectam b c.

II. Data sit (*Fig.*106.) parabole b a d, cuius axis a c, applicata b c, rectum latus a e. Circa applicatam b c voluatur spatium parabolicum b a c. Quæritur dimensio superficiei curuæ illius solidi.

Exponatur hyperbole m h, cuius axis h i, transuersum latus h f æquale quartæ parti lateris recti paraboles, siue rectæ a e; rectum verò illius hyperbolæ latus sit æquale transuerso, vt nempe rectangulum quoduis f i h sit æquale quadrato applicatæ i m. Fiat recta h i æqualis rectæ a c axi paraboles, & ducatur applicata i m. A rectangulo sub c a in curuam parabolicam b a, auferatur spatium hyperbolicum i m h; reliquum quadretur. Diagonia illius quadrati erit radius circuli superficiei curuæ solidi quod fit à rotatione spatij a b c, circa applicatam b c.

III. Sit semiparabola quæuis a c (*Fig.* 107.) cuius vertex a, axis a b. Ab ea curua formentur aliæ curuæ infinitæ, vt a f, a e, a d &c. Ita autem formantur, in curua a f applicata b f est æqualis curuæ parabolicæ c a; & sumpto similiter quouis puncto n, à quo ducatur applicata n p, applicata n p est etiam æqualis curuæ parabolicæ a o. In curua e a applicata e b æquatur curuæ secundi gradûs f a, & illius applicata q n æquatur portioni secundi gradûs, p a. Item in curua a d applicata b d æquatur curuæ tertij gradus e a; applicata verò n r, portioni eiusdem curuæ tertij gradûs q a, & sic in infinitum.

Aio omnes huiusmodi in infinitum curuas rationem habere datam ad parabolas primarias, hoc est, simplices: enuntiari quippe potest generale theorema hoc pacto. Continuetur parabole primaria a c in infinitum per puncta v. g. m, l, k, & illius axis similiter ad puncta quotlibet g, h, i producatur: fiant rectæ b g, g h, h i singulæ æquales axi a b, & ducantur applicatæ g m, h l, i k. Curua parabolica a m est ad curuam secundi gradûs a f, vt applicata g m ad applicatam b c. Curua parabolica a l est ad cur-

uam tertij gradûs a e, vt recta h l ad b c rectam. Curua parabolica a k est ad curuam quarti gradûs a d, vt applicata k i ad rectam b c, & sic in infinitum.

Si verò intelligantur a m g, a f b circa applicatas g m, b f rotari, superficies curua ex rotatione spatij a m g circa rectam g m, erit ad superficiem ex rotatione spatij a f b circa rectam b f, vt cubus rectæ g m, ad cubum rectæ b c. Similiter superficies curua ex rotatione spatij a l h circa h l erit ad superficiem curuam ex rotatione spatij a e b circa rectam b e, vt cubus rectæ h l ad cubum rectæ b c; & sic in infinitum.

IV. Esto figura semicycloides b a (*Fig.* 108. 109.) à qua formetur alia curua d a ea conditione vt applicatæ b c, c d; f o, eo sint inter se semper in eadem ratione data. Demonstrarunt Geometræ semicycloidem b a esse duplam rectæ a c, quæ est diameter circuli cycloidem producentis. Quæritur relatio curuarum a d ad alias lineas aut curuas, aut rectas.

Ita autem generaliter definimus: si hæ nouæ curuæ sint intra cycloidem & diametrum circuli generantis, vt contingit in figura 107. omnes hæ curuæ a d, earúmq; portiones erunt æquales curuis parabolicis. Quod si nouæ curuæ sint exteriores cycloidi, vt in figurâ 108. omnes hæ curuæ a d, earúmq; portiones datam habebunt rationem ad summam rectarum & circumferentiarum circularium.

Enuntiari potest in figura 108. generalis propositio hoc pacto. Fiat vt differentia quadratorum b c & c d ad quadratum c d, ita quadrupla rectæ a c ad rectam a m. Et per punctum a tanquam verticem describatur parabole cuius rectum latus sit a m, & axis a c; occurrat autem parabole rectæ b d c productæ in puncto g; rectæ verò f e o in puncto h. Ratio curuæ a g parabolicæ ad curuam a d erit data, eadem nempe potestate quæ est quadrati b c ad differentiam quadratorum b c, c d. Eadem verò erit ratio portionum a h, & a e. Ratio verò superficierum curuarum quæ oriuntur ex rotatione spatij a c g circa applicatam c g, & ex rotatione spatij a d c circa rectam d c, eadem est quæ curuarum a g, & a d. Similiter in portionibus a o h, a e o, circa rectas o h, & o e rotatis.

In figura autem 109. in qua curua a d est exterior cycloidi a b; fiat vt differentia quadratorum c b, c d ad quadratum c d, ita recta a c ad c m, rectæ a c in directum positam. Super recta a m describatur semicirculus, quem rectæ d b c, e f o secent in punctis g & h. Ratio curuæ a d summam curuæ circularis a g & rectæ g c dabitur. Erit nempe vt quadratum b c ad differentiam quadratorum d c, c b, ita potestate summa lineæ circularis a g, & rectæ g c, ad curuam a d; & similiter summa lineæ circularis a h & rectæ h o in eadem erit ratione ad curuam a e.

V. Sit in figura 110. parabole a c, cuius vertex a, axis a b, applicata c b. A curuâ parabolica c a deriuentur aliæ in infinitum curuæ c d, c e, c f, simili qua in figurâ 107. vsi sumus methodo; nisi quod in hoc terminum applicatæ seruamus, in illa verò terminum axis eundem semper retinemus,

nemus. Ducatur nempe g h i o m axi a b parallela; ea erit natura curuarum huius speciei, vt recta b d quæ secat in d curuam c i d secundi gradûs, sit æqualis curuæ parabolicæ d c: recta item g i sit æqualis c h portioni parabolicæ: recta autem b e quæ secat curuam tertij gradûs c o e sit æqualis curuæ d i c secundi gradûs; & sic de cæteris in infinitum, earumque portionibus.

Aio omnes huiusmodi curuas c d, e c, f c in infinitum, æquales esse curuis parabolicis primariis seu simplicibus, diuersis tamen à parabolis quæ æquantur curuis iuxta methodum tertiæ figuræ generatis. En itaque theorema generale.

Exponatur parabole r p, cuius axis r q æqualis axi a b prioris parabolæ; rectum verò latus r u sit duplum recti lateris a n. Aio, parabolen r p ita descriptam æqualem esse curuæ c i d. Si verò manente axe r q æquali a b, rectum latus r u fiat triplum recti lateris a u, tunc curua parabolica r p, erit æqualis curuæ c o e. Si verò manente semper axe r q æquali axi u b, rectum latus z u fiat quadruplum recti lateris a n, tunc curua parabolica r p erit æqualis curuæ c m f. Si autem circa rectas a b, b d, b e, b f rotentur spatia a c b, d c b, e c b, f c b in infinitum, dantur circuli æquales omnibus & singulis superficiebus curuis solidorum inde oriundorum, eadem omnino facilitate qua in conoide parabolico ex parabola a c circa axem a b descripto, circulum curuæ ipsius superficiei æqualem repræsentamus: Eius verò constructionem non adiungeremus, cùm iam ab aliis inuentam audierimus (licet eorum scripta hac de re ad nos non peruenerint) nisi quod nostra hæc constructio ad methodum generalem in omnibus conoidibus circa axes b d, b e, b f nouarum istarum curuarum in infinitum producendis facillimè producitur.

VI. In figura 110. circa rectam b d rotetur curua c d, superficies curua inde oriunda hoc pacto inuenitur. Fiat ex superiore methodo curua parabolica r p æqualis curuæ c i d; circa rectam r q rotetur parabola r p. Superficies conoidis parabolici r p q ad superficiem conoidis d i c b, erit vt applicata p q ad applicatam c b; si p r parabola iuxta præcedentem methodum fiat æqualis curuæ c o e, conoides parabolicum r p q dabit superficiem curuam quæ ad superficiem curuam conoidis e o c b erit vt applicata p q ad applicatam c b; & sic in infinitum.

VII. Sit in figura 111. parabole f b a d, cuius axis e a, applicata f e. Quæritur dimensio superficiei curuæ solidi quod fit à spatio a b f e, circa axem a e rotato. Fiat a c æqualis quartæ parti recti lateris, & applicetur c b: fiat e h æqualis a c, & applicetur g h; quadretur c b g h, hoc autem est facile ex Archimede; diagonia quadrati spatio c b g h æqualis est radius circuli æqualis superficiei curuæ conoidis f a d circa axem a e.

VIII. Videat subtilis ille Geometra qui nuper æqualitatem helicis & parabolæ demonstrauit, an potuerit vniuersalius concipi theorema, & helices infinitæ cum infinitis parabolis eleganter comparari sequentis

propositionis beneficio generaliter, si libuerit, enuntiandæ & exemplificandæ.

Proponatur (*Fig.* 112.) helix cuiuscunque in infinitum speciei in figura 38. libelli Dettonuillani, in qua potestas quæuis radij a b ad potestatem similem rectæ a c sit in ratione potestatis cuiuslibet, circumferentiæ totius b e 8 b ad potestatem similem portionis periphericæ e 8 b. Exponatur separatim parabola, cuius semibasis siue vltima applicatarum r p æquetur radio a b, axis verò a r portioni circumferentiæ totius b e 8 b, cuius numerator æquetur exponenti potestatis diametri a b, denominator verò æquetur aggregato exponentium potestatum diametri a b & circumferentiæ b e 8 b. Denique potestates applicatarum in parabola, quarum exponens æquetur aggregato exponentium potestatum diametri a b & circumferentiæ b e 8 b, sint inter se vt potestates portionum axis, quarum exponens est æqualis exponenti circumferentiæ b e 8 b.

Aio helicem ita effictam, parabolæ ita constructæ fore semper & in quocunque casu æqualem.

Exempli gratia proponatur primùm helix Archimedea & parabola simplex, & sit vt radius a b ad rectam a c, ita circumferentia tota b e 8 b ad eiusdem portionem e 8 b. Construatur separatim parabola a q p, cuius vltima applicatarum siue basis r p sit æqualis radio a b: axis autem a r sit æqualis portioni circumferentiæ b e 8 b, cuius numerator sit æqualis exponenti potestatis diametri a b, qui in hoc casu est 1. denominatur verò æquetur summæ exponentium potestatum diametri & circumferentiæ, hoc est binario: nam exponens potestatis periphericæ in hoc casu est etiam 1. Sit itaque a r axis æqualis dimidio circumferentiæ helicis constitutiuæ; sit autem in parabola vt potestas applicatæ r p, cuius exponens æquetur summæ exponentium diametri & circumferentiæ, hoc est in hoc casu numero 2. ad potestatem similem applicatæ *6* q: ita potestas rectæ a r, cuius exponens æquatur exponenti circumferentiæ b e 8 b siue 1. in hoc casu, ad similem potestatem rectæ a *6*. hoc est, sit vt quadratum rectæ r p ad quadratum rectæ *6* q; ita recta r a ad rectam *6* a: curua parabolica p q a erit æqualis helici b c d a.

Esto iam vt quadratum a b ad quadratum a c, ita tota circumferentia b e 8 b ad portionem e 8 b. Exponens potestatis diametri a b in hoc casu est 2. circumferentiæ verò 1. Parabola ita construetur iuxta prædictum Canonem: applicata r p æquabitur radio a b; axis a r æquabitur bessi vel duobus trienbus circumferentiæ b e 8 b, & erit vt cubus r p ad cubum *6* q, ita recta r a ad rectam *6* a. Huiusmodi verò parabola helici correlatæ æqualis erit.

Esto deinde vt recta a b ad rectam a c, ita cubus circumferentiæ b e 8 b ad cubum portionis e 8 b. In parabola, applicata r p æquabitur radio a b, axis verò a r æquabitur quadranti circumferentiæ b e 8 b, & erit vt qua-

drato-quadratum r p ad quadrato-quadratum 6 q, ita cubus r a ad cubum 6 a. Hæc autem parabola huic helici erit æqualis

Denique sit in helice vt quadratum radij a b ad quadratum rectæ a c, ita cubus circumferentiæ b e 8 b ad cubum portionis e 8 b. In parabola huic helici correlata & æquali, applicata r p erit æqualis (vt semper) radio a b; recta verò r a erit æqualis duabus quintis partibus circumferentiæ b e 8 b, & erit in parabola vt quadrato-cubus applicatæ r p ad quadrato-cubum applicatæ 6 q; ita rectæ a r cubus ad cubum rectæ 6 a.

Nec dissimilis in helicibus & parabolis cuiuslibet speciei inuicem comparandis in infinitum erit methodus. Helicis autem siue diminutæ, siue auctæ portiones cum portionibus parabolæ correlatæ nullo negotio comparabuntur. Vnde sequitur dari intra circulum infinitas numero helices specie & quantitate diuersas: imo dantur infinitæ ipsa circumferentia maiores, quod inter miracula Geometrica potest numerari; nulla tamen datur quæ non sit minor aggregato circumferentiæ & radij, & nulla etiam quæ non sit radio maior.

SCHOLIVM.

Hactenus Viri Clarissimi propositiones non minus arduæ quàm nouæ. Ex quibus perspicuum fit, quod initio diximus, per eas præparari Geometram ad centra grauitatis inuenienda iuxta methodum quam esse generalem monuimus in præfatione quinti libri. Ita porrò præparatur vt nihil amplius, datâ (vbi id opus fuerit) hyperbolæ quadraturâ, inuenire debeat ad definiendum grauitatis centrum in curuis lineis figurarum ex parabolâ præscripto illo modo genitarum. Attamen ad inueniendum semisolida circa axem & circa basim generata; & ad eorum centra grauitatis (quod in isto problematum genere meritò censetur difficillimum) reperienda, excogitari aliquid antè debet quàm generali illi methodo nostræ detur locus; illud verò est summa quadratorum, & cuborum explicata in prima sexti libri. Cæterùm cùm harum & aliarum etiam summarum seriem in infinitum protractam habeamus penes nos, possemus eam hic adscribere, nisi nefas putaremus quicquam hocce in loco demere vel addere tam præclaris Viri doctissimi inuentis.

PARS POSTERIOR.

I. In tetragonismicis monstrauimus methodum inueniendi quadraturam segmentorum cuiuslibet sectionis conicæ oxygoniæ vel amblygoniæ ex dato centro grauitatis; nec non inueniendi cuneos etiam hyperbolicos, siue fiant à plano per axem transuersum ducto, quod R. P. Tacquet in lucem protulit eodem quo nos anno; siue, quod ille non attigit, fiant à plano per axem rectum acto. Methodum nudam hic propono, vt semel omni demonstrationum prolixitate submotâ constet quàm non sit difficilis. Quisquis autem ex facilitate rei iam inuentæ, antea ipsam non fuisse difficilem auguratur, ille profectò per ridiculum loqui mihi videtur; cùm res diu quamuis, multumque quæsita conatu irrito, postea quam reperta & in medium collata fuit, cuilibet obuia prostet.

Esto (*Fig.* 115.) b d c semicirculus centro à descriptus & comprehensus diametro b c, ad quam perpendiculariter cadat diameter d a m: esto quoque (*Fig.* 116.) b c axis transuersus hyperbolarum primariarũ b, c, rectus verò d m: esto denique (*Fig.* 117.) d m axis transuersus hyperbolæ primariæ e d f; rectus b c. Diametro b c in tribus illis figuris educta sit parallela e f ad axem m d ordinatim applicata; per e, f ductæ sint ordinatim applicatæ e i, f l ad axem b c; completa sint quadrata b a m n, c a m o, & completa sint parallelogramma e r m p, f r m s. In schemate 115. descripta sit parabola b d c, cuius axis d a, basis b c; in schemate 116. descripta sit parabola b m c, cuius axis m a, basis b c; in schemate denique 117. descripta sit parabola h d g, cuius axis d q, latus verò rectum æquet rectam d a. In tribus illis figuris perimetro parabolæ iam descriptæ occurrant rectæ e p, f s in h, g, & iungatur recta h q g, quæ erit parallela rectæ e r f.

Aio si libræ planæ ponatur axis b c, sustentaculum n o; circuli vel hyperbolæ segmento e d f vt iacet manenti in fig. 115. & 117. æquiponderans aptatum sustentaculo n o esse dimidium figuræ parabolicæ h d g; in figura autem 116. duobus segmentis e y b i, f u c l æquiponderare dimidium figurarum parabolicarum h λ b i, g π c l: & in trium figurarum qualibet, tres rectas m a, a r, a q esse proportionales. Aio præterea cylindraceum altitudinis æquantis rectam a m, & baseos æquantis dimidum illud parabolicum esse æquale cuneato, vel vngulari solido abscisso per planum inclinatum gradibus 45. ad planum b a d, & incedens per axem b c. Aio denique vt est suspensum ad dimidium illud parabolicum notum, ita esse brachium m a, ad grauitatis centri, quod suspenso competit, distantiam ab axe b c. Placet etiam compendio subiicere nonnulla de quadratricibus nostris quarum mentionem fecimus in scholio prop. 44. lib. 5. vt huius nostri inuenti gustum aliquem habeat Lector.

II. Esto (*Fig.* XXVIII. Romano charactere notatâ post fig. 28. sarracenico numero distinctam) linea quælibet m a h ad easdem partes caua, & intra rectas g m, f h parallelas contenta, quas recta g f secet in f, g; ex f g abscissa sit quælibet g c, quæ fiat brachium libræ f c suspensæ ex g perpendiculo g m, & inde generetur quadratrix g i o figuræ g m a h f, ita vt sicut brachium g c ad quamlibet longitudinem g s, ita s a dimetiens figuræ suspensæ parallela perpendiculo g m, sit ad s t dimetientem quadratricis. Curuam m a d tangat in a quouis puncto recta a u b occurrens rectæ g m in b; figuræ rectilineæ s a b g parallelogrammæ, vel trapeziȩ, vel triangulari inueniatur iisdem positis quadratrix g p t s; erit t p parabolȩ perimeter nota, si b a, g s non ȩquidistent, vt facilè intelligitur ex septimâ propositione secundi tetragonismicorum, & ex quadragesimȩ methodo libri quinti superioris. Nota igitur est recta t l tangens parabolam t p. Aio rectam t l tangere quoque curuam g i t o in puncto t. Quod si recta a u ȩquidistet rectȩ g f, linea t p erit recta & nota, vt ex iisdem propositionibus constat, & ex scholio quadragesimȩ quartȩ quinti libri iam lau-

dati. Si autem recta u a æquidistet rectæ g m, ipsa a s tanget quoque quadratricem in t, sicuti curuam m a ponitur tangere in a. Atque hæc est methodus generalissima pro quadratricum tangente inueniendâ ex data tangente curuæ cui quadratrix respondet dicto iam modo.

III. Esto (*Fig.* 118.) a c x t semisegmentum parabolicum habens axem a t, ad quem ordinatim applicata sit t x; diametri a t dupla sit t a h, & completum sit parallelogrammum a y x t; libra h t suspensa ex a, perpendiculo a y, brachio a h intelligatur figuræ a c x t generari series quadratricum producta in infinitum, ita vt sicut h a brachium ad a o longitudinem abscissam ex a t axe, ita o z dimetiens parabolici semisegmenti a c x t, se habeat ad o d dimetientem primæ quadratricis a d x t, & ita o d ad o p dimetientem secundæ a p x t; ita quoque o p ad o q dimetientem tertiæ a q x t &c.

Aio primam a d x t esse duas quintas parallelogrammi a y x t; secundam a p x t esse duas septimas eiusdem parallelogrammi; tertiam a q x t esse duas nouenas eiusdem parallelogrammi, ita vt minutiæ sequentes pro numeratore retineant binarium, denominatorem autem augeant binario; nam quarta, est duæ vndecimæ parallelogrammi a y x t; quinta, duæ decimæ tertiæ; sexta, duæ decimæ quintæ; & ita deinceps facto progressu per numeros impares. Hanc propositionem demonstro in libro manuscripto quadratricum, & per illam inuenio in circuli & hyperbolæ casibus iam positis, quadraturam quadratricum tertiæ, quintæ, septimæ &c. prout exposui in scholio quadragesimæ quartæ propositionis libri quinti. Has quadratrices appellaui *tertij ordinis*; *secundi*, eas quarum prima est semihederacea ibidem definita; *primi*, illas quæ in quadragesimâ quartâ libri quinti quadrantur. Cæterùm ex tangentium methodo suprà præscriptâ inuenies a u portionem rectæ a y in infinitum productæ interceptam inter g u parallelam tangenti a t & ipsam tangentem, esse ad u b interceptam inter u d & d b tangentem ipsius quadratricis primæ a d x, vt est binarius ad ternarium; si a d x sit quadratrix secunda, vt est binarius idem ad quinarium; si sit tertia, vt idem binarius ad septenarium, & ita de aliis, retento binario vbique, & facto progressu per numeros impares 3. 5. 7. 9. 11. &c. Pari prorsus methodo in quadratricibus primi ordinis inuenies primæ quadratrici quæ est triangulum respondere numeros 1. 1. secundæ quæ est parabola 1. 2. tertiæ 1. 3. quartæ 1. 4. quintæ 1. 5. & ita deinceps absq; vllo progrediendi fine. Quæ omnia facilia esse incipiunt ex quo monstrata semel fuerunt; mirabilem verò aperiunt viam ad ipsarum quadratricum curuarum dimensionem.

IV. In schemate circuli (*Fig.* 115.) & hyperbolæ (*Fig.* 117.) recta a d bifariam secetur in t, & describatur d x perimeter circelli, vel hyperbolellæ primariæ cuius axis transuersus sit a d; in altero autem schemate hyperbolico (*Fig.* 116.) recta m a bifariam secetur in t, & describatur a x hyperbolella primaria cuius centrum t, axis transuersus m a.

Aio si in tribus illis figuris libra m d suspendatur ex a, brachio m a, perpendiculo a b, fiantque tres rectæ m a, a r, a q proportionales; figuræ b e r a in circuli schemate 115. secundam quadratricem esse æqualem dimidio figuræ q z u a: figuræ e r d in hyperbolæ schemate 117. secundam quadratricem esse æqualem dimidio figuræ q d z: denique in altero hyperbolæ schemate 116. figuræ e y b a r secundam quadratricem esse æqualem dimidio figuræ q a z. Istud demonstro in manuscripto libro; vnde obtineo quartas, sextas, octauas, &c. per pares numeros incedendo, sicuti in illo scholio monui. Ostendo quoque arcum a z in figuris 115. 116. esse similem duplo arcûs b e; in figura autem 117. arcum d z esse similem duplo arcûs d e. Vnde obtineo quadratricem secundam in figuris 115. 116. reduci ad spatium mixtum ex rectilineo noto & ex quadrante figuræ b e r a addititio, quam *condictam* appellare solitus sum: in figura autem 117. reduci ad quadrantem pari modo addititium figuræ e r d condictæ. Simili methodo ostendo quartam quadratricem in figurá 115. 117. reuocari ad mixtum ex rectilineo noto & ex addititio semiquadrante figuræ condictæ; in figura autem 116. ex ablatiuo eiusdem figuræ semiquadrante, & ita pergo ad reliquas omnes in gradu numerorum parium collocatas; quas hîc prætereo, cùm eas nunc obiter indicasse satis sit proposito. Inde quoque eruo gradus parium sedium explicatos in octauæ propositionis corollariis libri tertij, ita vt primus gradus ad positionem rectæ m d sit parallelogrammum dimetientis a m, secundus figura dimetientis e i; ostendo autem gradus imparium sedium singulos esse æquales rectilineo noto; parium verò esse mixtos ex certâ portione condictæ figuræ, & ex rectilineo noto. Quod statim liquet si notæ fuerint quadratrices; nam in circuli schemate 115 primus gradus est parallelogrammum dimetientis m a; secundus figura dimetientis i e; tertius est † primus – quadratrix secunda primi genita librâ b c suspensâ ex a perpendiculo a d, brachio a c; quartus est † secundus – secunda quadratrix secundi; quintus est † primus – bis quadratrix secunda primi † quarta primi quadratrix; sextus est † secundus – bis quadratrix secunda secundi † quadratrix quarta secundi, & ita de reliquis iuxta methodum indicatam in corollario tertio decimæ septimæ tertij libri. In hyperbolæ schemate 116. primus est parallelogrammũ dimetientis m a; secundus figura dimetientis i e; tertius – primus † quadratrix secunda primi libra b c suspensa ex a, brachio a c; quartus est – secundus † quadratrix secunda secundi eodem modo genita; quintus est † primus – bis secunda quadratrix primi † quarta quadratrix primi; sextus est † secundus – bis secunda quadratrix secundi † quarta quadratrix secundi; & ita de aliis. In schemate 117. primus est idem parallelogrammum dimetientis a m; secundus figura dimetientis i e; tertius † primus † secunda quadratrix primi; quartus † secundus † secunda quadratrix secundi; sextus est † secundus † bis secunda quadratrix secundi † quarta quadratrix secundi; & sic de septimo, octauo & aliis; gradus huius seriei appello te-

tragonismicos. Porrò dum dixi quadratricem aliquàm esse mixtam ex rectilineo noto, & ex curuilineo; nolim asserere vbique adesse rectilineum notum; nam quadratrices parium sedium in circuli schemate 115. carent rectilineo, quando sumuntur pro tota figurâ b e d a.

V. Esto (*Fig.* 119.) b e d semicirculus, diametro b d & peripheria b e d comprehensus; illi ita respondeat figura g o d b (nomine figuræ hic *locum asymptoticum* etiam intelligo illum, quem sub finem vigesimæ sextæ libri septimi definitum habes) ad positionem tangentis b f, vt si a d libra fiat dupla diametri b d, & intelligatur suspendi perpendiculo b f, quæcunque m o parallela rectæ b f ducatur occurrens perimetris d e, d g in n, o, & diametro b d in m; vt est brachium a b ad b m, ita m o dimetiens figuræ g o d b sit ad m n. Quod est semicirculum esse quadratricem figuræ g o d b. Esto b c bifariam secta in h, & ad partes oppositas intelligatur semicirculus b p d, nec non s d b eadem quæ g o d b. Aio spatium istud g o d s integrè sumptum inter tangentes d x, f b esse æquale quadruplo circuli b e d p, eiusque grauitatis centrum esse h; perimetrum verò g o d s productam in infinitum, nunquam conuenire cum recta f b, quamuis propiùs ad illam accedat; ac proinde ipsam f b esse asymptotum definitam in scholio illius vigesimæ sextæ septimi libri, cuius trigesima confirmatur præsenti theoremate, sicuti & duobus sequentibus. Portionis cuiuscunque o d u quadraturam & centrum grauitatis dare possumus quoque assumptâ circuli quadratura; hocque ipsum in hyperbola præstamus, postulata eiusdem hyperbolæ quadratura.

VI. Esto (*Fig.* 120.) quadrans circularis e n d c centro c descriptus; sitque b d dupla semidiametri c d: sit triangulum q c d rectangulum, cuius latera c d, d q sint æqualia; esto quadrantis e n d c quadratrix semihederacea c t d m; intelligatur figura o c m ita semihderaceæ respondens, vt quæcunque m o parallela tangenti d q ducatur occurrens curuis c o, c t in o, t, & rectæ c q in p, tres rectæ m t, n p, m o sint proportionales. Aio rectam d q esse asymptotum perimetri c o; totamque figuram comprehensam curua c o & rectis c d, d q esse æqualem quadrato rectæ c d; & si ad partes oppositas intelligatur alia c r priori c o similis & æqualis; sitque c d recta ad c m vt quadratum diametri circuli ad ipsum circulum; aio punctum m esse centrum grauitatis eiusmodi figuræ; cuius omnes portiones absolutè conuerto alibi in rectilineum notum; earum verò grauitatis centrum designo circuli quadratura assumpta. Non admodum dissimili ratione inuenio quadraturam figuræ c o m, si c d sit semiaxis hyperbolæ, & d t eius quadratrix prima, genita eodem brachio b c, & perpendiculo c e; dummodo maneat recta c q, in infinitum tracta.

VII. Esto (*Fig.* 119.) semicirculus b p d centro c descriptus; sitque d r linea conchoides à Nicomede descripta, ita vt eius asymptotus sit c p semicirculum tangens, & ex puncto b educta qualibet recta b r, secante lineas c p, d r in z, r, recta z r sit æqualis semidiametro c d, prout generatio chon-

choidis relata apud Eutocium in prop. 1. lib. 2. Archimedis de Sphę. & Cyl. exigit; super c e constructum sit quadratum e c d x, & per x descripta sit hyperbola i x q, cuius semiaxis c x, & asymptoti e c, c d; per m quodlibet punctum inter c & d iacens, educta sit m r parallela asymptoto c p, occurrens perimetro conchoidis in r; limbo semicirculi b p d in t, hyperbolę in i; ex recta b d abscindatur d y ęqualis rectę m t; per y agatur y q æquidistans asymptoto e c. Aio conchoidis portionem m d r esse æqualem figuræ hyperbolicæ i m y q auctę figura circulari m d t, & imminutæ rectangulo contento sub c b & m t rectis. Si autem intelligatur ad partes e replicari figura m r d; aio si segmenti duplicatæ conchoideos intercepti inter rectas t m, d x centrum grauitatis sit B, rectam c d ad c B esse, vt est figura n d m aucta segmento i m y q, & imminuta rectangulo c b, m t ad figuram d n m auctam spatio quod figurę ipsi d n m æquiponderat libra b d suspensa ex centro c perpendiculo c p, brachio b c. Quòd si pro puncto vel, vt appellatur à Nicomede, polo b sumatur h in recta c b, siue c h sit minor, siue maior ipsa c b, modò eadem maneat c d, quam idem Nicomedes nominat *longitudinem regulæ μῆκος κάνονος*: eadem est constructio, nisi quod quadratrix segmenti n d m generatur brachio h c, ac proinde est ad generatam brachio b c, vt ipsa b c recta ad h c; pro segmento autem i m y q, & pro rectangulo b c, m t sumuntur spatia quę ad ipsa sint, vt est h c recta ad b c.

VIII. Esto (*Fig.* 115.) quælibet linea curua d f ad easdem partes caua intra angulum rectilineum d a c contenta; eius verò hęc sit proprietas, vt quęcunque agatur parallela rectis d a, a c, ea non occurrat ipsi curuę d f intra angulum d a c quantumuis protractæ, nisi in vno puncto. Esto quęlibet alia figura curuilinea vel rectilinea d g l a ad positionem rectę d a insistens basi a c; deinde verò intelligatur ad eandem positionem transferri super curuam d f, & demum super eadem curua inclinari ad positionem rectę a p cuiuslibet; dimetientes autem ita inclinatę, sint ad dimetientes figurę erectę, vt a p diameter parallelogrammi i a m p (cuius latus a m iacet in directum rectę d a) est ad latus p m. Ex methodo decimę octauę primi tetragonismicorum libri colligimus inclinatam illam figuram super curua d f ad libitum producta intra angulum d a c, esse ęqualem erectę simul & alteri super eadem curua d f inclinatę ad positionem rectę a c quam voco horizontalem, ita vt eius dimetientes singulę sint ad singulas dimetientes figurę erectę, vt est m p latus ad m a; esse inquam ęqualem simul erectę & horizontali, quoties omnes parallelę ad rectam a p non occurrent curuę d f productę intra angulum, nisi in vno puncto; quòd si inclinatio intelligatur fieri ad positionem rectę a s, & illi parallela vna tangat curuam in puncto exempli causa f; tunc portio inclinatę super portione d f, vel super reliqua eiusdem d f portione posita intra illum angulum, erit ęqualis differentię qua different erecta figura & horizontalis. Atque hęc generaliter; particulatim verò si d f c sit arcus circuli & d g c

parabolæ,

parabolæ, verticis d, vt paulò antè ſtatuimus; figura horizontalis primaria erit figura comprehenſa ad poſitionem horizontalem ſub rectâ d a & ſub parabola cuius axis ſit a c, vertex a, latus rectum æquale ipſi a d. At ſi parabolæ d g c intelligatur inſiſtere circularis quadrans d f c e, figura horizontalis primaria erit parabola verticis a, axis a d, cuius latus rectum b a. Voco autem figuram primariam hîc, eam quæ gignitur, cum rectæ i a, a m ſunt æquales; ex illa enim eruuntur ſecundariæ, quoniam ad illam ipſæ ſecundariæ ſunt vt recta i a ad a m. Quæ de circulo ſcripſimus facilè, vt patet, applicantur hyperbolæ in ſchematibus 116. 117. Grauitatis verò centra generali methodo reperiuntur, per grauitatis centra erectæ & horizontalis pari ratione tractata; ſi nempe inclinata ad poſitionem rectæ a p vel a s intelligatur ita aptari curuæ d f, vt eius dimetientes ſingulæ bifariam ſecentur à curua d f; Si item erecta & horizontalis pari pacto intelligantur aptari eidem curuæ; idem erit grauitatis centrum, quod duarum ſimul erectæ & horizontalis in primo caſu, & quod differentiæ illarum in ſecundo.

IX. Dum iſta Appendix nunc cuditur, prælo etiam mandatur *Diſſertatio de linearum curuarum cum rectis comparatione Autore M. P. E. A. S.* doctiſſimo, quam vbi ſumma cum admiratione legi, perſpexi in vtroque quadratricum ordine primo & tertio, quos ſuprà n. 3. expoſui, poſſe aſſignari methodum generalem dimetiendi earum curuas. Illa porrò hæc eſt: eſto a y x t quadratum (*Fig.* 118.) & a z x parabola quam tangat a y, cuius axis a t, ordinata t x & intelligantur quadratrices a d x prima, a p x ſecunda, a q x tertia &c. vt n. 3. Ducta præterea ſit diameter a g x; ergo quadratum a y m h ad poſitionem lineæ rectæ a h erit ex ſcholio quadrageſimæ quartæ quinti libri primus quadratricum primi ordinis gradus; ſecundus triangulum x a y, tertius figura a z x y parabolica; & ita continuata ſerie quouſque libuerit, notus erit tetragoniſmus ſingulorum graduum per illam quinti libri iam laudatam propoſitionem. In primo iſto ordine ſecundus gradus eſt triangulum rectilineum, ideóque linea a g x cum ſit recta, non eſt conuertenda in rectam; tertius gradus habet curuam a c x, & illi aſſignatur minutia cuius denominator eſt 4. quadratus numerus binarij denotantis ſedem ſuperiorem, numerator 1. quarto aſſignatur minutia cuius numerator eſt 1. denominator eſt 9. quadratus numerus ternarij denotantis gradum proximè ſuperiorem; quinto pariter attribuitur minutia numeratoris 1. denominatoris 16. & ita de aliis. Vt denominator gradûs cuius curua eſt redigenda in rectam ſe habet ad numeratorem, ita fiat a h recta ad e h, & compleatur parallelogrammum h e f m. Numerus denotans gradum proximè ſuperiorem illi cuius curua ſuſcipitur redigenda in rectam, duplicetur; & ex duplicato auferatur vnitas; vt ſi curua tertij gradus conuertenda ſit, ſuperior gradus notatur binario, duplus binarij eſt quaternarius, dempta inde vnitate reſtat ternarius; ita ſi quarti curua, tractetur, proximè ſuperior eſt ternarius, duplus illius numerus eſt ſena-

rius, dempta vnitate residuus sit quinarius. Iste numerus vocetur *residuus*. Super e f recta intelligatur insistere eiusdem ordinis gradus qui designatur numero residuo; vt pro curuâ tertij gradûs, e r D f est tertius gradus; pro curua quarti, e r D f est quintus; pro curua quinti, e r D f est septimus; pro curua sexti, e r D f est nonus; pro curua septimi e r D f est vndecimus &c. Intelligatur figura h e s l m insistere super basi h m ad positionem rectæ h a, & ita se habere ad figuram h e r D m, vt ductâ qualibet r n parallelâ ad rectam a h occurrente lineis e r D, e s l, e f, h m in r, s, i, n, tres rectæ n i, n s, n r sint proportionales; atque iuxta modum loquendi propositionis primę sexti libri figura h e r D m sit summa quadratorum figuræ h e s l m: vnde patet istam quadratorum summam esse nobis notam. Aio si curuæ illæ producantur in infinitum, & intelligatur parallelogrammum mixtum cuius basis sit curua quam dimetiri volumus, altitudo verò æquet rectam h e, istud parallelogrammum esse ad positionem rectæ a h condicta ratione æquale figuræ e s l m h, ita vt figura e h n r sit æqualis rectangulo contento sub h e & sub recta æquante curuæ portionem interceptam parallelis a h, n r productis. Quando curua e r erit parabola vt in tertio gradu, curuam e s esse hyperbolam semiaxis transuersi h e, conficitur ex methodo quam initio huius secundæ partis tradidimus; hæc verò hyperbolica figura Fermatianum inuentum numero 1. primæ partis expositum mirè confirmat; haud tamen scio qua sit Vir ille vsus methodo, mecum enim communicata fuit sola propositio, vt ibi iacet, sine vlla demonstratione.

X. In ordine tertio prima quadratrix a d x habet minutiam cuius numerator est quaternarius, denominator est 9. quadratus ternarij; quadratricis a p x secundæ minutia habet numeratorem 4. (qui & reliquis istius ordinis quadratricibus communis est) denominatorem habet 25. quadratum numeri 5. tertiæ minutia habebit pro deminatore 49. quadratum numeri 7. pro sequenti sumetur quadratus numeri 9. tùm numeri 11. deinde numeri 13. & ita alij formabuntur additione binarij. Figura verò e r D f (*Fig*. CXVIII.) pro prima quadratrice e d x erit secundus gradus primi ordinis, siue triangulum rectilineum; pro secunda a p x, erit quartus eiusdem ordinis primi; pro tertia a q x, erit sextus eiusdem ordinis; & ita pro quarta, erit octauus; po quinta decimus; pro sexta, duodecimus, & sic deinceps aliorum graduum numerus efformabitur accessione binarij. Reliqua verò se habent vt in primo ordine, nempe quadratum s n figuræ e s l m h est æquale rectangulo r n i. Hinc verò liquet pro prima quadratrice a d x, lineam e s l esse parabolicam; quod penitus concinit commendabilissimo Autoris M. P. E. A. S. inuento; curua enim a d x esse conuincitur illa quam ille *parabolam suam & diuersam ab Archimedea* appellat. Assignata igitur est methodus generalis determinandi figuram h e s l m insistentem super notâ recta, cuius summa quadratorum sit nota, & quæ ad positionem rectæ a h sit condicta ratione æqualis parallelogrammo mixto definito in decima sexta libri quinti, & paulò antè explanato.

Cæterùm Eximius ille Geometra Dissertationis suæ causam testatur fuisse effatum quorundam planè simile illi quod nunc memini extare apud Dettonuillæum in tractatu de Dimensione curuarum Cycloidicarum p. 7. *Admiratione dignum esse ordinem Naturæ, qui non patitur inueniri rectam æqualem curuæ, nisi antè sumpta fuerit recta cuiusdam cum curua linea æqualitas. Inde verò in Cycloidica simplici, cuius basis ponitur æqualis circumferentiæ circuli genitoris, euenire vt curua illa demonstretur esse æqualis lineæ rectæ.* Sed istum ad hanc vsque diem inuiolatum *Naturæ ordinem* nunc tandem Tolosanæ cessisse Geometriæ, est quod gaudeant omnes, quotquot nouis primæ notæ inuentis fauêre se profitentur.

XI. Esto (*Fig.* x x. characteris Romani, post figuram notæ 20.) quælibet curua o d x ad easdem partes caua, cuius axis a y; ordinatæ d e ad axem perpendiculares; tangentes autem d m interceptæ inter curuam o d x & axem a y sint singulæ æquales rectæ i s quæ in figura ſ l f i æquidistet axi, & per d tactum ducta sit; librâ n a f suspensâ ex a, perpendiculo e a, brachio a n longitudinis ad libitum assumptæ, intelligatur figura r d f i, cuius quadratrix sit ſ l f i, ita vt sicut brachium n a est ad longitudinem quamlibet a i, ita sit r i dimetiens figuræ superioris r d f i ad ſ i dimetientem inferioris. Aio figuram r d f i esse ad positionem axis a y condicta ratione æqualem parallelogrammo mixto baseos d x, altitudinis a n. Aio præterea si superficies cylindrica, cuius portio est parallelogrammum mixtum baseos d x, secetur plano per axem a y ducto, & ad planum a o x gradibus 45. inclinato; figuram i ſ l f esse æqualem illi vngularis vel cuneatæ superficiei (definitur in decima sexta quinti libri) portioni quæ insistit super curuâ d x. Ista duo theorema sunt generalissima, mihíque expedita & vtilia imprimis extiterunt: ex iis enim plurima reperi, in quibus locum non postremum obtinet theorema quod sequitur omnium vltim.

XII. Esto (*Fig.* ead.) o d x hyperbola primaria, cuius semiaxis transuersus a o æquet semiaxem rectum a y; ex a o abscindatur a t recta, quæ ad a o sit potestate vt vnitas ad binarium; intelligatur hyperbola t c g cuius semiaxes sint a t, a y: intelligatur præterea figura i r d f, quæ ita se habeat ad hyperbolas o d i, t c i vt recta y a sit ad ordinatim quamlibet applicatam i r, sicut ordinatim applicata i d se habet ad ordinatim applicatam i c. Aio figuram i r d f esse ad positionem rectæ a y condicta ratione æqualem parallelogrammo mixto altitudinis æquantis rectam ay, baseos d x, modo suprà præscripto. Curuæ porrò ſ l, r d in præsenti casu sunt asymptoti & *inconcurrentes* cum recta o p; dimetiens verò i r, quodcunque sit interuallum o i, est perpetua legè maior quàm a n vel a y, excessu minori vsque & minori, quò longiùs punctum i recedit à puncto o; patet autem totam figuram respondentem parallelogrammo mixto totius baseos o d x esse locum definitum in scholio vigesimæ sextæ libri septimi, & esse æqualem spatio finito, nempe rectangulo comprehenso sub n a &

sub recta æquante curuam o d x.: vnde confirmantur quæ scripsimus in corollario secundo vigesimæ nonæ septimi lbri iam laudati.

Atque hæc omnia quæ vel in istis nunc de Cycloide libris, vel in Elementis tetragonismicis aliàs scripsi, debere me fateor inuestigationi tetragonismi circularis & hyperbolici; in quo licet capiendo operam fortasse perdiderim præcipuam (quod quidem semper & egomet ipse præsumo, & præsumi ab aliis, velim) non tamen, vt reor, omnem penitus: cùm in venatione istius tetragonismi occurrisse mihi videatur præda non prorsus contemnenda mei hominibus moduli. Hoc verò iam extremum edico, hîc istius venationis esse tandem finem, méque studiis aliis cùm minùs laboriosis, tum ætati iam prouectæ dulcioribus posthac esse, si Deus Optimus fauerit, vacaturum.

TABVLARVM SEDES ET INDEX.

Tabulæ 1. 2. 3. collocari debent ante pag. 1.
Tabulæ 4. 5. 6. 7. post pag. 404.

Tabula 1. complectitur figuras à primâ ad 16.

Tab. 2. à 17. ad 28.	Tab. 5. à 57. ad 71.
Tab. 3. à 29. ad 44.	Tab. 6. à 72. ad 96.
Tab. 4. à 45. ad 56.	Tab. 7. à 97. ad 120.

ERRATA SIC CORRIGE.

Pag. 75. *lin.* 2. † c c. *pag.* 132. *lin.* 27. calculum illum. *pag.* 133. *lin.* 28. effictim. *pag.* 153. *lin.* 10. libri primi. *pag.* 154. *lin.* 9. sintque a x, b l æquales. *pag.* 183. *lin.* 14. secetur in a. *pag.* 204. *lin.* 4. *ante finem* duarum G M. *pag.* 232. *lin.* 1. duarum. *pag.* 238. *lin.* 25. vbi scripsi. *pag.* 292. *lin.* 8. istos octo. *pag.* 293. *lin.* 15. ἄμαν. *pag.* 296. *lin.* 24. & 25. ῥοπῆς. *pag.* 314. *lin.* 19. g b, b e reciprocè. *pag.* 348. *lin.* 5. ego verò *pag.* 354. *lin.* 3. *ante finem* vt f e recta ad f u. *pag.* 349. *linea* 4. *adde hæc verba*; Exagellæ vocem pro trutinâ vsurpauit Ennodius, vt eruditè aduertit Sirmondus in Notis ad illum. *ibid. lin.* 13. *ante finem scribe* 350. pro 305. *pag.* 357. *lin.* 22. σταθμώμενα. *pag.* 374. *lin.* 3. *ante finem* R. P. Zucchius. *Cætera leuiora vel etiam minùs leuia Typographi errata castigabit & condonabit æquus Lector. In Sculptoris figura 26. fuit vna & eadem litera F per incuriam annotata duobus locis; sed id nullam pariet confusionem, vti spero, Lectori iam præmonito. Idem contigit in figura 58. vbi litera x bis adscribitur.*

FINIS.

